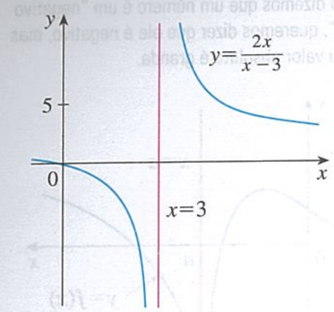


FIGURA 15

Analogamente, se x está próximo a 3 mas é menor que 3, então $x - 3$ é um número negativo pequeno, mas $2x$ ainda é um número positivo (próximo a 6). Portanto, $2x/(x - 3)$ é um número *negativo* grande. Assim,

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x - 3} = -\infty$$

O gráfico da curva $y = 2x/(x - 3)$ está dado na Figura 15. A reta $x = 3$ é uma assíntota vertical.

EXEMPLO 10 Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = \text{tg}\, x$.

SOLUÇÃO Como

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$$

existem assíntotas verticais em potencial nos pontos nos quais $\cos x = 0$. De fato, como $\cos x \to 0^+$ quando $x \to (\pi/2)^-$ e $\cos x \to 0^-$ quando $x \to (\pi/2)^+$, enquanto $\text{sen}\, x$ é positivo quando x está próximo de $\pi/2$, temos

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \text{tg}\, x = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to (\pi/2)^+} \text{tg}\, x = -\infty$$

Isso mostra que a reta $x = \pi/2$ é uma assíntota vertical. Um raciocínio similar mostra que as retas $x = (2n + 1)\pi/2$, onde n é um número inteiro, são todas assíntotas verticais de $f(x) = \text{tg}\, x$. O gráfico da Figura 16 confirma isso.

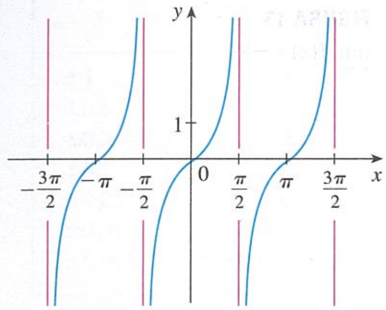


FIGURA 16
$y = \text{tg}\, x$

Outro exemplo de uma função cujo gráfico tem uma assíntota vertical é a função logaritmo natural $y = \ln x$. Da Figura 17, vemos que

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$$

e, assim, a reta $x = 0$ (o eixo y) é uma assíntota vertical. Na realidade, isso é válido para $y = \log_a x$ desde que $a > 1$. (Veja as Figuras 11 e 12 na Seção 1.6.)

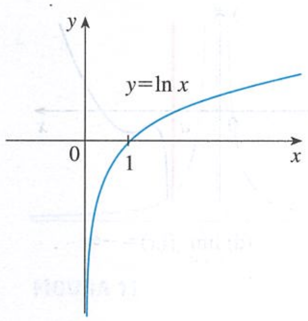


FIGURA 17
O eixo y é uma assíntota vertical da função logaritmo natural.

2.2 Exercícios

1. Explique com suas palavras o significado da equação

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique o que significa dizer que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$$

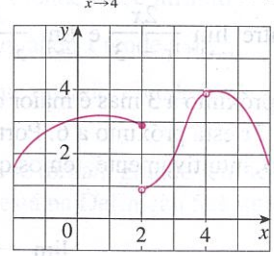
Nesta situação, é possível que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista? Explique.

3. Explique o significado de cada uma das notações a seguir.

(a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

4. Use o gráfico dado de f para dizer o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

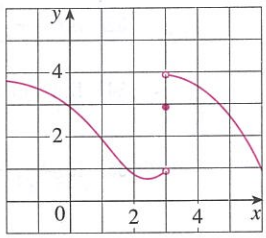
(a) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} f(x)$
(d) $f(2)$ (e) $\lim_{x \to 4} f(x)$ (f) $f(4)$



5. Para a função f, cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to 1} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 3} f(x)$ (e) $f(3)$



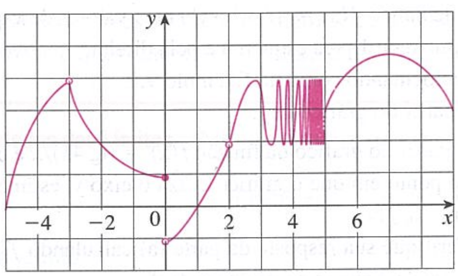
6. Para a função h cujo gráfico é dado, diga o valor da cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to -3^-} h(x)$ (b) $\lim_{x \to -3^+} h(x)$ (c) $\lim_{x \to -3} h(x)$

(d) $h(-3)$ (e) $\lim_{x \to 0^-} h(x)$ (f) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$

(g) $\lim_{x \to 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim_{x \to 2} h(x)$

