4.7 Problemas de Otimização

Os métodos estudados neste capítulo para encontrar os valores extremos têm aplicações práticas em muitas situações do dia a dia. Um homem de negócios quer minimizar os custos e maximizar os lucros. Um viajante quer minimizar o tempo de transporte. O Princípio de Fermat na óptica estabelece que a luz segue o caminho que leva o menor tempo. Nesta seção vamos resolver problemas tais como maximizar áreas, volumes e lucros e minimizar distâncias, tempo e custos.

Na solução destes problemas práticos, o maior desafio está frequentemente em converter o problema em um problema de otimização matemática, determinando a função que deve ser maximizada ou minimizada. Vamos nos lembrar dos princípios da resolução de problemas discutidos anteriormente e adaptá-los para estas situações:

SP

Passos na Resolução dos Problemas de Otimização

1. **Compreendendo o Problema** A primeira etapa consiste em ler cuidadosamente o problema até que ele seja entendido claramente. Pergunte-se: O que é desconhecido? Quais são as quantidades dadas? Quais são as condições dadas?
2. **Faça um Diagrama** Na maioria dos problemas, é útil fazer um diagrama e marcar as quantidades dadas e pedidas no diagrama.
3. **Introduzindo uma Notação** Atribua um símbolo para a quantidade que deve ser maximizada ou minimizada (por ora vamos chamá-la Q). Selecione também símbolos ($a, b, c, \ldots, x, y$) para outras quantidades desconhecidas e coloque esses símbolos no diagrama. O uso de iniciais como símbolos poderá ajudá-lo – por exemplo, A para área, h para altura e t para tempo.
4. Expresse Q em termos de alguns dos outros símbolos da Etapa 3.
5. Se Q for expresso como uma função de mais de uma variável na Etapa 4, use a informação dada para encontrar as relações (na forma de equações) entre essas variáveis. Use então essas equações para eliminar todas menos uma das variáveis na expressão de Q. Assim, Q será expresso como uma função de *uma* variável x, digamos, $Q = f(x)$. Escreva o domínio dessa função.
6. Use os métodos das Seções 4.1 e 4.3 para encontrar os valores máximo ou mínimo *absolutos* de f. Em particular, se o domínio de f é um intervalo fechado, então o Método de Intervalo Fechado da Seção 1.4 pode ser usado.

EXEMPLO 1 Um fazendeiro tem 1 200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?

SP Entendendo o problema
SP Analogia: tente casos especiais
SP Faça diagramas

SOLUÇÃO A fim de percebermos o que está acontecendo neste problema, vamos fazer uma experiência com alguns casos especiais. A Figura 1, fora de escala, mostra três maneiras possíveis de estender os 1 200 m de cerca.

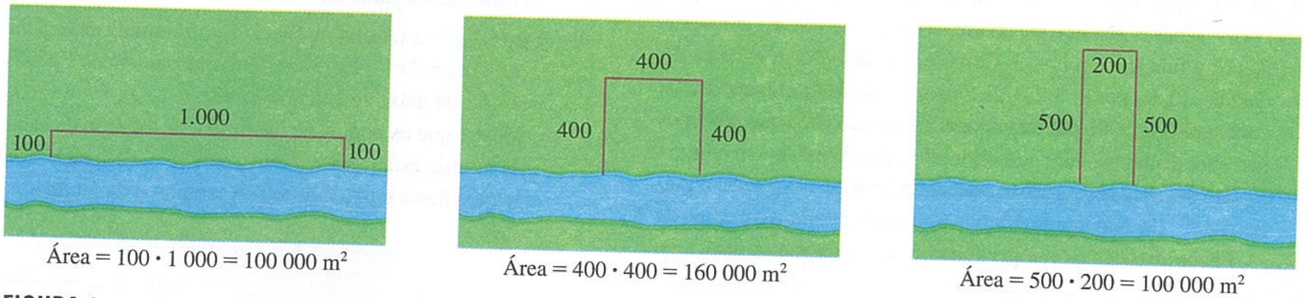


FIGURA 1

Vemos que, ao tentarmos os campos rasos e extensos ou profundos e estreitos, obtemos áreas relativamente pequenas. Parece plausível que exista alguma configuração intermediária que produza a maior área.

A Figura 2 ilustra o caso geral. Desejamos maximizar a área A do retângulo. Sejam x e y a profundidade e a largura do retângulo (em metros). Então, expressamos A em termos de x e y:

SP Introduza uma notação.

$$A = xy$$

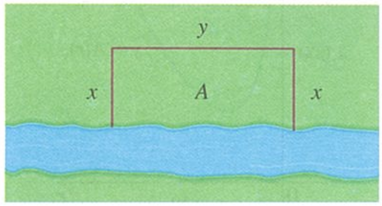


FIGURA 2

Queremos expressar A como uma função de apenas uma variável; assim, eliminamos y expressando-o em termos de x. Para fazermos isso, usamos a informação dada de que o comprimento total da cerca é de 1 200 m. Logo,

$$2x + y = 1\,200$$

Dessa equação, temos $y = 1.200 - 2x$, resultando assim

$$A = x(1\,200 - 2x) = 1\,200x - 2x^2$$

Observe que $x \geqslant 0$ e $x \leqslant 600$ (de outra forma resultaria $A < 0$). Logo, a função que desejamos maximizar é

$$A(x) = 1\,200x - 2x^2, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 600$$

A derivada é $A'(x) = 1\,200 - 4x$; logo, para encontrarmos os números críticos, resolvemos a equação

$$1\,200 - 4x = 0$$

que nos fornece $x = 300$. O valor máximo de A deve ocorrer ou nesse número crítico ou em uma extremidade do intervalo. Uma vez que $A(0) = 0$, $A(300) = 180\,000$ e $A(600) = 0$, o Método do Intervalo Fechado nos fornece o valor máximo como $A(300) = 180\,000$.

