EXEMPLO 7 Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encontre cada uma das funções e seus domínios.

(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $f \circ f$ (d) $g \circ g$

SOLUÇÃO

(a) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{2 - x}) = \sqrt{\sqrt{2 - x}} = \sqrt[4]{2 - x}$$

O domínio de $f \circ g$ é $\{x \mid 2 - x \geqslant 0\} = \{x \mid x \leqslant 2\} = (-\infty, 2]$.

(b) $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

Se $0 \leqslant a \leqslant b$, então $a^2 \leqslant b^2$.

Para $\sqrt{x}$ estar definida, devemos ter $x \geqslant 0$. Para $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ estar definida, devemos ter $2 - \sqrt{x} \geqslant 0$, isto é, $\sqrt{x} \leqslant 2$, ou $x \leqslant 4$. Assim, temos $0 \leqslant x \leqslant 4$, e o domínio de $g \circ f$ é o intervalo fechado $[0, 4]$.

(c) $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

O domínio de $f \circ f$ é $[0, \infty)$.

(d) $$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{2 - x}) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$$

Para essa expressão estar definida, $2 - x \geqslant 0$ e $2 - \sqrt{2 - x} \geqslant 0$. A primeira desigualdade significa que $x \leqslant 2$, e a segunda é equivalente a $\sqrt{2 - x} \leqslant 2$, ou $2 - x \leqslant 4$, ou $x \geqslant -2$. Assim, $-2 \leqslant x \leqslant 2$, logo, o domínio de $g \circ g$ é o intervalo fechado $[-2, 2]$.

É possível fazer a composição de três ou mais funções. Por exemplo, a função composta $f \circ g \circ h$ pode ser encontrada calculando-se primeiro h, então g e depois f, como a seguir:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))).$$

EXEMPLO 8 Encontre $f \circ g \circ h$ se $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ e $h(x) = x + 3$.

SOLUÇÃO
$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 3)) \\ &= f((x + 3)^{10}) = \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1}\end{aligned}$$

Até aqui usamos a composição para construir funções complicadas a partir das mais simples. Mas, em cálculo, é frequentemente útil *decompor* uma função complicada em outras mais simples, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 9 Dada $F(x) = \cos^2(x + 9)$, encontre as funções f, g e h tal que $F = f \circ g \circ h$.

SOLUÇÃO Uma vez que $F(x) = [\cos(x + 9)]^2$, a fórmula para F diz: primeiro adicione 9, então tomemos o cosseno do resultado e, finalmente, o quadrado. Assim, fazemos

$$h(x) = x + 9 \qquad g(x) = \cos x \qquad f(x) = x^2$$

Então
$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 9)) = f(\cos(x + 9)) \\ &= [\cos(x + 9)]^2 = F(x).\end{aligned}$$

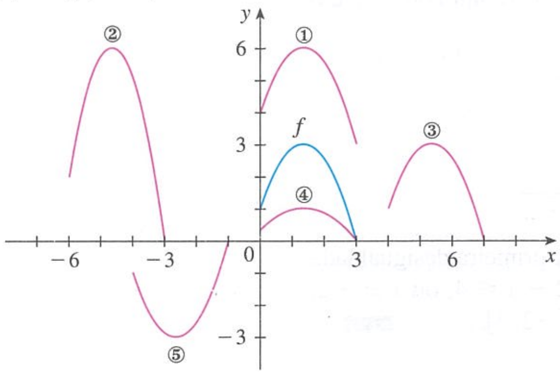
1.3 Exercícios

1. Suponha que seja dado o gráfico de f. Escreva as equações para os gráficos obtidos a partir do gráfico de f da seginte forma:
   (a) Desloque 3 unidades para cima.
   (b) Desloque 3 unidades para baixo.
   (c) Desloque 3 unidades para a direita.
   (d) Desloque 3 unidades para a esquerda.
   (e) Reflita em torno do eixo x.
   (f) Reflita em torno do eixo y.

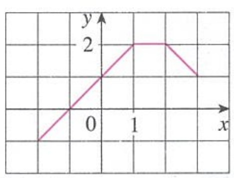
(g) Expanda verticalmente por um fator de 3.
(h) Comprima verticalmente por um fator de 3.

