MAT1514 - A Matemática na Educação Básica

Departamento de Matemática
IME-USP

Sistema de Numeração dos Babilônios

Mesopotâmia é o nome dado para a região entre os rios Tigre e Eufrates e que hoje corresponde a aproximadamente parte do atual Iraque e Kuwait e partes de paízes vizinhos. A Mesopotâmia, considerada um dos berços da civilização ocidental, foi habitada pelos Sumérios, os Acádios, os Babilônios e os Assírios.

Foi na Mesopotâmia que ocorreram os desenvolvimentos mais importantes da história humana: a invenção da roda, o desenvolvimento da escrita, da matemática, da astronomia e da agricultura.

A escrita desenvolvida por esses povos é conhecida como **Escrita Cuneiforme**. Nessa escrita, os caracteres em forma de cunha eram produzidos em tabletes de argila.

Babilônios deixaram registro de seu conhecimento matemático em muitos textos cunhados em tabletes de argila, que até hoje são estudados.

Os tabletes de argila eram inscritos enquanto a argila ainda estava úmida e depois deixados ao sol. A maioria dos tabletes encontrados datam de 1800 a 1600 a.C. e tratam de tópicos como Frações, Álgebra, Equações Quadráticas e Cúbicas, Teorema de Pitágoras.

O tablete YBC 7289 apresenta uma aproximação de $\sqrt{2}$, com precisão de 3 casas sexagesimais (o equivalente a 7 casas decimais).

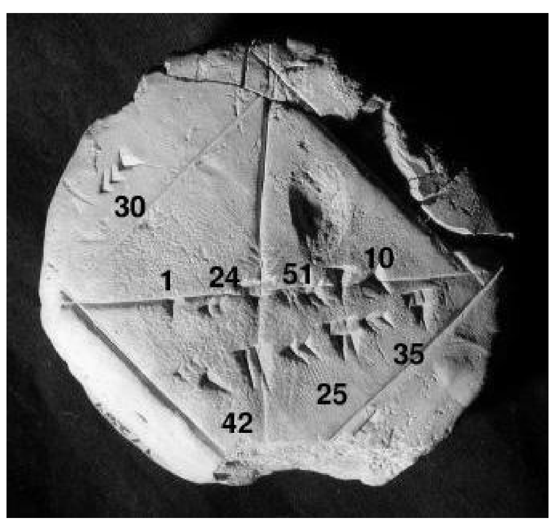

Figura 1: Foto de Bill Casselman (UBC - Canadá) do Tablete YBC 7289. O Tablete faz parte da *Yale Babylonian Collection*.

Neste ano de 2017, foi publicado um importante artigo pelos professores *Daniel F. Mansfield* e *N.J. Wildberger*, da UNSW, em Sydney, Australia, que afirma que o tablete Plimpton 322 (P322) é uma tabela trigonométrica! Isso indica que a origem da trigonometria se deu na época dos antigos Babilônios, entre 1900 e 1600 a.C., mais de 1.000 anos antes do grego Hiparco (190 a.C. — 120 a.C.), conhecido até hoje como sendo o pai da Trigonometria por ter construído sua "tabela de cordas".

O sistema de numeração da Babilônia era *sexagesimal*, isto é, eles usavam o sistema de numeração de base 60. Desse sistema derivam o uso de 60 segundos para formar 1 minuto, 60 minutos para uma hora, e a divisão do círculo em $360(= 60 \times 6)$ graus que utilizamos até hoje.

Os Babilônios puderam conquistar grandes avanços em Matemática por duas razões. Uma é que o número 60 tem muitos divisores próprios (2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, e 30), o que torna certos cálculos mais fáceis, como veremos adiante. Além disso, diferentemente dos Egípcios e Romanos, os Babilônios utilizaram um sistema de **valor posicional**.