[Alternativamente poderíamos ter observado que $A''(x) = -4 < 0$ para todo x; logo, A é sempre côncava para baixo, e o máximo local em $x = 300$ deve ser um máximo absoluto.]

Assim, o campo retangular deve ter 300 m de profundidade e 600 m de extensão. ■

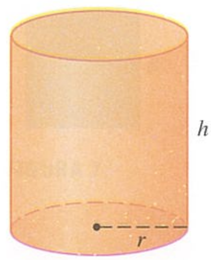


FIGURA 3

EXEMPLO 2 Uma lata cilíndrica é feita para receber um 1 litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.

SOLUÇÃO Fazemos o diagrama como na Figura 3, onde r é o raio e h é a altura (ambos em centímetros). A fim de minimizar o custo do metal, minimizamos a área da superfície total do cilindro (tampa, base e lado). Da Figura 4, vemos que o lado é feito de uma folha retangular com dimensões $2\pi r$ e h. Logo a área da superfície é

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

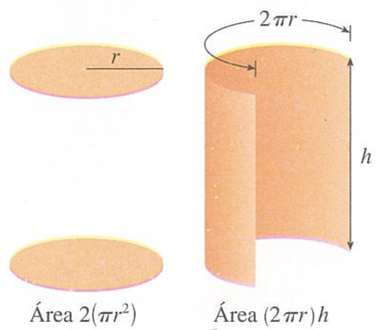


FIGURA 4

Para eliminarmos h, usamos o fato de que o volume é dado como 1 L, que é igual a 1 000 cm³. Logo,

$$\pi r^2 h = 1\,000$$

que nos fornece $h = 1\,000/(\pi r^2)$. Substituindo na expressão para A, temos

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1\,000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r}$$

Portanto, a função que queremos minimizar é

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r} \qquad r > 0$$

Para acharmos os números críticos, derivamos:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2\,000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

Então $A'(r) = 0$ quando $\pi r^3 = 500$; logo, o número crítico é $r = \sqrt[3]{500/\pi}$.

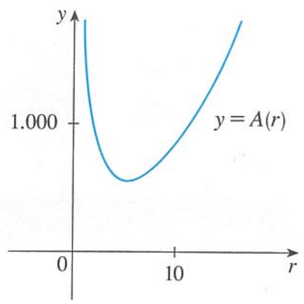


FIGURA 5

Ainda neste capítulo, no Projeto Aplicado da página 304, examinaremos a forma mais econômica para uma lata levando em conta outros custos de produção.

Uma vez que o domínio de A é $(0, \infty)$, não podemos usar o argumento do Exemplo 1 relativo às extremidades. Mas podemos observar que $A'(r) < 0$ para $r < \sqrt[3]{500/\pi}$ e $A'(r) > 0$ para $r > \sqrt[3]{500/\pi}$, portanto, A está decrescendo para *todo* r à esquerda do número crítico e crescendo para *todo* r à direita. Assim, $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ deve originar um *mínimo absoluto*.

[Alternativamente, poderíamos argumentar que $A(r) \to \infty$ quando $r \to 0^+$ e $A(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$; portanto, deve existir um valor mínimo de $A(r)$, que deve ocorrer no número crítico. Veja a Figura 5.]

O valor de h correspondente a $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ é

$$h = \frac{1.000}{\pi r^2} = \frac{1.000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Dessa forma, para minimizar o custo da lata, o raio deve ser $\sqrt[3]{500/\pi}$ cm e a altura, igual a duas vezes o raio, isto é, o diâmetro.

OBSERVAÇÃO 1 O argumento usado no Exemplo 2 para justificar o mínimo absoluto é uma variação do Teste da Primeira Derivada (que se aplica somente para valores máximo e mínimo *locais*) e será enunciado aqui para futuras referências.

TEC *Module 4.7* leva você a seis problemas adicionais de otimização, incluindo animações de situações físicas.

Teste da Primeira Derivada para Valores Extremos Absolutos Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f definida em um certo intervalo.

(a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então $f(c)$ é o valor máximo absoluto de f.

(b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então $f(c)$ é o valor mínimo absoluto de f.

OBSERVAÇÃO 2 Um método alternativo para resolver os problemas de otimização é usar a derivação implícita. Para ilustrarmos esse método, examinaremos novamente o Exemplo 2. Vamos nos utilizar das mesmas equações

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \pi r^2 h = 1\,000$$

mas, em vez de eliminarmos h, derivamos implicitamente ambas as equações em relação a r:

$$A' = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi rh' \qquad 2\pi rh + \pi r^2 h' = 0$$

O mínimo ocorre em um número crítico; assim, fazemos $A' = 0$, simplificamos e chegamos até as equações

$$2r + h + rh' = 0 \qquad 2h + rh' = 0$$

e uma subtração nos fornece $2r - h = 0$ ou $h = 2r$.