2. Explique como obter, a partir do gráfico de $y = f(x)$, os gráficos a seguir:
(a) $y = f(x) + 8$ (b) $y = f(x + 8)$
(c) $y = 8f(x)$ (d) $y = f(8x)$
(e) $y = -f(x) - 1$ (f) $y = 8f(\frac{1}{8}x)$

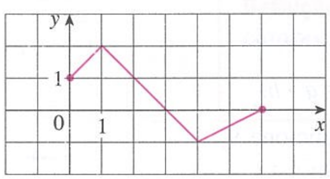
3. Dado o gráfico de $y = f(x)$, associe cada equação com seu gráfico e justifique suas escolhas.
(a) $y = f(x - 4)$ (b) $y = f(x) + 3$
(c) $y = \frac{1}{3}f(x)$ (d) $y = -f(x + 4)$
(e) $y = 2f(x + 6)$



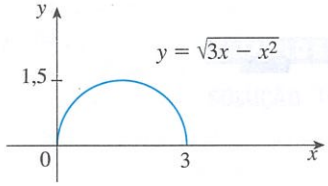
4. É dado o gráfico de f. Esboce os gráficos das seguintes funções:
(a) $y = f(x) - 2$ (b) $y = f(x - 2)$
(c) $y = -2f(x)$ (d) $y = f(\frac{1}{3}x) + 1$



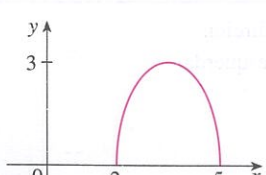
5. O gráfico de f é dado. Use-o para fazer o gráfico das seguintes funções:
(a) $y = f(2x)$ (b) $y = f(\frac{1}{2}x)$
(c) $y = f(-x)$ (d) $y = -f(-x)$



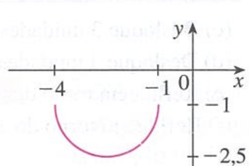
6–7 O gráfico de $y = \sqrt{3x - x^2}$ é dado. Use transformações para criar a função cujo gráfico é mostrado.



6.



7.



8. (a) Como estão relacionados o gráfico de $y = 2 \operatorname{sen} x$ e o de $y = \operatorname{sen} x$? Use sua resposta e a Figura 6 para esboçar o gráfico de $y = 2 \operatorname{sen} x$.
(b) Como estão relacionados o gráfico de $y = 1 + \sqrt{x}$ e o de $y = \sqrt{x}$? Utilize sua resposta e a Figura 4(a) para esboçar o gráfico de $y = 1 + \sqrt{x}$.

9–24 Faça o gráfico de cada função, sem marcar pontos, mas começando com o gráfico de uma das funções básicas dadas na Seção 1.2 e então aplicando as transformações apropriadas.

9. $y = \dfrac{1}{x + 2}$ **10.** $y = (x - 1)^3$

11. $y = -\sqrt[3]{x}$ **12.** $y = x^2 + 6x + 4$

13. $y = \sqrt{x - 2} - 1$ **14.** $y = 4 \operatorname{sen} 3x$

15. $y = \operatorname{sen}(\frac{1}{2}x)$ **16.** $y = \dfrac{2}{x} - 2$

17. $y = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$ **18.** $y = 1 - 2\sqrt{x + 3}$

19. $y = 1 - 2x - x^2$ **20.** $y = |x| - 2$

21. $y = |x - 2|$ **22.** $y = \dfrac{1}{4} \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

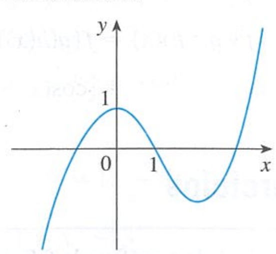
23. $y = |\sqrt{x} - 1|$ **24.** $y = |\cos \pi x|$

25. A cidade de Nova Delhi, na Índia, está localizada a uma latitude de 30 ºN. Use a Figura 9 para encontrar uma função que modele o número de horas de luz solar em Nova Delhi como uma função da época do ano. Para verificar a precisão do seu modelo, use o fato de que nessa cidade, em 31 de março, o Sol surge às 6h13 da manhã e se põe às 18h39.

26. Uma estrela variável é aquela cujo brilho alternadamente cresce e decresce. Para a estrela variável mais visível, Delta Cephei, o período de tempo entre os brilhos máximos é de 5,4 dias, o brilho médio (ou magnitude) da estrela é 4,0, e seu brilho varia de $\pm 0{,}35$ em magnitude. Encontre uma função que modele o brilho de Delta Cephei como uma função do tempo.

27. (a) Como estão relacionados o gráfico de $y = f(|x|)$ e o de f?
(b) Esboce o gráfico de $y = \operatorname{sen} |x|$.
(c) Esboce o gráfico de $y = \sqrt{|x|}$.

28. Use o gráfico dado de f para esboçar o gráfico $y = 1/f(x)$. Quais aspectos de f são os mais importantes no esboço de $y = 1/f(x)$? Explique como eles são usados.