Em um sistema de numeração com valor posicional, o valor de cada símbolo dependende sua posição na sequência que representa uma quantidade. O sistema de numeração que usamos atualmente, o hindu-arábico, é também posicional, mas de base 10, ou seja, a cada 10 unidades mudamos para 1 dezena, cada 10 dezenas trocamos por 1 centena e assim por diante. Além disso, em nosso sistema, o algarismo 5 que aparece no número 532 representa 5 centenas (5×10^2) enquanto que o mesmo algarismo vale 5 décimos (5×10^{-1}) em 12,5. Ou seja, o valor do algarismo depende de sua posição no número. Dessa forma, com apenas 10 símbolos, podemos escrever todos os números, tanto os muito grandes quanto os muito pequenos!

Nenhum sistema de numeração anterior ao dos Babilônios tinha sido um sistema posicional, e os primeiros registros desse sistema de numeração datam de cerca de 3100 a.C. Esse desenvolvimento foi de extrema importância por que as numerações sem essa característica precisavam ter muitos símbolos próprios para cada uma das potências de uma base numeral (Ex.; símbolos diferentes para dez, cem, mil, ..., como os sistemas de numeração egípcio e romano), o que dificulta os cálculos.

No caso dos Babilônios, havia somente dois símbolos básicos: cunhas verticais para representar unidades e horizontais para dezenas eram usados para formar os dígitos de 1 a 59. (Vide Figura 2.)

Em nosso sistema de numeração foi criado um símbolo - o zero - para indicar um agrupamento que estiver faltando. Por exemplo, em 205, interpretamos 2 centenas e 5 unidades e o 0 serve para indicar que não há nenhuma dezena. Pois bem. No sistema de numeração dos Babilônios não havia, por muito tempo, um símbolo para indicar a falta de um agrupamento e apenas era deixado um espaço vazio maior entre os agrupamentos. Isso levava a dificuldades na interpretação. Por exemplo, se encontramos duas cunhas verticais, tanto poderemos interpretar como o número 2, como poderemos pensar que é $2 \times 60 = 120$ ou até mesmo $1 \times 60 + 1 = 61$. Na escrita cuneiforme também não havia uma forma de separar valores inteiros e valores fracionários e a diferença era percebida apenas pelo contexto.

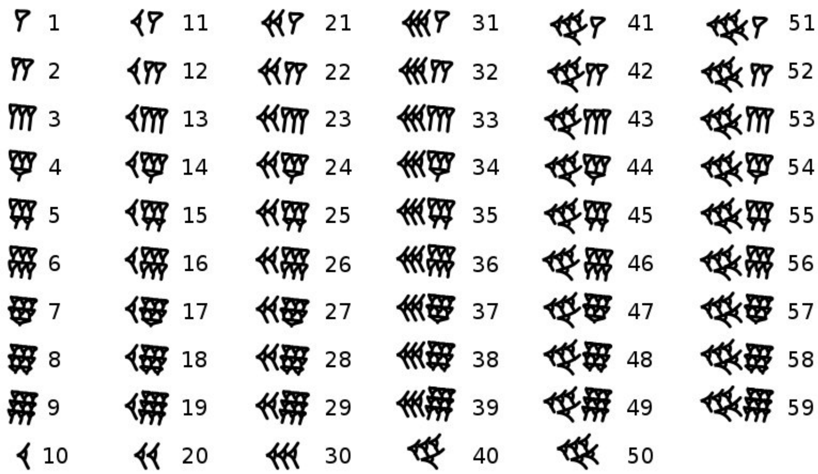

Figura 2: Números de 1 a 59 na escrita cuneiforme

Os Babilônios também tinham familiaridade com medidas de comprimento e áreas. Eles mediam a circunferência como sendo 3 vezes seu diâmetro e a área do círculo como um-doze-avos do quadrado da circunferência. Ambas as medidas estão corretas se tomarmos $\pi \approx 3$: do que sabemos hoje, indicando por R o raio do círculo e por D o seu diâmetro, teremos $C = 2\pi R = \pi D \approx 3D$ e

$$A = \pi R^2 = \pi\big(\frac{D}{2}\big)^2 = \frac{\pi}{4}D^2 = \frac{\pi}{36}(3D)^2 \approx \frac{1}{12}C^2$$

Recentemente foi encontrado um tablete em que o número π é aproximado como $3\frac{1}{8}$.