EXEMPLO 3 Encontre o ponto sobre a parábola $y^2 = 2x$ mais próximo de $(1, 4)$.

SOLUÇÃO A distância entre os pontos $(1, 4)$ e (x, y) é

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

(Veja a Figura 6.) Mas, como o ponto (x, y) está sobre a parábola, então $x = \frac{1}{2}y^2$; logo, a expressão para d fica

$$d = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y-4)^2}$$

(Uma forma alternativa seria substituir $y = \sqrt{2x}$ para obter d em termos só de x.) Em vez de d, minimizamos seu quadrado:

$$d^2 = f(y) = \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y-4)^2$$

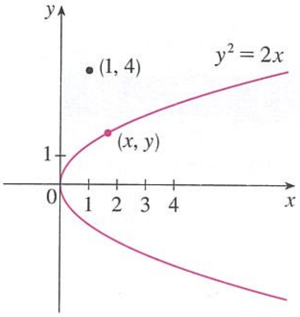


FIGURA 6

(Você deve se convencer de que o mínimo de d ocorre no mesmo ponto que o mínimo de d^2, porém é mais fácil de se lidar com d^2.). Derivando, obtemos

$$f'(y) = 2(\tfrac{1}{2}y^2 - 1)y + 2(y - 4) = y^3 - 8$$

portanto, $f'(y) = 0$ quando $y = 2$. Observe que $f'(y) < 0$ quando $y < 2$ e $f'(y) > 0$ quando $y > 2$; logo, pelo Teste da Primeira Derivada para os Valores Extremos Absolutos, o mínimo absoluto ocorre quando $y = 2$. (Ou, ainda, poderíamos simplesmente dizer que, dada a natureza geométrica do problema, é óbvio que existe um ponto mais próximo, mas não existe um ponto mais distante.) O valor correspondente de x é $x = \frac{1}{2}y^2 = 2$. Assim, o ponto sobre $y^2 = 2x$ mais próximo de $(1, 4)$ é $(2, 2)$.

EXEMPLO 4 Um homem lança seu bote em um ponto A na margem de um rio reto, com uma largura de 3 km, e deseja atingir tão rápido quanto possível um ponto B na outra margem, 8 km rio abaixo (veja a Figura 7). Ele pode dirigir seu barco diretamente para o ponto C e então seguir andando para B, ou rumar diretamente para B, ou remar para algum ponto D entre C e B e então andar até B. Se ele pode remar a 6 km/h e andar a 8 km/h, onde ele deveria aportar para atingir B o mais rápido possível? (Estamos supondo que a velocidade da água seja desprezível comparada com a velocidade na qual o homem rema.)

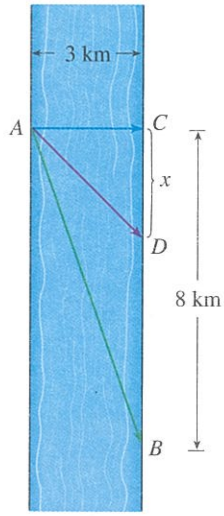


FIGURA 7

SOLUÇÃO Se chamarmos de x a distância de C a D, então a distância a ser percorrida a pé será $|DB| = 8 - x$, e o Teorema de Pitágoras dará a distância remada como $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$. Usamos a equação

$$\text{tempo} = \frac{\text{distância}}{\text{taxa}}$$

Então o tempo gasto remando é $\sqrt{x^2 + 9}/6$, enquanto o tempo gasto andando é $(8 - x)/8$. Assim, o tempo total T como uma função de x é

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$$

O domínio dessa função T é $[0, 8]$. Observe que, se $x = 0$, ele rema para C, e se $x = 8$, ele rema diretamente para B. A derivada de T é

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$$

Assim, usando o fato de que $x \geqslant 0$, temos

$$\begin{aligned} T'(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{8} \quad \Longleftrightarrow \quad 4x = 3\sqrt{x^2 + 9} \\ &\Longleftrightarrow \quad 16x^2 = 9(x^2 + 9) \quad \Longleftrightarrow \quad 7x^2 = 81 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{9}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

O único número crítico é $x = 9/\sqrt{7}$. Para verificarmos se o mínimo ocorre nesse número crítico ou nas extremidades do domínio $[0, 8]$, calculamos T em todos os três pontos:

$$T(0) = 1{,}5 \qquad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1{,}33 \qquad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1{,}42$$

Uma vez que o menor desses valores T ocorre quando $x = 9/\sqrt{7}$, o valor mínimo absoluto de T deve ocorrer lá. A Figura 8 ilustra esse cálculo mostrando o gráfico de T.

Dessa forma, o homem deve aportar o bote no ponto $9/\sqrt{7}$ km ($\approx$3,4 km) rio abaixo a partir do ponto inicial.

