

2.3 Exercícios

1. Dado que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 0$$

encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 5g(x)]$

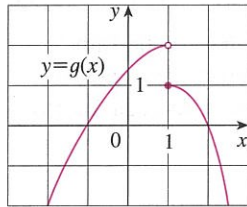
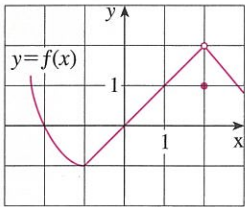
(b) $\lim_{x \rightarrow 2} [g(x)]^3$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{f(x)}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{h(x)}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Os gráficos de f e g são dados. Use-os para calcular cada limite. Caso não exista, explique por quê.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + g(x)]$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)g(x)]$

(d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2} [x^3 f(x)]$

(f) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3 + f(x)}$

3-9 Calcule o limite justificando cada passagem com as Propriedades dos Limites que forem usadas.

3. $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$

4. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3)$

5. $\lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

6. $\lim_{u \rightarrow -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

7. $\lim_{x \rightarrow 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

8. $\lim_{t \rightarrow 2} \left(\frac{t^2 - 2}{t^3 - 3t + 5} \right)^2$

9. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

10. (a) O que há de errado com a equação a seguir?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) Em vista de (a), explique por que a equação

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)$$

está correta.

11-32 Calcule o limite, se existir.

11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

12. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

14. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

17. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

18. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

19. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$

21. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

22. $\lim_{u \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4u + 1} - 3}{u - 2}$

23. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$

24. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$

25. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}}{t}$

26. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t} \right)$

27. $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

28. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

29. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}} - \frac{1}{t} \right)$

30. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

31. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

32. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$

33. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

traçando o gráfico da função $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$ (b) Faça uma tabela de valores de $f(x)$ para x próximo de 0 e estime qual será o valor do limite.

(c) Use as Propriedades dos Limites para mostrar que sua estimativa está correta.

34. (a) Use um gráfico de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x}$$

para estimar o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ com duas casas decimais.(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com quatro casas decimais.

(c) Use as Propriedades dos Limites para encontrar o valor exato do limite.

35. Use o Teorema do Confronto para mostrar que

 $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cos 20\pi x) = 0$. Ilustre, fazendo os gráficos das funções $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$ e $h(x) = x^2$ na mesma tela.

36. Empregue o Teorema do Confronto para mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 + x^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0.$$

Ilustre, fazendo os gráficos das funções f , g e h (como no Teorema do Confronto) na mesma tela.

37. Se $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para $x \geq 0$, encontre $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

38. Se $2x \leq g(x) \leq x^4 - x^2 + 2$ para todo x , avalie $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

39. Demonstre que $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cos \frac{2}{x} = 0$.

40. Demonstre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0$.

41-46 Encontre, quando existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

41. $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + |x - 3|)$

42. $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{2x + 12}{|x + 6|}$

43. $\lim_{x \rightarrow 0,5^-} \frac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|}$

44. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - |x|}{2 + x}$

45. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

46. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

47. A função sinal, denotada por $\operatorname{sgn} x$, é definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico dessa função.

(b) Encontre ou explique por que não existe cada um dos limites a seguir.

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn} x|$

48. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Encontre $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe?

(c) Esboce o gráfico de f .

49. Seja $g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$.

(a) Encontre

(i) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ existe?

(c) Esboce o gráfico de g .

50. Seja

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ x - 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(a) Determine as quantidades a seguir, se existirem.

(i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ (iii) $g(1)$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ (v) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ (vi) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

(b) Esboce o gráfico de g .

51. (a) Se o símbolo $\llbracket \cdot \rrbracket$ denota a função maior inteiro do Exemplo 10, calcule

(i) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \llbracket x \rrbracket$ (ii) $\lim_{x \rightarrow -2} \llbracket x \rrbracket$ (iii) $\lim_{x \rightarrow -2,4} \llbracket x \rrbracket$

(b) Se n for um inteiro, calcule

(i) $\lim_{x \rightarrow n^-} \llbracket x \rrbracket$ (ii) $\lim_{x \rightarrow n^+} \llbracket x \rrbracket$

(c) Para quais valores de a o limite $\lim_{x \rightarrow a} \llbracket x \rrbracket$ existe?

