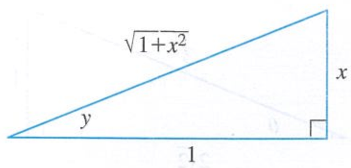


FIGURA 24

$$\sec^2 y = 1 + \mathrm{tg}^2 y = 1 + x^2$$

$$\sec y = \sqrt{1 + x^2} \quad \text{(uma vez que } \sec y > 0 \text{ para } -\pi/2 < y < \pi/2\text{)}$$

Assim,
$$\cos(\mathrm{tg}^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

SOLUÇÃO 2 Em vez de usar as identidades trigonométricas como na Solução 1, talvez seja mais fácil fazer um diagrama. Se $y = \mathrm{tg}^{-1}x$, então $\mathrm{tg}\, y = x$, e podemos concluir da Figura 24 (que ilustra o caso $y > 0$) que

$$\cos(\mathrm{tg}^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

A função inversa da tangente, $\mathrm{tg}^{-1} = \mathrm{arctg}$, tem domínio $\mathbb{R}$ e imagem $(-\pi/2, \pi/2)$. O gráfico está mostrado na Figura 25.

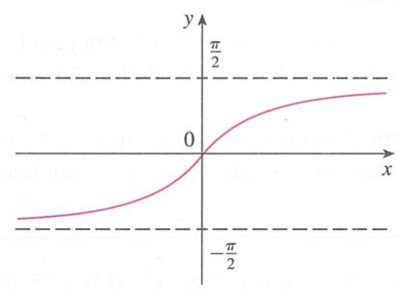


FIGURA 25
$y = \mathrm{tg}^{-1}\, x = \mathrm{arctg}\, x$

Sabemos que as retas $x = \pm\pi/2$ são assíntotas verticais do gráfico da tangente. Uma vez que o gráfico da tg^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico da função tangente restrita em torno da reta $y = x$, segue que as retas $y = \pi/2$ e $y = -\pi/2$ são assíntotas horizontais do gráfico de tg^{-1}.

As funções inversas trigonométricas restantes não são usadas com tanta frequência e estão resumidas aqui.

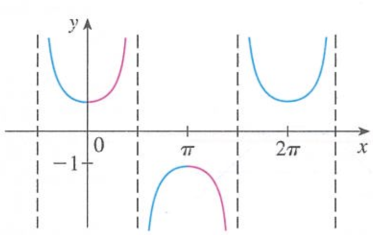


FIGURA 26
$y = \sec x$

11 $y = \mathrm{cossec}^{-1}x \; (|x| \geqslant 1) \iff \mathrm{cossec}\, y = x$ e $y \in (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2]$

$y = \sec^{-1}x \; (|x| \geqslant 1) \iff \sec y = x$ e $y \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$

$y = \mathrm{cotg}^{-1}x \; (x \in \mathbb{R}) \iff \mathrm{cotg}\, y = x$ e $y \in (0, \pi)$

A escolha dos intervalos para y nas definições de cossec^{-1} e $\sec^{-1}$ não são de aceitação universal. Por exemplo, alguns autores usam $y \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ na definição de $\sec^{-1}$. (Você pode ver do gráfico da função secante na Figura 26 que esta escolha e a feita em **11** são ambas válidas.)

1.6 Exercícios

1. (a) O que é uma função injetora?
   (b) A partir do gráfico, como dizer se uma função é injetora?
2. (a) Suponha que f seja uma função injetora com domínio A e imagem B. Como a inversa da função, f^{-1}, é definida? Qual o domínio de f^{-1}? Qual a imagem de f^{-1}?
   (b) Se for dada uma fórmula para f, como você encontrará uma fórmula para f^{-1}?
   (c) Se for dado o gráfico de f, como você encontrará o gráfico de f^{-1}?

3–14 Uma função é dada por uma tabela de valores, um gráfico, uma fórmula ou por meio de descrição verbal. Determine se f é injetora.

3.

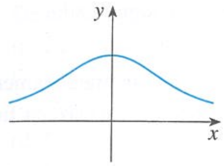
x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1,5	2,0	3,6	5,3	2,8	2,0

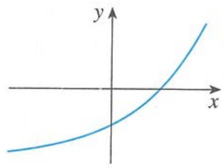
4.