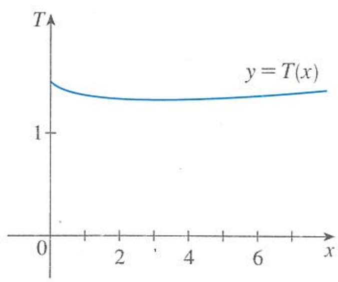


FIGURA 8

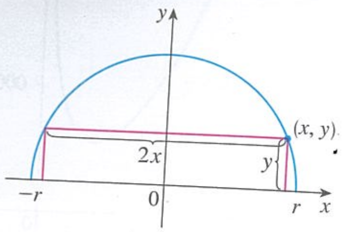


FIGURA 9

EXEMPLO 5 Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r.

SOLUÇÃO 1 Vamos considerar o semicírculo como a metade superior do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ com o centro na origem. Então a palavra *inscrito* significa que o retângulo tem dois vértices sobre o semicírculo e dois vértices sobre o eixo x, conforme mostra a Figura 9.

Seja (x, y) o vértice que está no primeiro quadrante. E então o retângulo tem lados de comprimento $2x$ e y, e sua área é

$$A = 2xy$$

Para eliminarmos y, usamos o fato de que (x, y) está sobre o círculo $x^2 + y^2 = r^2$ e, portanto, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Logo,

$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

O domínio dessa função é $0 \leqslant x \leqslant r$. Sua derivada é

$$A' = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

que é zero quando $2x^2 = r^2$, isto é, $x = r/\sqrt{2}$ (uma vez que $x \geqslant 0$). Esse valor de x dá um valor máximo de A, visto que $A(0) = 0$ e $A(r) = 0$. Portanto, a área do maior retângulo inscrito é

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2$$

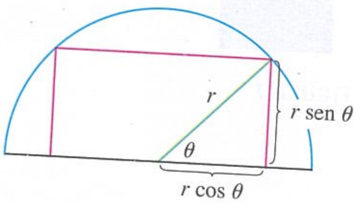


FIGURA 10

SOLUÇÃO 2 Uma solução mais simples é possível quando usamos um ângulo como uma variável. Seja θ o ângulo mostrado na Figura 10. Então, a variação na área do retângulo é

$$A(\theta) = (2r\cos\theta)(r\,\mathrm{sen}\,\theta) = r^2(2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta) = r^2\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

Sabemos que $\mathrm{sen}\,2\theta$ tem um valor máximo de 1 e ele ocorre quando $2\theta = \pi/2$. Logo, $A(\theta)$ tem um valor máximo de r^2 e ele ocorre quando $\theta = \pi/4$.

Observe que essa solução trigonométrica não envolve derivação. De fato, não necessitamos usar nada do cálculo aqui.

Aplicações à Administração e à Economia

Na Seção 3.7 introduzimos a ideia de custo marginal. Lembre que se $C(x)$, a **função custo**, for o custo da produção de x unidades de certo produto, então o **custo marginal** é a taxa de variação de C em relação a x. Em outras palavras, a função de custo marginal é a derivada, $C'(x)$, da função custo.

Vamos considerar agora o marketing. Seja $p(x)$ o preço por unidade que a companhia pode cobrar se ela vender x unidades. Então, p é chamada **função demanda** (ou **função preço**) e esperaríamos que ela fosse uma função decrescente de x. Se x unidades forem vendidas e o preço por unidade for $p(x)$, então a receita total será

$$R(x) = xp(x)$$

e R é chamada **função receita**. A derivada R' da função receita é chamada **função receita marginal** e é a taxa de variação da receita com relação ao número de unidades vendidas.

Se x unidades forem vendidas, então o lucro total será

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

e P é chamada **função lucro**. A **função lucro marginal** é P', a derivada da função lucro. Nos Exercícios 57–62, lhe será pedido para usar as funções custo, receita e lucro marginais para minimizar custos e maximizar receitas e lucros.

EXEMPLO 6 Uma loja tem vendido 200 aparelhos reprodutores de Blu-ray por semana a \$ 350 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada \$ 10 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a função demanda e a função receita. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para maximizar sua receita?

SOLUÇÃO Se x for o número de reprodutores de Blu-ray vendidos por semana, então o aumento semanal nas vendas será $x - 200$. Para cada aumento de 20 unidades vendidas, o preço cai em \$ 10. Portanto, para cada unidade adicional vendida, o decréscimo no preço será $\frac{1}{20} \times 10$ e a função demanda será

$$p(x) = 350 - \tfrac{10}{20}(x - 200) = 450 - \tfrac{1}{2}x$$

A função receita é

$$R(x) = xp(x) = 450x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Como $R'(x) = 450 - x$, vemos que $R'(x) = 0$ quando $x = 450$. Este valor de x dá um máximo absoluto pelo Teste da Primeira Derivada (ou simplesmente observando que o gráfico de R é uma parábola que abre para baixo). O preço correspondente é

$$p(450) = 450 - \tfrac{1}{2}(450) = 225$$

e o desconto é $350 - 225 = 125$. Portanto, para maximizar a receita, a loja deveria oferecer um desconto de \$ 125.