(j) $h(2)$ (k) $\lim_{x \to 5^+} h(x)$ (l) $\lim_{x \to 5^-} h(x)$

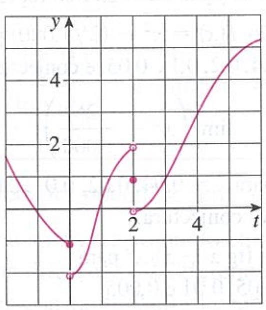


7. Para a função g cujo gráfico é dado, diga o valor da cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{t \to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t \to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t \to 0} g(t)$

(d) $\lim_{t \to 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{t \to 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{t \to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim_{t \to 4} g(t)$

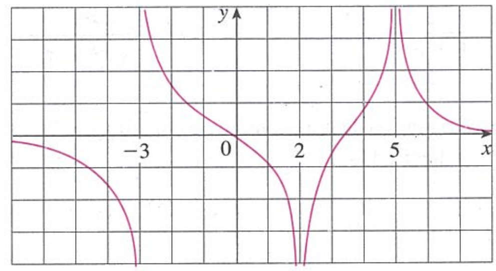


8. Para a função R, cujo gráfico é mostrado a seguir, diga quem são:

(a) $\lim_{x \to 2} R(x)$ (b) $\lim_{x \to 5} R(x)$

(c) $\lim_{x \to -3^-} R(x)$ (d) $\lim_{x \to -3^+} R(x)$

(e) As equações das assíntotas verticais.

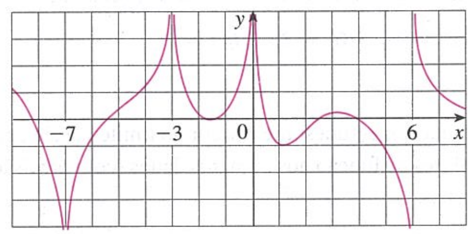


9. Para a função f cujo gráfico é mostrado a seguir, determine o seguinte:

(a) $\lim_{x \to -7} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -3} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 6^-} f(x)$ (e) $\lim_{x \to 6^+} f(x)$

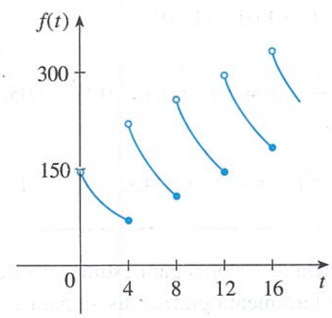
(f) As equações das assíntotas verticais.



10. Um paciente recebe uma injeção de 150 mg de uma droga a cada 4 horas. O gráfico mostra a quantidade $f(t)$ da droga na corrente sanguínea após t horas. Encontre

$$\lim_{t \to 12^-} f(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t \to 12^+} f(t)$$

e explique o significado desses limites laterais.



11–12 Esboce o gráfico da função e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x \to a} f(x)$ existe:

11. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leqslant x < 1 \\ 2 - x & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen} x & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \operatorname{sen} x & \text{se } x > \pi \end{cases}$

13–14 Use o gráfico da função f para dizer o valor de cada limite, se existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

13. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

14. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

15–18 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

15. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2, \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -2, \quad f(1) = 2$

16. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1, \quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1, \quad \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0,$
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1, \quad f(2) = 1,$ $f(0)$ não está definido

17. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4, \quad \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2, \quad \lim\limits_{x \to -2} f(x) = 2,$
$f(3) = 3, \quad f(-2) = 1$

18. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2, \quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 3,$
$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 0, \quad f(0) = 2, \quad f(4) = 1$

19–22 Faça uma conjectura sobre o valor do limite (se ele existir) por meio dos valores da função nos números dados (com precisão de seis casas decimais).

19. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$,
$x = 2{,}5, 2{,}1, 2{,}05, 2{,}01, 2{,}005, 2{,}001,$
$1{,}9, 1{,}95, 1{,}99, 1{,}995, 1{,}999$

20. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$,
$x = 0, -0{,}5, -0{,}9, -0{,}95, -0{,}99, -0{,}999,$
$-2, -1{,}5, -1{,}1, -1{,}01, -1{,}001$

21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$, $\quad x = \pm 1, \pm 0{,}5, \pm 0{,}1, \pm 0{,}05, \pm 0{,}01$

22. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x + x^2)$, $\quad x = 1, 0{,}5, 0{,}1, 0{,}05, 0{,}01, 0{,}005, 0{,}001$

23–26 Use uma tabela de valores para estimar o valor do limite. Se você tiver alguma ferramenta gráfica, use-a para confirmar seu resultado.

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$

24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } 3x}{\text{tg } 5x}$

25. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$

26. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{9^x - 5^x}{x}$

27. (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\cos 2x - \cos x)/x^2$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y, estime o valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$.
(b) Verifique sua resposta da parte (a), calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximem de 0.

28. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{\text{sen } \pi x}$$

traçando o gráfico da função $f(x) = (\text{sen } x)/(\text{sen } \pi x)$. Forneça sua resposta com precisão de duas casas decimais.
(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximem de 0.