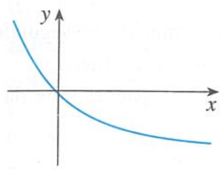
x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1,0	1,9	2,8	3,5	3,1	2,9

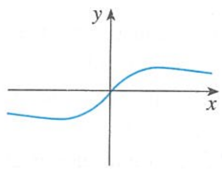
É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador SCA Sistema algébrico computacional necessário

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

5. 

6. 

7. 

8. 

9. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 5)$

10. $f(x) = 1 + 4x - x^2$

11. $g(x) = |x|$

12. $g(x) = \sqrt{x}$

13. $f(t)$ é a altura de uma bola t segundos após ser chutada.

14. $f(t)$ é a sua altura com t anos de idade.

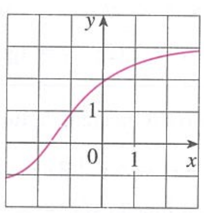
---

15. Suponha que f é uma função injetora.
(a) Se $f(6) = 17$, o que é $f^{-1}(17)$?
(b) Se $f^{-1}(3) = 2$, o que é $f(2)$?

16. Se $f(x) = x^5 + x^3 + x$, encontre $f^{-1}(3)$ e $f(f^{-1}(2))$.

17. Se $g(x) = 3 + x + e^x$, encontre $g^{-1}(4)$.

18. É dado o gráfico de f.
(a) Por que f é injetora?
(b) Determine o domínio e a imagem de f^{-1}?
(c) Qual o valor de $f^{-1}(2)$?
(d) Obtenha uma estimativa para o valor de $f^{-1}(0)$.



19. A fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, onde $F \geqslant -459{,}67$, expressa a temperatura C em graus Celsius como uma função da temperatura F em graus Fahrenheit. Encontre uma fórmula para a função inversa e interprete-a. Qual o domínio da função inversa?

20. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com velocidade v é

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa da partícula no repouso e c é a velocidade da luz no vácuo. Encontre a função inversa de f e explique seu significado.

21–26 Encontre uma fórmula para a função inversa.

21. $f(x) = 1 + \sqrt{2 + 3x}$

22. $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$

23. $f(x) = e^{2x-1}$

24. $y = x^2 - x, \quad x \geqslant \frac{1}{2}$

25. $y = \ln(x + 3)$

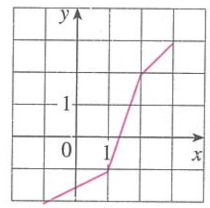
26. $y = \dfrac{e^x}{1 + 2e^x}$

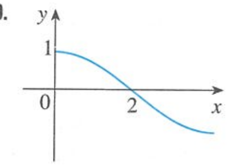
27–28 Encontre uma fórmula explícita para f^{-1} e use-a para fazer na mesma tela os gráficos de f^{-1}, f e da reta $y = x$. Para verificar seu trabalho, veja se seus gráficos de f e f^{-1} são reflexões em torno da reta.

27. $f(x) = x^4 + 1, \quad x \geqslant 0$

28. $f(x) = 2 - e^x$

29–30 Use o gráfico dado de f para esboçar o de f^{-1}.

29. 

30. 

---

31. Seja $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \ 0 \leqslant x \leqslant 1$.
(a) Encontre f^{-1}. Como está relacionada a f?
(b) Identifique o gráfico de f e explique a sua resposta para a parte (a).

32. Seja $g(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.
(a) Encontre g^{-1}. Como está relacionada a g?
(b) Faça um gráfico de g. Como você explica a sua resposta para a parte (a)?

33. (a) Como está definida a função logarítmica $y = \log_a x$?
(b) Qual o domínio dessa função?
(c) Qual a imagem dessa função?
(d) Esboce a forma geral do gráfico da função $y = \log_a x$ se $a > 1$.

34. (a) O que é o logaritmo natural?
(b) O que é o logaritmo comum?
(c) Esboce os gráficos, no mesmo sistema de coordenadas, das funções logaritmo natural e exponencial natural.