Nos tempos atuais, para facilitar a compreensão e os cálculos, foi criada uma *escrita representativa* da escrita cuneiforme que nada mais é do que usar nosso sistema de numeração atual para representar os possíveis 59 números de cada posição. As posições são separados por vírgula e a parte inteira é separada da parte fracionária por ponto e vírgula.

Por exemplo, a escrita cuneiforme que mostra uma cunha vertical seguida de duas horizontais e três verticais, será representada por **1, 23** que, convertido para nosso sistema de numeração, significa $1 \times 60 + 23 = 83$.

De modo análogo, usamos **2, 43, 52** para representar o número $2 \times 60^2 + 43 \times 60 + 52 = 7.200 + 2.580 + 52 = 9.832$. Na escrita cuneiforme, seriam 2 cunhas verticais seguidas de 4 cunhas horizontais e 3 verticais, seguidas ainda por 5 cunhas verticais e duas horizontais.

Também escrevemos **2, 43; 52** para representar o número $2 \times 60 + 43 + \dfrac{52}{60} = 163\dfrac{13}{15}$. Os Babilônios escreviam esse número da mesma forma que escreviam o anterior. A distinção entre um e outro ficava a cargo da interpretação dada a esses símbolos pelo contexto em que apareciam!

É interessante compreender como as frações podem ser convertidas do sistema decimal para o sexagesimal. Devido ao fato de 60 ter muitos divisores, algumas conversões são muito simples. Por exemplo,

a) $\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$ é representada, na escrita atual, por **0; 30**

b) $\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$ é representada por **0; 20**

c) $\frac{1}{15} = \frac{4}{60}$ que é representada por **0; 4**

d) $\frac{1}{90} = \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{60^2}$ que é representada por **0; 0, 20**

Mas há casos um pouco mais trabalhosos, como a representação da fração $\dfrac{1}{27}$ no sistema sexagesimal:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{27} = \frac{1}{60} \cdot \frac{60}{27} &= \frac{1}{60}\left(2 + \frac{6}{27}\right) = \frac{2}{60} + \frac{1}{60} \cdot \frac{2}{9} = \\
&= \frac{2}{60} + \frac{1}{60^2} \cdot \frac{120}{9} = \frac{2}{60} + \frac{1}{60^2}\left(13 + \frac{3}{9}\right) = \\
&= \frac{2}{60} + \frac{13}{60^2} + \frac{1}{60^3} \cdot \frac{180}{9} = \frac{2}{60} + \frac{13}{60^2} + \frac{20}{60^3}
\end{aligned}$$

Dessa forma, a escrita cuneiforme da fração $\dfrac{1}{27}$ seria feita por 2 cunhas verticais, seguidas de uma horizontal e duas verticais, e mais duas cunhas horizontais que, em nossa convenção atual, é escrita como **0; 2, 13, 20**

É importante fazermos aqui uma comparação do cálculo que fizemos acima e o que aprendemos a fazer desde crianças para converter uma fração em decimal. Vejamos o exemplo da fração $\dfrac{13}{40}$. Acrescentamos um zero no numerador e colocarmos 0-vírgula no quociente. Isso significa que em vez de dividirmos 13 inteiros por 40, estamos, na verdade, dividindo 130 décimos por 40. O quociente (3) estará escrito na primeira casa decimal por que são 3 décimos! E são 10 décimos de resto. Convertemos esse resto em 100 centésimos e dividimos novamente por 40. Obtemos o quociente 2 (centésimos) e sobram vinte. Finalmente, acrescentamos outro zero ao 20, que dividimos por 40 para obter 5 milésimos. Assim, vemos que acrescentar sucessivos zeros no resto significa multiplicar (e dividir) por 10, que é a nossa base! Uma outra forma de escrever isso é:

$$\begin{aligned}
\frac{13}{40} = \frac{1}{10} \cdot \frac{130}{40} &= \frac{1}{10}\left(3 + \frac{10}{40}\right) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{100}{40} = \\
&= \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2}\left(2 + \frac{20}{40}\right) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{1}{10^3} \cdot \frac{200}{40} = \\
&= \frac{3}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3} = 0,325
\end{aligned}$$