4.7 Exercícios

1. Considere o seguinte problema: encontre dois números cuja soma seja 23 e cujo produto seja máximo.
   (a) Faça uma tabela de valores, como a mostrada a seguir, tal que a soma dos números nas duas primeiras colunas seja sempre 23. Com base na evidência mostrada em sua tabela, estime a resposta para o problema.

Primeiro número	Segundo número	Produto
1	22	22
2	21	42
3	20	60
⋮	⋮	⋮

   (b) Use o cálculo para resolver o problema e compare com sua resposta da parte (a).

2. Encontre dois números cuja diferença seja 100 e cujo produto seja mínimo.

3. Encontre dois números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja mínima.

4. A soma de dois números positivos é 16. Qual é o menor valor possível para a soma de seus quadrados?

5. Qual é a distância vertical máxima entre a reta $y = x + 2$ e a parábola $y = x^2$ para $-1 \leq x \leq 2$?

6. Qual é a distância vertical mínima entre as parábolas $y = x^2 + 1$ e $y = x - x^2$?

7. Encontre as dimensões de um retângulo com perímetro de 100 m cuja área seja a maior possível.

8. Encontre as dimensões de um retângulo com área de 1.000 m^2 cujo perímetro seja o menor possível.

9. Um modelo usado para a produção Y de uma colheita agrícola como função do nível de nitrogênio N no solo (medido em unidades apropriadas) é

$$Y = \frac{kN}{1 + N^2}$$

onde k é uma constante positiva. Que nível de nitrogênio dá a melhor produção?

10. A taxa (em mg de carbono/m^3/h) na qual a fotossíntese ocorre para uma espécie de fitoplâncton é modelada pela função

$$P = \frac{100I}{I^2 + I + 4}$$

em que I é a intensidade da luz (medida em milhares de velas). Para qual intensidade de luz P é máximo?

11. Considere o seguinte problema: um fazendeiro com 300 m de cerca quer cercar uma área retangular e então dividi-la em quatro partes com cercas paralelas a um lado do retângulo. Qual é a maior área total possível das quatro partes?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

(a) Faça vários diagramas ilustrando a situação, alguns com divisões rasas e largas e alguns com divisões profundas e estreitas. Encontre as áreas totais dessas configurações. Parece que existe uma área máxima? Se a resposta for sim, estime-a.

(b) Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza uma notação e marque no diagrama seus símbolos.

(c) Escreva uma expressão para a área total.

(d) Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.

(e) Use a parte (d) para escrever a área total como uma função de uma variável.

(f) Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte (a).

12. Considere o seguinte problema: uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um pedaço quadrado de papelão, com 3 metros de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa poderá ter.

(a) Faça vários diagramas para ilustrar a situação, algumas caixas baixas com bases grandes e outras altas com base pequena. Encontre os volumes de várias dessas caixas. Parece existir um volume máximo? Se a resposta for sim, estime-o.

(b) Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza uma notação e marque no diagrama seus símbolos.

(c) Escreva uma expressão para o volume.

(d) Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.

(e) Use a parte (d) para escrever o volume como uma função de uma só variável.

(f) Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte (a).

13. Um fazendeiro quer cercar uma área de 15 000 m^2 em um campo retangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de forma que minimize o custo da cerca?

14. Uma caixa com uma base quadrada e sem tampa tem volume de 32 000 cm^3. Encontre as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado.

15. Se 1 200 cm^2 de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa.

16. Um contêiner para estocagem retangular com uma tampa aberta deve ter um volume de 10 m^3. O comprimento de sua base é o dobro da largura. O material para a base custa \$ 10 por metro quadrado. O material para os lados custa \$ 6 por metro quadrado. Encontre o custo dos materiais para o mais barato desses contêineres.

17. Faça o Exercício 16 supondo que o contêiner tenha uma tampa feita do mesmo material usado nos lados.

18. (a) Mostre que, de todos os retângulos com uma dada área, aquele com a menor área é um quadrado.

(b) Mostre que, de todos os retângulos com um dado perímetro, aquele com a maior área é um quadrado.

19. Encontre o ponto sobre a reta $y = 2x + 3$ que está mais próximo da origem.

20. Encontre o ponto sobre a curva $y = \sqrt{x}$ que está mais próximo do ponto $(3, 0)$.

21. Encontre os pontos sobre a elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que estão mais distantes do ponto $(1, 0)$.

22. Encontre, com precisão de duas casas decimais, as coordenadas do ponto na curva $y = \operatorname{sen} x$ que está mais próximo do ponto $(4, 2)$.

23. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.

24. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

25. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um triângulo equilátero com lado L se um dos lados do retângulo estiver sobre a base do triângulo.

26. Encontre a área do maior trapézio que pode ser inscrito num círculo com raio 1 e cuja base é o diâmetro do círculo.

27. Encontre as dimensões do triângulo isósceles de maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.

28. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 3 e 4 cm, se dois lados do retângulo estiverem sobre os catetos.

29. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre o maior volume possível para este cilindro.

30. Um cilindro circular reto é inscrito em um cone com altura h e raio da base r. Encontre o maior volume possível para este cilindro.

31. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre o maior superfície possível para este cilindro.

32. Uma janela normanda tem a forma de um retângulo tendo em cima um semicírculo. (O diâmetro do semicírculo é igual à largura do retângulo. Veja o Exercício 62.) Se o perímetro da janela for 10 m, encontre as dimensões da janela que deixam passar a maior quantidade possível de luz.