35–38 Encontre o valor exato de cada expressão.

35. (a) $\log_5 125$ (b) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$

36. (a) $\ln(1/e)$ (b) $\log_{10} \sqrt{10}$

37. (a) $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$
(b) $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

38. (a) $e^{-2 \ln 5}$ (b) $\ln\left(\ln e^{e^{10}}\right)$

39–41 Expresse a quantidade dada como um único logaritmo.

39. $\ln 5 + 5 \ln 3$

40. $\ln(a + b) + \ln(a - b) - 2 \ln c$

41. $\frac{1}{3}\ln(x + 2)^3 + \frac{1}{2}[\ln x - \ln(x^2 + 3x + 2)^2]$

---

42. Use a Fórmula 10 para calcular cada logaritmo com precisão até a sexta casa decimal.
(a) $\log_{12} 10$ (b) $\log_2 8{,}4$

43–44 Use a Fórmula 10 para fazer o gráfico das funções dadas em uma mesma tela. Como esses gráficos estão relacionados?

43. $y = \log_{1,5} x, \quad y = \ln x, \quad y = \log_{10} x, \quad y = \log_{50} x$

44. $y = \ln x, \quad y = \log_{10} x, \quad y = e^x, \quad y = 10^x$

---

45. Suponha que o gráfico de $y = \log_2 x$ seja feito sobre uma malha coordenada onde a unidade de comprimento seja 1 centímetro. Quantos quilômetros à direita da origem devemos percorrer antes de a altura da curva atingir 1 m?

46. Compare as funções $f(x) = x^{0,1}$ e $g(x) = \ln x$ traçando os gráficos de f e g em várias janelas retangulares. Quando finalmente o gráfico de f ultrapassa o de g?

47–48 Faça o esboço do gráfico de cada função. Não use a calculadora. Use somente os gráficos dados nas Figuras 12 e 13 e, se necessário, as transformações da Seção 1.3.

47. (a) $y = \log_{10}(x + 5)$ (b) $y = -\ln x$

48. (a) $y = \ln(-x)$ (b) $y = \ln |x|$

49–50 (a) Quais são o domínio e a imagem de f?
(b) Qual é a intersecção com o eixo x do gráfico de f?
(c) Esboce o gráfico de f.

49. $f(x) = \ln x + 2$ **50.** $f(x) = \ln(x - 1) - 1$

51–54 Resolva cada equação em x.

51. (a) $2 \ln x = 1$ (b) $e^{-x} = 5$

52. (a) $e^{2x+3} - 7 = 0$ (b) $\ln(5 - 2x) = -3$

53. (a) $2^{x-5} = 3$ (b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

54. (a) $\ln(\ln x) = 1$ (b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, onde $a \neq b$

55–56 Resolva cada inequação em x.

55. (a) $\ln x < 0$ (b) $e^x > 5$

56. (a) $1 < e^{3x-1} < 2$ (b) $1 - 2 \ln x < 3$

57. (a) Encontre o domínio de $f(x) = \ln(e^x - 3)$.
(b) Encontre f^{-1} e seu domínio.

58. (a) Quais são os valores de $e^{\ln 300}$ e $\ln(e^{300})$?
(b) Utilize a sua calculadora para calcular $e^{\ln 300}$ e $\ln(e^{300})$. O que você observa? Você pode explicar por que a calculadora encontra dificuldade?

SCA **59.** Faça o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ e explique por que ela é injetora. Use então um sistema de computação algébrica (SCA) para encontrar uma expressão explícita para $f^{-1}(x)$. (Seu SCA vai produzir três expressões possíveis. Explique por que duas delas são irrelevantes neste contexto.)

SCA **60.** (a) Se $g(x) = x^6 + x^4, x \geqslant 0$, use um sistema de computação algébrica para encontrar uma expressão para $g^{-1}(x)$.
(b) Use a expressão da parte (a) para fazer na mesma tela um gráfico de $y = g(x)$, $y = x$ e $y = g^{-1}(x)$.