52. Seja $f(x) = \llbracket \cos x \rrbracket$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

(a) Esboce o gráfico de f .

(b) Calcule cada limite, se existir

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (ii) $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} f(x)$

(iii) $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} f(x)$ (iv) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x)$

(c) Para quais valores de a o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe?

53. Se $f(x) = \llbracket x \rrbracket + \llbracket -x \rrbracket$, mostre que existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, mas que não é igual a $f(2)$.

54. Na Teoria da Relatividade, a fórmula da contração de Lorentz

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expressa o comprimento L de um objeto como uma função de sua velocidade v em relação a um observador, onde L_0 é o comprimento do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. Encontre $\lim_{v \rightarrow c^-} L$ e interprete o resultado. Por que é necessário o limite à esquerda?

55. Se p for um polinômio, mostre que $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$.

56. Se r for uma função racional, use o Exercício 55 para mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = r(a)$ para todo número a no domínio de r .

57. Se $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, encontre $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

58. Se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 5$, encontre os seguintes limites.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

59. Se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

demonstre que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

60. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nem $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existam.

61. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nem $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existam.

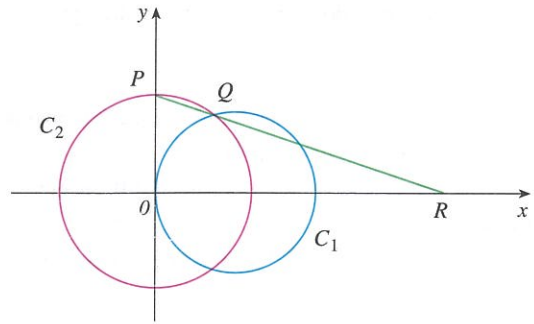
62. Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{3-x} - 1}$

63. Existe um número a tal que

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Caso exista, encontre a e o valor do limite.

64. A figura mostra um círculo fixo C_1 de equação $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e um círculo C_2 , a ser encolhido, com raio r e centro na origem. P é o ponto $(0, r)$, Q é o ponto de intersecção superior dos dois círculos, e R é o ponto de intersecção da reta PQ com o eixo x . O que acontecerá com R quando C_2 se contrair, isto é, quando $r \rightarrow 0^+$?



2.4 A Definição Precisa de um Limite

A definição intuitiva de limite dada na Seção 2.2 é inadequada para alguns propósitos, pois frases como “ x está próximo de 2” e “ $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de L ” são vagas. Para sermos capazes de demonstrar conclusivamente que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10.000} \right) = 0,0001 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

devemos tornar precisa a definição de limite.

Para chegar à definição precisa de limite, consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

É intuitivamente claro que quando x está próximo de 3, mas $x \neq 3$, então $f(x)$ está próximo de 5 e, sendo assim, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$.

Para obter informações mais detalhadas sobre como $f(x)$ varia quando x está próximo de 3, fazemos a seguinte pergunta:

Quão próximo de 3 deverá estar x para que $f(x)$ difira de 5 por menos que 0,1?

A distância de x a 3 é $|x - 3|$, e a distância de $f(x)$ a 5 é $|f(x) - 5|$, logo, nosso problema é achar um número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0,1 \quad \text{se} \quad |x - 3| < \delta \quad \text{mas } x \neq 3$$

Se $|x - 3| > 0$, então $x \neq 3$; portanto uma formulação equivalente de nosso problema é achar um número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0,1 \quad \text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta$$

Observe que, se $0 < |x - 3| < (0,1)/2 = 0,05$, então

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 2(0,05) = 0,1$$

isto é, $|f(x) - 5| < 0,1$ se $0 < |x - 3| < 0,05$

Assim, uma resposta para o problema é dada por $\delta = 0,05$; isto é, se x estiver a uma distância de no máximo 0,05 de 3, então $f(x)$ estará a uma distância de no máximo 0,1 de 5.

Se mudarmos o número 0,1 em nosso problema para o número menor 0,01, então, usando o mesmo método, achamos que $f(x)$ diferirá de 5 por menos que 0,01, desde que x difira de 3 por menos que $(0,01)/2 = 0,005$:

É costume usar a letra grega δ (delta) nessa situação.