33. As margens superiores e inferiores de um pôster têm 6 cm e cada margem lateral tem 4 cm. Se a área do material impresso no pôster é de 384 cm^2, encontre as dimensões do pôster com a menor área.

34. Um pôster deve ter uma área de 900 cm^2 com uma margem de 3 cm na base e nos lados, e uma margem de 5 cm em cima. Que dimensões darão a maior área impressa?

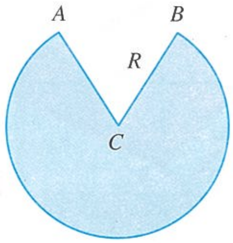
35. Um pedaço de fio com 10 m de comprimento é cortado em duas partes. Uma parte é dobrada no formato de um quadrado, ao passo que a outra é dobrada na forma de um triângulo equilátero. Como deve ser cortado o fio de forma que a área total englobada seja: (a) máxima? (b) mínima?

36. Responda o Exercício 35 se um pedaço estiver dobrado no formato de um quadrado e o outro no formato de um círculo.

37. Uma lata cilíndrica sem o topo é feita para receber V cm^3 de líquido. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para fazer a lata.

38. Uma cerca de 2 m de altura corre paralela a um edifício alto, a uma distância de 1 m do edifício. Qual o comprimento da menor escada que se apoie no chão e na parede do prédio, por cima da cerca?

39. Um copo com formato cônico é feito de um pedaço circular de papel de raio R cortando fora um setor e juntando os lados CA e CB. Encontre a capacidade máxima de tal copo.



40. Um copo de papel em forma de cone é feito de maneira a conter 27 cm^3 de água. Ache a altura e o raio do copo que usa a menor quantidade possível de papel.

41. Um cone com altura h está inscrito em outro cone maior com altura H, de forma que seu vértice esteja no centro da base do cone maior. Mostre que o cone interno tem seu volume máximo quando $h = \frac{1}{3}H$.

42. Um objeto de massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu mg}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

onde μ é uma constante chamada coeficiente de atrito. Para qual valor de θ é F menor?

43. Se um resistor de R ohms estiver ligado a uma pilha de E volts com resistência interna de r ohms, então a potência (em watts) no resistor externo é

$$P = \frac{E^2R}{(R + r)^2}$$

Se E e r forem fixados, mas R variar, qual é o valor mínimo da potência?

44. Para um peixe nadando a uma velocidade v em relação à água, a energia gasta por unidade de tempo é proporcional a v^3. Acredita-se que os peixes migratórios tentam minimizar a energia total necessária para nadar uma distância fixa. Se o peixe estiver nadando contra uma corrente u ($u < v$), então o tempo necessário para nadar a uma distância L é $L/(v - u)$ e a energia total E requerida para nadar a distância é dada por

$$E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v - u}$$

onde a é uma constante de proporcionalidade.

(a) Determine o valor de v que minimiza E.

(b) Esboce o gráfico de E.

Observação: Esse resultado foi verificado experimentalmente; peixes migratórios nadam contra a corrente a uma velocidade 50% maior que a velocidade da corrente.

45. Em uma colmeia, cada alvéolo é um prisma hexagonal regular, aberto em uma extremidade com um ângulo triédrico na outra extremidade. Acredita-se que as abelhas formam esses alvéolos de modo a minimizar a área da superfície, usando assim uma quantidade mínima de cera na construção. O exame desses alvéolos mostrou que a medida do ângulo do ápice θ é surpreendentemente consistente. Baseado na geometria do alvéolo, pode ser mostrado que a área da superfície S é dada por

$$S = 6sh - \tfrac{3}{2}s^2 \operatorname{cotg} \theta + \left(3s^2\sqrt{3}/2\right) \operatorname{cossec} \theta,$$

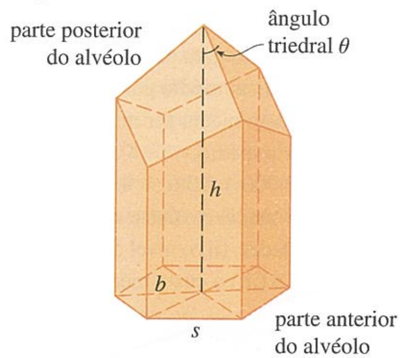
onde s, o comprimento dos lados do hexágono, e h, a altura, são constantes.

(a) Calcule $dS/d\theta$.

(b) Que ângulo as abelhas deveriam preferir?

(c) Determine a área da superfície mínima do alvéolo (em termos de s e h).

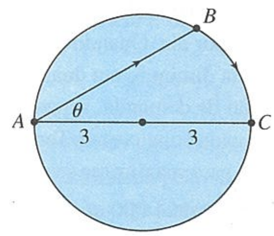
Observação: Medidas reais do ângulo θ em colmeias foram feitas, e as medidas desses ângulos raramente diferem do valor calculado em mais que 2°.



46. Um barco deixa as docas às 14 h e viaja para o sul com velocidade de 20 km/h. Outro barco estava rumando leste a 15 km/h e alcança a mesma doca às 15 h. Em que momento os dois botes estavam mais próximos um do outro?