61. Se a população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas, então o número de bactérias após t horas é $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$. (Veja o Exercício 29 na Seção 1.5.)
(a) Encontre a função inversa e explique seu significado.
(b) Quando a população atingirá 50 000 bactérias?

62. Após acionado o *flash* de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do *flash*, que armazena uma carga elétrica dada por

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a}).$$

(A capacidade máxima de carga é Q_0, e t é medido em segundos.)
(a) Encontre a função inversa e explique seu significado.
(b) Quanto tempo levará para recarregar o capacitor 90% da capacidade, se $a = 2$?

63–68 Encontre o valor exato de cada expressão.

63. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$ (b) $\cos^{-1}(-1)$

64. (a) $\operatorname{tg}^{-1}(1/\sqrt{3})$ (b) $\sec^{-1} 2$

65. (a) $\operatorname{arctg} 1$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(1/\sqrt{2})$

66. (a) $\operatorname{cotg}^{-1}(-\sqrt{3})$ (b) $\arccos(-\frac{1}{2})$

67. (a) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 10)$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(7\pi/3))$

68. (a) $\operatorname{tg}(\sec^{-1} 4)$ (b) $\operatorname{sen}(2 \operatorname{sen}^{-1}(\frac{3}{5}))$

69. Demonstre que $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$.

70–72 Simplifique a expressão.

70. $\operatorname{tg}(\operatorname{sen}^{-1}x)$ **71.** $\operatorname{sen}(\operatorname{tg}^{-1}x)$

72. $\cos(2 \operatorname{tg}^{-1}x)$

73–74 Obtenha os gráficos das funções dadas em uma mesma tela. Como esses gráficos estão relacionados?

73. $y = \operatorname{sen} x, \ -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2; \quad y = \operatorname{sen}^{-1}x; \quad y = x$

74. $y = \operatorname{tg} x, \ -\pi/2 < x < \pi/2; \quad y = \operatorname{tg}^{-1}x; \quad y = x$

75. Determine o domínio e a imagem da função

$$g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(3x + 1)$$

76. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}x)$ e explique sua aparência.
(b) Faça o gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$. Como você pode explicar a aparência desse gráfico?

77. (a) Se transladamos uma curva para a esquerda, o que acontece com sua reflexão em torno da reta $y = x$? Em vista deste princípio geométrico, encontre uma expressão para a inversa de $g(x) = f(x + c)$, em que f é uma função injetora.
(b) Encontre uma expressão para a inversa de $h(x) = f(cx)$, em que $c \neq 0$.

1 Revisão

Verificação de Conceitos

1. (a) O que é uma função? O que são o domínio e a imagem de uma função?
(b) O que é o gráfico de uma função?
(c) Como podemos dizer se uma dada curva é o gráfico de uma função?

2. Discuta as quatro maneiras de representar uma função. Ilustre com exemplos.

3. (a) O que é uma função par? Como saber, a partir do gráfico, se uma função é par ou não? Dê três exemplos de uma função par.
(b) O que é uma função ímpar? Como saber, a partir do gráfico, se uma função é ímpar ou não? Dê três exemplos de uma função ímpar.

4. O que é uma função crescente?

5. O que é um modelo matemático?

6. Dê um exemplo de cada tipo de função.
(a) Função linear
(b) Função potência
(c) Função exponencial
(d) Função quadrática
(e) Função polinomial de grau 5
(f) Função racional

7. Esboce à mão no mesmo sistema de coordenadas os gráficos das seguintes funções.
(a) $f(x) = x$ (b) $g(x) = x^2$
(c) $h(x) = x^3$ (d) $j(x) = x^4$

8. Esboce à mão o gráfico de cada função.
(a) $y = \operatorname{sen} x$ (b) $y = \operatorname{tg} x$
(c) $y = e^x$ (d) $y = \ln x$
(e) $y = 1/x$ (f) $y = |x|$
(g) $y = \sqrt{x}$ (h) $y = \operatorname{tg}^{-1} x$

9. Suponha que os domínios de f tem domínio A e g, respectivamente B.
(a) Qual o domínio de $f + g$?
(b) Qual o domínio de fg?
(c) Qual o domínio de f/g?

