

FIGURA 14

A que distância à direita da origem você estará quando o gráfico de  $y = e^x$  ultrapassar 1 milhão? O próximo exemplo mostra a rapidez do crescimento dessa função, dando uma resposta a essa pergunta que poderá surpreendê-lo.

**EXEMPLO 4** Use uma ferramenta gráfica para encontrar os valores de  $x$  para os quais  $e^x > 1\,000\,000$ .

**SOLUÇÃO** Na Figura 15 fizemos os gráficos da função  $y = e^x$  e da reta horizontal  $y = 1\,000\,000$ . Vemos que essas curvas se interceptam quando  $x \approx 13,8$ . Assim,  $e^x > 10^6$  quando  $x > 13,8$ . Talvez seja surpreendente que os valores da função exponencial já ultrapassem 1 milhão quando  $x$  é somente 14.

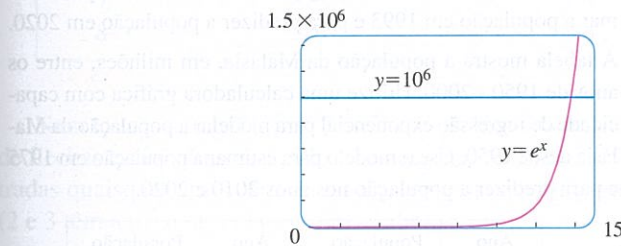


FIGURA 15

## 1.5 Exercícios

1-4 Utilize a Propriedade dos Exponentes para reescrever e simplificar a expressão.

- (a)  $\frac{4^{-3}}{2^{-8}}$  (b)  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$
- (a)  $8^{4/3}$  (b)  $x(3x^2)^3$
- (a)  $b^8(2b)^4$  (b)  $\frac{(6y^3)^4}{2y^5}$
- (a)  $\frac{x^{2n} \cdot x^{3n-1}}{x^{n+2}}$  (b)  $\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt[3]{ab}}$

- (a) Escreva uma equação que defina a função exponencial com base  $a > 0$ .  
 (b) Qual o domínio dessa função?  
 (c) Se  $a \neq 1$ , qual a imagem dessa função?  
 (d) Esboce a forma geral do gráfico da função exponencial nos seguintes casos.

- (i)  $a > 1$  (ii)  $a = 1$  (iii)  $0 < a < 1$

- (a) Como é definido o número  $e$ ?  
 (b) Qual o valor aproximado de  $e$ ?  
 (c) Qual a função exponencial natural?

**7-10** Faça em uma mesma tela os gráficos das funções dadas. Como esses gráficos estão relacionados?

- $y = 2^x, y = e^x, y = 5^x, y = 20^x$
- $y = e^x, y = e^{-x}, y = 8^x, y = 8^{-x}$
- $y = 3^x, y = 10^x, y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$
- $y = 0,9^x, y = 0,6^x, y = 0,3^x, y = 0,1^x$

**11-16** Faça um esboço do gráfico de cada função. Não use a calculadora. Use somente os gráficos dados nas Figuras 3 e 13 e, se necessário, as transformações da Seção 1.3.

- $y = 10^{x+2}$
- $y = (0,5)^x - 2$

13.  $y = -2^{-x}$

14.  $y = e^{|x|}$

15.  $y = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$

16.  $y = 2(1 - e^x)$

17. Começando com o gráfico de  $y = e^x$ , escreva as equações correspondentes aos gráficos que resultam ao

- deslocar 2 unidades para baixo
- deslocar 2 unidades para a direita
- refletir em torno do eixo  $x$
- refletir em torno do eixo  $y$
- refletir em torno do eixo  $x$  e, depois, do eixo  $y$

18. Começando com o gráfico de  $y = e^x$ , encontre as equações dos gráficos que resultam ao

- refletir em torno da reta  $y = 4$
- refletir em torno da reta  $x = 2$

19–20 Encontre o domínio de cada função.