47. Resolva o problema no Exemplo 4 se o rio tiver 5 km de largura e o ponto B estiver somente a 5 km de A rio abaixo.

48. Uma mulher em um ponto A na praia de um lago circular com raio de 3 km quer chegar no ponto C diametralmente oposto a A do outro lado do lago no menor tempo possível. Ela pode andar a uma taxa de 6 km/h e remar um bote a 3 km/h. Como ela deve proceder?



49. Uma refinaria de petróleo está localizada na margem norte de um rio reto que tem 2 km de largura. Um oleoduto deve ser construído da refinaria até um tanque de armazenamento localizado na margem sul do rio, 6 km a leste da refinaria. O custo de construção do oleoduto é \$ 400.000/km sobre a terra, até um ponto P na margem norte e \$ 800.000/km sob o rio até o tanque. Onde P deveria estar localizado para minimizar o custo do oleoduto?

50. Suponha que a refinaria do Exercício 49 esteja localizada 1 km ao norte do rio. Onde P deveria estar situado?

51. A iluminação de um objeto por uma fonte de luz é diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte. Se duas fontes de luz, uma três vezes mais forte que a outra, são colocadas a 4 m de distância, onde deve ser colocado o objeto sobre a reta entre as fontes de forma a receber o mínimo de iluminação?

52. Encontre uma equação da reta que passa pelo ponto (3, 5) e que delimita a menor área do primeiro quadrante.

53. Sejam a e b números positivos. Ache o comprimento do menor segmento de reta que é cortado pelo primeiro quadrante e passa pelo ponto (a, b).

54. Em quais pontos da curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ a reta tangente tem a sua maior inclinação?

55. Qual é o menor comprimento de um segmento de reta que é cortado pelo primeiro quadrante e é tangente à curva $y = 3/x$ em algum ponto?

56. Qual é a menor área de um triângulo que é cortado pelo primeiro quadrante e cuja hipotenusa é tangente à parábola $y = 4 - x^2$ em algum ponto?

57. (a) Se $C(x)$ for o custo para produzir x unidades de uma mercadoria, então o **custo médio** por unidade é $c(x) = C(x)/x$. Mostre que se o custo médio for mínimo, então o custo marginal é igual ao custo médio.

(b) Se $C(x) = 16\,000 + 200x + 4x^{3/2}$, em dólares, encontre (i) o custo, o custo médio e o custo marginal no nível de produção de 1 000 unidades; (ii) o nível de produção que minimizará o custo médio; e (iii) o custo médio mínimo.

58. (a) Mostre que se o lucro $P(x)$ for máximo, então a receita marginal é igual ao custo marginal.

(b) Se $C(x) = 16\,000 + 500x - 1{,}6x^2 + 0{,}004x^3$ for a função custo e $p(x) = 1\,700 - 7x$ a função demanda, encontre o nível de produção que maximiza o lucro.

59. Um time de beisebol joga em um estádio com capacidade para 55 000 espectadores. Com o preço do ingresso a \$ 10, a média de público tem sido de 27 000. Quando os ingressos abaixaram para \$ 8, a média de público subiu para 33 000.

(a) Encontre a função demanda, supondo que ela seja linear.

(b) Qual deveria ser o preço dos ingressos para maximizar a receita?

60. Durante os meses de verão, Terry faz e vende colares na praia. No verão passado, ele vendeu os colares por \$ 10 cada e suas vendas eram em média de 20 por dia. Quando ele aumentou o preço \$ 1, descobriu que a média diminuiu em duas vendas por dia.

(a) Encontre a função de demanda, supondo que ela seja linear.

(b) Se o material de cada colar custa a Terry \$ 6, qual deveria ser o preço de venda para maximizar seu lucro?

61. Um fabricante tem vendido 1 000 aparelhos de televisão de tela plana por semana, a \$ 450 cada. Uma pesquisa de mercado indica que para cada \$ 10 de desconto oferecido ao comprador, o número de aparelhos vendidos aumenta 100 por semana.

(a) Encontre a função demanda.

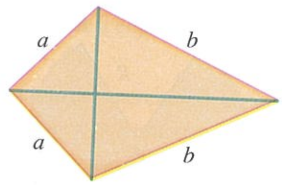
(b) Que desconto a companhia deveria oferecer ao comprador para maximizar sua receita?

(c) Se sua função custo semanal for $C(x) = 68\,000 + 150x$, como o fabricante deveria escolher o tamanho do desconto para maximizar seu lucro?

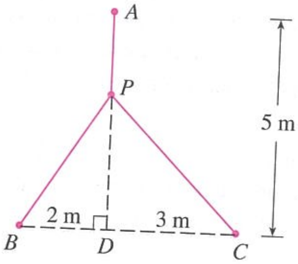
62. O gerente de um complexo de apartamentos com 100 unidades sabe, a partir da experiência, que todas as unidades estarão ocupadas se o aluguel for \$ 800 por mês. Uma pesquisa de mercado sugere que, em média, uma unidade adicional permanecerá vazia para cada \$ 10 de aumento no aluguel. Qual o aluguel que o gerente deveria cobrar para maximizar a receita?