29–30 Encontre (a) $f + g$, (b) $f - g$, (c) fg e (d) f/g e defina seus domínios.

29. $f(x) = x^3 + 2x^2$, $g(x) = 3x^2 - 1$

30. $f(x) = \sqrt{3 - x}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

31–36 Encontre as funções (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$ e (d) $g \circ g$ e seus domínios.

31. $f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 1$

32. $f(x) = x - 2, \quad g(x) = x^2 + 3x + 4$

33. $f(x) = 1 - 3x, \quad g(x) = \cos x$

34. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$

35. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}$

36. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}, \quad g(x) = \operatorname{sen} 2x$

37–40 Encontre $f \circ g \circ h$.

37. $f(x) = 3x - 2, \quad g(x) = \operatorname{sen} x, \quad h(x) = x^2$

38. $f(x) = |x - 4|, \quad g(x) = 2^x, \quad h(x) = \sqrt{x}$

39. $f(x) = \sqrt{x - 3}, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x^3 + 2$

40. $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad g(x) = \dfrac{x}{x - 1}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}$

41–46 Expresse a função na forma $f \circ g$.

41. $F(x) = (2x + x^2)^4$

42. $F(x) = \cos^2 x$

43. $F(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

44. $G(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{1 + x}}$

45. $v(t) = \sec(t^2)\operatorname{tg}(t^2)$

46. $u(t) = \dfrac{\operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t}$

47–49 Expresse a função na forma $f \circ g \circ h$.

47. $R(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1}$

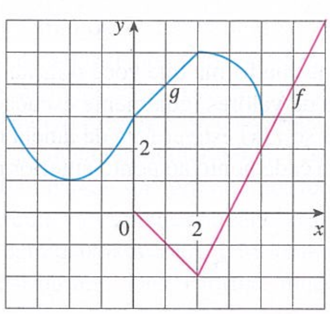
48. $H(x) = \sqrt[8]{2 + |x|}$

49. $H(x) = \sec^4(\sqrt{x})$

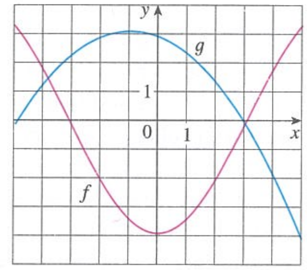
50. Use a tabela para determinar o valor de cada expressão.
(a) $f(g(1))$ (b) $g(f(1))$ (c) $f(f(1))$
(d) $g(g(1))$ (e) $(g \circ f)(3)$ (f) $(f \circ g)(6)$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

51. Use os gráficos dados de f e g para determinar o valor de cada uma das expressões ou explique por que elas não estão definidas.
(a) $f(g(2))$ (b) $g(f(0))$ (c) $(f \circ g)(0)$
(d) $(g \circ f)(6)$ (e) $(g \circ g)(-2)$ (f) $(f \circ f)(4)$



52. Use os gráficos dados de f e g para estimar o valor de $f(g(x))$ para $x = -5, -4, -3, \ldots, 5$. Use essas estimativas para esboçar o gráfico de $f \circ g$.



53. A queda de uma pedra em um lago gera ondas circulares que se espalham a uma velocidade de 60 cm/s.
(a) Expresse o raio r desse círculo como uma função do tempo t (em segundos).
(b) Se A é a área do círculo como uma função do raio, encontre $A \circ r$ e interprete-a.

54. Um balão esférico é inflado e seu raio aumenta a uma taxa de 2 cm/s.
(a) Expresse o raio r do balão como uma função do tempo t (em segundos).
(b) Se V for o volume do balão como função do raio, encontre $V \circ r$ e interprete-a.

55. Um navio se move a uma velocidade de 30 km/h paralelo a uma costa retilínea. O navio está a 6 km da costa e passa por um farol ao meio-dia.
(a) Expresse a distância s entre o farol e o navio como uma função de d, a distância que o navio percorreu desde o meio-dia; ou seja, encontre f tal que $s = f(d)$.
(b) Expresse d como uma função de t, o tempo decorrido desde o meio-dia; ou seja, encontre g tal que $d = g(t)$.
(c) Encontre $f \circ g$. O que esta função representa?

56. Um avião voa a uma velocidade de 350 km/h, a uma altitude de 1 km e passa diretamente sobre uma estação de radar no instante $t = 0$.
(a) Expresse a distância horizontal de voo d (em quilômetros) como uma função de t.
(b) Expresse a distância s entre o avião e a estação de radar como uma função de d.
(c) Use composição para expressar s como uma função de t.