10. Como é definida a função composta $f \circ g$? Qual seu domínio?

11. Suponha que seja dado o gráfico de f. Escreva a equação para cada um dos seguintes gráficos obtidos a partir do gráfico de f:
(a) Deslocado 2 unidades para cima.
(b) Deslocado 2 unidades para baixo.
(c) Deslocado 2 unidades para a direita.
(d) Deslocado 2 unidades para a esquerda.
(e) Refletido em torno do eixo x.
(f) Refletido em torno do eixo y.
(g) Expandido verticalmente por um fator de 2.
(h) Contraído verticalmente por um fator de 2.
(i) Expandido horizontalmente por um fator de 2.
(j) Contraído horizontalmente por um fator de 2.

12. (a) O que é uma função injetora? Como decidir, a partir de seu gráfico, se uma função é injetora?
(b) Se f é uma função injetora, como é definida a função inversa f^{-1}? Como obter o gráfico f^{-1} do gráfico de f?

13. (a) Como a inversa da função seno $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$ é definida? Qual é o seu domínio e qual é a sua imagem?
(b) Como a inversa da função cosseno $f(x) = \cos^{-1} x$ é definida? Qual é o seu domínio e qual é a sua imagem?
(c) Como a inversa da função tangente $f(x) = \operatorname{tg}^{-1} x$ é definida? Qual é o seu domínio e qual é a sua imagem?

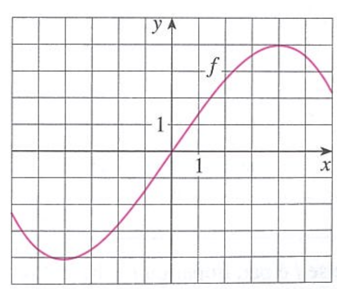
Testes Verdadeiro-Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

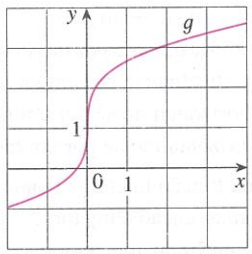
1. Se f é uma função, então $f(s + t) = f(s) + f(t)$.
2. Se $f(s) = f(t)$, então $s = t$.
3. Se f é uma função, então $f(3x) = 3f(x)$.
4. Se $x_1 < x_2$ e f for uma função decrescente, então $f(x_1) > f(x_2)$.
5. Uma reta vertical intercepta o gráfico de uma função no máximo uma vez.
6. Se f e g são funções, então $f \circ g = g \circ f$.
7. Se f for injetora, então $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
8. É sempre possível dividir por e^x.
9. Se $0 < a < b$, então $\ln a < \ln b$.
10. Se $x > 0$, então $(\ln x)^6 = 6 \ln x$.
11. Se $x > 0$ e $a > 1$, então $\dfrac{\ln x}{\ln a} = \ln \dfrac{x}{a}$.
12. $\operatorname{tg}^{-1}(-1) = 3\pi/4$
13. $\operatorname{tg}^{-1} x = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\cos^{-1} x}$
14. Se x for qualquer número real, então $\sqrt{x^2} = x$.

Exercícios

1. Seja f a função cujo gráfico é dado.
(a) Estime o valor de $f(2)$.
(b) Estime os valores de x tais que $f(x) = 3$.
(c) Diga qual é o domínio de f.
(d) Diga qual é a imagem de f.
(e) Em qual intervalo a função f é crescente?
(f) f é injetora? Explique.
(g) f é par, ímpar ou nenhum dos dois? Explique.



2. É dado o gráfico de g.
(a) Diga o valor de $g(2)$.
(b) Por que g é injetora?
(c) Estime o valor de $g^{-1}(2)$.
(d) Estime o domínio de g^{-1}.
(e) Esboce o gráfico de g^{-1}.



3. Se $f(x) = x^2 - 2x + 3$, calcule o quociente das diferenças

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

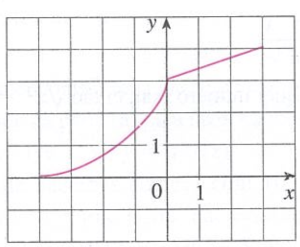
4. Esboce o gráfico do rendimento de uma colheita como uma função da quantidade usada de fertilizante.

