MAT1514 - A Matemática na Educação Básica
Lista 3 - Números Racionais e irracionais

Exercício 1. Determine a representação decimal de $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \ldots, \frac{6}{7}$. Você reparou em algum padrão?

Exercício 2. Determine a representação decimal de $\frac{5}{11}, \frac{6}{11}, \frac{7}{11}, \frac{9}{11}, \frac{10}{11}$. Você reparou em algum padrão?

Exercício 3. Decida, sem efetuar uma divisão, se a representação decimal de cada um dos números $\frac{6}{15}$ e $\frac{6}{17}$ é finita, infinita periódica ou infinita não periódica. Justifique!

Exercício 4. Em cada caso, encontre uma fração cuja representação decimal é a dízima periódica dada:
a) $0,\overline{4}$ b) $0,\overline{250}$ c) $3,\overline{04}$ d) $0,2\overline{21}$ e) $4,001\overline{67}$

Exercício 5. Verifique se $\sqrt[3]{10}$ é um número racional ou irracional. Justifique.

Exercício 6. Mostre que se p é primo então $\sqrt{p}$ é irracional.

Exercício 7. Sabe-se que se p é um número primo e n é número natural maior que 2 então $\sqrt[n]{p}$ não é racional. Por quê?

Exercício 8. Decida de cada afirmação dada é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, mostre um contra-exemplo.

a) Uma fração irredutível cujo denominador é um número primo tem representação decimal infinita e periódica.

b) Se p e q são números primos distintos então $\sqrt{pq}$ não é racional.

Exercício 9.

a) Dê três exemplos de pares de números naturais k e n tais que $\sqrt{kn}$ não é racional.

b) Sejam k e n números naturais tais que $\sqrt{kn}$ não é racional. Prove que $\sqrt{k} + \sqrt{n}$ não é racional.

Exercício 10. Prove que $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ é irracional. Idem para $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Exercício 11. Dê exemplo de três racionais entre $a = \sqrt{2}$ e $b = \sqrt{2} + 10^{-3}$, lembrando que $\sqrt{2} \approx 1,41421356$. É possível encontrar mais racionais entre a e b? Quantos? Por quê?

Exercício 12. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, dê um contraexemplo.

a) A soma de dois números racionais é sempre um número racional.

b) O produto de dois números racionais é sempre um número racional.

c) A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.

d) O produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

e) A soma de um número racional com um número irracional é irracional.

f) O produto de um número racional por um número irracional é irracional.

g) O inverso de um número irracional é irracional.

Exercício 13.

a) Mostre que existem infinitos números racionais entre 0,9 e 1.

b) Mostre que existem infinitos números irracionais entre 0,9 e 1.

c) Mostre que entre dois racionais distintos sempre existe um irracional.

d) O número $\pi + 10^{-10}$ é racional ou irracional?

f) Entre os números π e $\pi + 10^{-10}$ existe um racional? Dê um exemplo.

g) Mostre que entre dois números reais distintos sempre existe um racional.

Exercício 14. Decida se o número dado é racional ou irracional. Justifique sua resposta.

a) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{50}-7} + \sqrt[3]{\sqrt{50}+7}$ c) $\frac{0{,}\overline{03}}{0{,}\overline{27}}$

Exercício 15.

a) Mostre que $\log_{10} 2$ é irracional.

b) Formule condições sobre os números inteiros a e b para que $\log_b a$ seja um número racional.

c) Formule condições sobre os números inteiros a e b para que $\log_b a$ seja um número irracional.