57. A **função de Heaviside** H é definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Essa função é usada no estudo de circuitos elétricos para representar o surgimento repentino de corrente elétrica, ou voltagem, quando uma chave é instantaneamente ligada.
(a) Esboce o gráfico da função de Heaviside.
(b) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ no circuito se uma chave for ligada no instante $t = 0$ e 120 volts forem aplicados instantaneamente no circuito. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$.
(c) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ em um circuito quando é ligada uma chave em $t = 5$ segundos e 240 volts são aplicados instantaneamente no circuito. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$. (Observe que começar em $t = 5$ corresponde a uma translação.)

58. A função de Heaviside definida no Exercício 57 pode também ser usada para definir uma **função rampa** $y = ctH(t)$, que representa o crescimento gradual na voltagem ou corrente no circuito.
(a) Esboce o gráfico da função rampa $y = tH(t)$.
(b) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ no circuito se uma chave for ligada no instante $t = 0$ e a voltagem crescer gradualmente até 120 volts em um intervalo de 60 segundos. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$ para $t \leqslant 60$.
(c) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ em um circuito se em $t = 7s$ for ligada uma chave e a voltagem crescer gradualmente até 100 volts em um período de 25 segundos. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$ para $t \leqslant 32$.

59. Sejam f e g funções lineares com equações $f(x) = m_1x + b_1$ e $g(x) = m_2x + b_2$. A função $f \circ g$ também é linear? Em caso afirmativo, qual é a inclinação de seu gráfico?

60. Se você investir x dólares a 4% de juros capitalizados anualmente, então o valor $A(x)$ do investimento depois de um ano é $A(x) = 1{,}04x$. Encontre $A \circ A$, $A \circ A \circ A$ e $A \circ A \circ A \circ A$. O que estas composições representam? Encontre uma fórmula para a composição de n cópias de A.

61. (a) Se $g(x) = 2x + 1$ e $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, encontre uma função de f tal que $f \circ g = h$. (Pense em quais operações você teria que efetuar na fórmula de g para chegar à fórmula de h.)
(b) Se $f(x) = 3x + 5$ e $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, encontre uma função g tal que $f \circ g = h$.

62. Se $f(x) = x + 4$ e $h(x) = 4x - 1$, encontre uma função g tal que $g \circ f = h$.

63. Suponha que g seja uma função par e seja $h = f \circ g$. A função h é sempre uma função par?

64. Suponha que g seja uma função ímpar e seja $h = f \circ g$. A função h é sempre uma função ímpar? E se f for ímpar? E se f for par?

1.4 Calculadoras Gráficas e Computadores

Nesta seção vamos assumir que você tem acesso a uma calculadora ou a um computador com um software gráfico. Veremos como o uso dessas ferramentas nos possibilita fazer o gráfico de funções mais complicadas e resolver problemas mais complexos, que de outra forma não poderiam ser resolvidos. Vamos salientar também mais algumas das armadilhas ocultas nessas máquinas.

As calculadoras gráficas e os computadores podem fazer gráficos bastante precisos de funções. Mas, como será visto no Capítulo 4, só por meio do cálculo podemos estar certos de ter descoberto todos os aspectos interessantes de um gráfico.

Tanto calculadoras quanto computadores exibem um recorte retangular do gráfico de uma função em uma **janela de exposição** ou **tela de inspeção**, que será chamada aqui de **janela retangular**. A visão-padrão frequentemente nos fornece uma imagem incompleta ou enganadora, portanto é importante escolher com cuidado a janela retangular. Se escolhermos a variação de x de $Xmin = a$ até $Xmax = b$ e os valores de y de $Ymin = c$ até $Ymax = d$, então a parte visível do gráfico está no retângulo

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

mostrada na Figura 1. Vamos nos referir a ela como janela retangular $[a, b]$ *por* $[c, d]$.

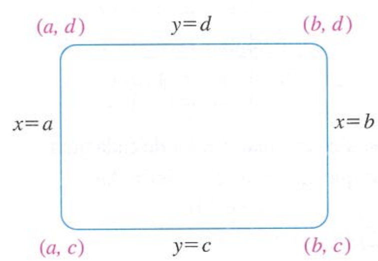


FIGURA 1
A janela retangular $[a, b]$ por $[c, d]$

A máquina faz o gráfico da função f da mesma forma que você o faria. Ela marca pontos da forma $(x, f(x))$ para uma certa quantidade de valores igualmente espaçados de x entre a e b. Se um valor x não está no domínio de f, ou se $f(x)$ estiver fora da janela retangular, ela vai para o próximo valor de x. A máquina conecta cada ponto ao ponto anterior marcado para formar uma representação do gráfico de f.