Há também representações sexagesimais infinitas (como as nossas dízimas periódicas). Vejamos um exemplo:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{7}=\frac{1}{60}\cdot\frac{60}{7} &= \frac{1}{60}\left(8+\frac{4}{7}\right)=\frac{8}{60}+\frac{1}{60^2}\cdot\frac{240}{7}= \\
&= \frac{8}{60}+\frac{1}{60^2}\left(34+\frac{2}{7}\right)==\frac{8}{60}+\frac{34}{60^2}+\frac{1}{60^3}\cdot\frac{120}{7}= \\
&= \frac{8}{60}+\frac{34}{60^2}+\frac{1}{60^3}\left(17+\frac{1}{7}\right)=\frac{8}{60}+\frac{34}{60^2}+\frac{17}{60^3}+\frac{1}{60^3}\cdot\mathbf{\frac{1}{7}}
\end{aligned}
$$

Como a fração $\frac{1}{7}$ voltou, podemos perceber que todo o procedimento irá se repetir a partir daqui (com o fator $\frac{1}{60^3}$ multiplicando os desenvolvimentos seguintes). Portanto, a escrita representativa da fração $\frac{1}{7}$ na base sexagesimal usada pelos Babilônios é infinita e periódica: **0; 8, 34, 17, 8, 34, 17, . . .**

Exercício 1. Determine a escrita representativa das frações $\frac{1}{59}$ e $\frac{1}{61}$.

Para se efetuar multiplicações na base 60 é bem interessante poder utilizar do conhecimento sobre os divisores de 60, que são muitos - é essa a grande vantagem dessa base em relação à utilizada hoje por nós! Assim, vale à pena reparar, por exemplo, que como $15 \times 4 = 60$, então $45 \times 4 = 3 \times (15 \times 4) = 3 \times 60$, que é representado por **3, 0**.

Analogamente,
$54 \times 40 = 18 \times (3 \times 20) \times 2 = 36 \times 60$, representado por **36, 0**

$$
\begin{aligned}
52 \times 32 = (30+22)\times(30+2) &= 30\times 30+30\times 2+22\times 30+22\times 2= \\
&= (30\times 2)\times 15+60+11\times 60+44= \\
&= (15+1+11)\times 60+44,
\end{aligned}
$$

que é representado por **27, 44**.

Exercício 2. Efetue o produto dos números abaixo, evitando passar para a base 10:

a) **8** $\times$ **0; 7, 30**
b) **9** $\times$ **0; 6, 40**
c) **0; 3, 45** $\times$ **16**
d) **27** $\times$ **0; 2, 13, 20**
e) **1; 4** $\times$ **56; 15**
f) **1; 15** $\times$ **48**
g) e) **1; 21** $\times$ **44; 26, 40**

Exercício 3. Complete a tabela:

Decimal	Escrita Representativa	Escrita cuneiforme
2		
120		
65	1, 5	
184		
	12, 7	
$\frac{1}{4} = \frac{15}{60}$	0; 15	
	2; 30	
602		
$\frac{1}{5}$		
$\frac{2}{9}$		
	0; 2, 40	

Referências Bibliográficas

- **Asger Aaboe**, Episódios da História Antiga na Matemática, SBM, 2002.
- **Howard Eves**, Introdução à História da Matemática, Editora UNICAMP, Campinas, 1997.
- **Maria Elisa Esteves Lopes Galvão**, *As origens da Matemática: dos processos de contagem aos sistemas de numeração*, Notas de aula, IME-USP, 2014.
- **Maria Elisa Esteves Lopes Galvão**, *Atividades com o Sistema babilônio de Base 60*, Notas de aula, IME-USP, 2014.
- `https://en.wikipedia.org/wiki/Babylonian_mathematics`. Último acesso em 06 de setembro de 2017.
- `https://en.wikipedia.org/wiki/Babylonian_numerals`. Último acesso em 06 de setembro de 2017.