5–8 Encontre o domínio e a imagem das funções. Escreva sua resposta usando a notação de intervalos.

5. $f(x) = 2/(3x - 1)$
6. $g(x) = \sqrt{16 - x^4}$
7. $h(x) = \ln(x + 6)$
8. $F(t) = 3 + \cos 2t$

9. Suponha que seja dado o gráfico de f. Descreva como os gráficos das seguintes funções podem ser obtidos a partir do gráfico de f.
(a) $y = f(x) + 8$
(b) $y = f(x + 8)$
(c) $y = 1 + 2f(x)$
(d) $y = f(x - 2) - 2$
(e) $y = -f(x)$
(f) $y = f^{-1}(x)$

10. É dado o gráfico de f. Esboce os gráficos das seguintes funções:
(a) $y = f(x - 8)$
(b) $y = -f(x)$
(c) $y = 2 - f(x)$
(d) $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$
(e) $y = f^{-1}(x)$
(f) $y = f^{-1}(x + 3)$



11–16 Use transformações para esboçar o gráfico da função.

11. $y = -\operatorname{sen} 2x$
12. $y = 3\ln(x - 2)$
13. $y = \frac{1}{2}(1 + e^x)$
14. $y = 2 - \sqrt{x}$
15. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$
16. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$

17. Determine se f é par, ímpar ou nenhum dos dois.
(a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$
(b) $f(x) = x^3 - x^7$
(c) $f(x) = e^{-x^2}$
(d) $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$

18. Encontre uma expressão para a função cujo gráfico consiste no segmento de reta ligando o ponto $(-2, 2)$ ao ponto $(-1, 0)$ junto com a parte de cima do círculo com centro na origem e raio 1.

19. Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2 - 9$, encontre as funções (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$ e (d) $g \circ g$ e seus domínios.

20. Expresse a função $F(x) = 1/\sqrt{x + \sqrt{x}}$ como uma composição de três funções.

21. A tabela mostra a população da Indonésia, em milhões, entre os anos de 1950 a 2000. Decida que tipo de modelo é adequado e use-o para prever a população da Indonésia em 2010.

Ano	População	Ano	População
1950	80	1980	150
1955	86	1985	166
1960	96	1990	182
1965	107	1995	197
1970	120	2000	212
1975	134		

22. Um pequeno fabricante descobre que custa \$ 9.000 para produzir 1.000 torradeiras elétricas em uma semana e \$ 12.000 para produzir 1.500 torradeiras em uma semana.
(a) Expresse o custo como uma função do número de torradeiras produzidas, supondo que ele é linear. A seguir, esboce o gráfico.
(b) Qual a inclinação do gráfico e o que ela representa?
(c) Qual a intersecção do gráfico com o eixo y e o que ela representa?

23. Se $f(x) = 2x + \ln x$, encontre $f^{-1}(2)$.

24. Encontre a função inversa de $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 1}$.

25. Encontre o valor exato de cada expressão.
(a) $e^{2\ln 3}$
(b) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$
(c) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2}\right)$
(d) $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

26. Resolva cada equação em x.
(a) $e^x = 5$
(b) $\ln x = 2$
(c) $e^{e^x} = 2$
(d) $\operatorname{tg}^{-1} x = 1$

27. A população de uma certa espécie em um ambiente limitado, com população inicial igual a 100 e capacidade para comportar 1 000 indivíduos, é

$$P(t) = \frac{100\,000}{100 + 900e^{-t}}$$

onde t é medido em anos.
(a) Faça o gráfico dessa função e estime quanto tempo levará para a população atingir 900 indivíduos.
(b) Encontre a inversa dessa função e explique seu significado.
(c) Use a função inversa para encontrar o tempo necessário para a população atingir 900 indivíduos. Compare com os resultados da parte (a).

28. Faça o gráfico das três funções $y = x^a$, $y = a^x$ e $y = \log_a x$ na mesma tela para dois ou três valores de $a > 1$. Para grandes valores de x, quais dessas funções terão os maiores valores e quais terão os menores valores?