19. (a)  $f(x) = \frac{1 - e^{x^2}}{1 - e^{1-x^2}}$

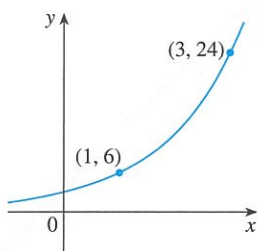
(b)  $f(x) = \frac{1 + x}{e^{\cos x}}$

20. (a)  $g(t) = \sin(e^{-t})$

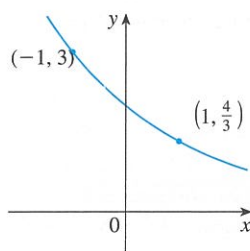
(b)  $g(t) = \sqrt{1 - 2^t}$

21–22 Encontre a função exponencial  $f(x) = Ca^x$  cujo gráfico é dado.

21.



22.



23. Se  $f(x) = 5^x$ , mostre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5^x \left( \frac{5^h - 1}{h} \right)$$

24. Suponha que você receba uma oferta para trabalhar por apenas um mês. Qual das seguintes formas de pagamento você prefere?

- Um milhão de dólares no fim do mês.
- Um centavo de dólar no primeiro dia do mês, dois centavos no segundo dia, quatro centavos no terceiro dia, e, em geral,  $2^{n-1}$  centavos de dólar no  $n$ -ésimo dia.

25. Suponha que os gráficos de  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = 2^x$  sejam feitos sobre uma malha coordenada onde a unidade de comprimento seja 1 centímetro. Mostre que, a uma distância de 1 m à direita da origem, a altura do gráfico de  $f$  é 100 m, mas a altura do gráfico de  $g$  é maior que 10<sup>25</sup> km.

26. Compare as funções  $f(x) = x^5$  e  $g(x) = 5^x$  por meio de seus gráficos em várias janelas retangulares. Encontre todos os pontos de

intersecção dos gráficos corretos até uma casa decimal. Para grandes valores de  $x$ , qual função cresce mais rapidamente?

27. Compare as funções  $f(x) = x^{10}$  e  $g(x) = e^x$  traçando os gráficos de  $f$  e  $g$  em várias janelas retangulares. Quando finalmente o gráfico de  $g$  ultrapassa o de  $f$ ?

28. Use um gráfico para estimar os valores de  $x$  tais que  $e^x > 1\,000\,000\,000$ .

29. Sob condições ideais sabe-se que uma certa população de bactérias dobra a cada 3 horas. Supondo que inicialmente existam 100 bactérias:

- Qual o tamanho da população após 15 horas?
- Qual o tamanho da população após  $t$  horas?
- Qual o tamanho da população após 20 horas?

30. Trace o gráfico da função população e estime o tempo para a população atingir 50 000 bactérias.

31. Uma cultura de bactérias começa com 500 indivíduos e dobra de tamanho a cada meia hora.

- Quantas bactérias existem após 3 horas?
- Quantas bactérias existem após  $t$  horas?
- Quantas bactérias existem após 40 minutos?

32. Trace o gráfico da função população e estime o tempo para a população atingir 100 000 bactérias.

33. Utilize uma calculadora gráfica com capacidade para regressão exponencial para modelar a população mundial com os dados de 1950 a 2000 da Tabela 1 da página 51. Use o modelo para estimar a população em 1993 e para prever a população em 2020.

34. A tabela mostra a população da Malásia, em milhões, entre os anos de 1950 - 2000. Utilize uma calculadora gráfica com capacidade de regressão exponencial para modelar a população da Malásia desde 1950. Use o modelo para estimar a população em 1975 e para prever a população nos anos 2010 e 2020.

Ano	População	Ano	População
1950	6,1	1980	13,8
1955	7,0	1985	15,7
1960	8,1	1990	17,8
1965	9,5	1995	20,4
1970	10,9	2000	23,0
1975	12,3		

35. Se você traçar o gráfico da função

$$f(x) = \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

você verá que  $f$  parece ser uma função ímpar. Demonstre isso.

36. Trace o gráfico de diversos membros da família de funções

$$f(x) = \frac{1}{1 + ae^{bx}}$$

onde  $a > 0$ . Como o gráfico muda conforme  $b$  varia? Como ele muda conforme  $a$  varia?