29–37 Determine o limite infinito.

29. $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{x + 2}{x + 3}$

30. $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{x + 2}{x + 3}$

31. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2 - x}{(x - 1)^2}$

32. $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{e^x}{(x - 5)^3}$

33. $\lim\limits_{x \to 3^+} \ln(x^2 - 9)$

34. $\lim\limits_{x \to \pi^-} \cot x$

35. $\lim\limits_{x \to 2\pi^-} x \csc x$

36. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

37. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$

38. (a) Encontre as assíntotas verticais da função

$$y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$$

(b) Confirme sua resposta da parte (a) fazendo o gráfico da função.

39. Determine $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x^3 - 1}$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^3 - 1}$
(a) calculando $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para valores de x que se aproximam de 1 pela esquerda e pela direita,
(b) raciocinando como no Exemplo 9, e
(c) a partir do gráfico de f.

40. (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\text{tg } 4x)/x$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y, estime o valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$.
(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximam de 0.

41. (a) Estime o valor do limite $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$ com cinco casas decimais. Esse número lhe parece familiar?
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da função $y = (1 + x)^{1/x}$.

42. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = e^x + \ln|x - 4|$ para $0 \leqslant x \leqslant 5$. Você acha que o gráfico é uma representação precisa de f?
(b) Como você faria para que o gráfico represente melhor f?

43. (a) Avalie a função $f(x) = x^2 - (2^x/1.000)$ para $x = 1, 0{,}8, 0{,}6, 0{,}4, 0{,}2, 0{,}1$ e $0{,}05$, e conjecture qual o valor de

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1.000} \right)$$

(b) Avalie $f(x)$ para $x = 0{,}04, 0{,}02, 0{,}01, 0{,}005, 0{,}003$ e $0{,}001$. Faça uma nova conjectura.

44. (a) Avalie $h(x) = (\text{tg } x - x)/x^3$ para $x = 1, 0{,}5, 0{,}1, 0{,}05, 0{,}01$ e $0{,}005$.
(b) Estime o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x - x}{x^3}$
(c) Calcule $h(x)$ para valores sucessivamente menores de x até finalmente atingir um valor de 0 para $h(x)$. Você ainda está confiante que a conjectura em (b) está correta? Explique como finalmente obteve valores 0. (Na Seção 4.4 veremos um método para calcular esse limite.)
(d) Faça o gráfico da função h na janela retangular $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. Dê *zoom* até o ponto onde o gráfico corta o eixo y para estimar o limite de $h(x)$ quando x tende a 0. Continue

dando *zoom* até observar distorções no gráfico de h. Compare com os resultados da parte (c).

45. Faça o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(\pi/x)$ do Exemplo 4 na janela retangular $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Então dê um *zoom* em direção à origem diversas vezes. Comente o comportamento dessa função.

46. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com velocidade v é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa da partícula em repouso e c, a velocidade da luz. O que acontece se $v \to c^-$?

47. Use um gráfico para estimar as equações de todas as assíntotas verticais da curva

$$y = \text{tg}(2 \,\text{sen}\, x) \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

Encontre, então, as equações exatas dessas assíntotas.

48. (a) Use evidências numéricas e gráficas para fazer uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

(b) A que distância de 1 deverá estar x para garantir que a função da parte (a) esteja a uma distância de 0,5 de seu limite?

2.3 Cálculos Usando Propriedades dos Limites

Na Seção 2.2 empregamos gráficos e calculadoras para fazer conjecturas sobre o valor de limites, mas vimos que esses métodos nem sempre levam a respostas corretas. Nesta seção usaremos as *Propriedades dos Limites*, para calculá-los.

Propriedades dos Limites Supondo que c seja uma constante e os limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

existam, então

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$
3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$
4. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ se $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Essas cinco propriedades podem ser enunciadas da seguinte forma:

1. O limite de uma soma é a soma dos limites. — Propriedade da Soma
2. O limite de uma diferença é a diferença dos limites. — Propriedade da Diferença
3. O limite de uma constante multiplicando uma função é a constante multiplicando o limite desta função. — Propriedade da Multiplicação por Constante
4. O limite de um produto é o produto dos limites. — Propriedade do Produto
5. O limite de um quociente é o quociente dos limites (desde que o limite do denominador não seja zero). — Propriedade do Quociente

É fácil acreditar que essas propriedades são verdadeiras. Por exemplo, se $f(x)$ estiver próximo de L e $g(x)$ estiver próximo a M, é razoável concluir que $f(x) + g(x)$ está próximo a $L + M$. Isso nos dá uma base intuitiva para acreditar que a Propriedade 1 é verdadeira. Na Seção 2.4 daremos uma definição precisa de limite e a usaremos para demonstrar essa propriedade. As demonstrações das propriedades remanescentes encontram-se no Apêndice F.