63. Mostre que, de todos os triângulos isósceles com um dado perímetro, aquele que tem a maior área é o equilátero.

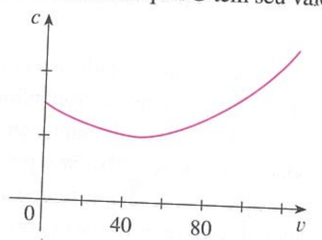
SCA **64.** A moldura para uma pipa é feita com seis pedaços de madeira. Os quatro pedaços externos foram cortados com os comprimentos indicados na figura. Para maximizar a área da pipa, de que tamanho devem ser os pedaços diagonais?



65. Um ponto P precisa ser localizado em algum ponto sobre a reta AD de forma que o comprimento total L de fios ligando P aos pontos A, B e C seja minimizado (veja a figura). Expresse L como uma função de $x = |AP|$ e use os gráficos de L e dL/dx para estimar o valor mínimo de L.



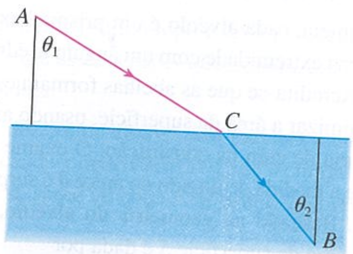
66. O gráfico mostra o consumo de combustível c de um carro (medido em litros/hora) como uma função da velocidade v do carro. Em velocidade muito baixa, o motor não rende bem; assim, inicialmente c decresce à medida que a velocidade cresce. Mas em alta velocidade o consumo cresce. Você pode ver que $c(v)$ é minimizado para esse carro quando $v \approx 48$ km/h. Porém, para a eficiência do combustível, o que deve ser minimizado não é o consumo em litros/hora, mas, em vez disso, o consumo de combustível em litros *por quilômetro*. Vamos chamar esse consumo de G. Usando o gráfico, estime a velocidade na qual G tem seu valor mínimo.



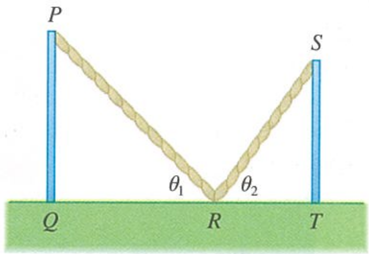
67. Seja v_1 a velocidade da luz no ar e v_2 a velocidade da luz na água. De acordo com o Princípio de Fermat, um raio de luz viajará de um ponto A no ar para um ponto B na água por um caminho ACB que minimiza o tempo gasto. Mostre que

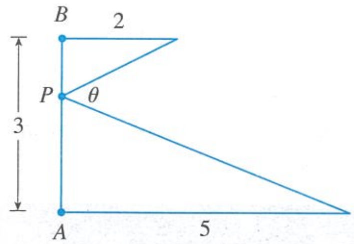
$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

onde θ_1 (o ângulo de incidência) e θ_2 (o ângulo de refração) são conforme mostrados. Essa equação é conhecida como a Lei de Snell.

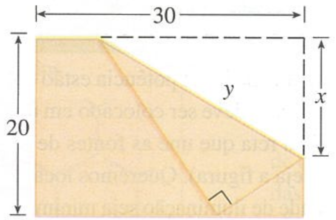


68. Dois postes verticais PQ e ST são amarrados por uma corda PRS que vai do topo do primeiro poste para um ponto R no chão entre os postes e então até o topo do segundo poste, como na figura. Mostre que o menor comprimento de tal corda ocorre quando $\theta_1 = \theta_2$.

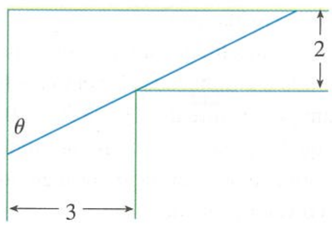




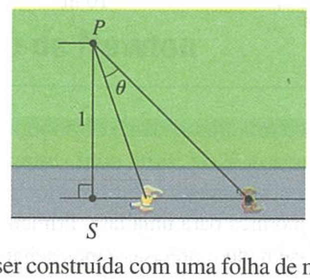
69. O canto superior direito de um pedaço de papel com 30 cm de largura por 20 cm de comprimento é dobrado sobre o lado direito, como na figura. Como você dobraria de forma a minimizar o comprimento da dobra? Em outras palavras, como você escolheria x para minimizar y?



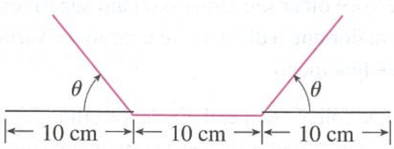
70. Um cano de metal está sendo carregado através de um corredor com 3 m de largura. No fim do corredor há uma curva em ângulo reto, passando-se para um corredor com 2 m de largura. Qual é o comprimento do cano mais longo que pode ser carregado horizontalmente em torno do canto?



71. Um observador permanece em um ponto P, distante uma unidade de uma pista. Dois corredores iniciam no ponto S da figura e correm ao longo da pista. Um corredor corre três vezes mais rápido que o outro. Encontre o valor máximo do ângulo θ de visão do observador entre os corredores. [*Dica*: Maximize tg θ.]

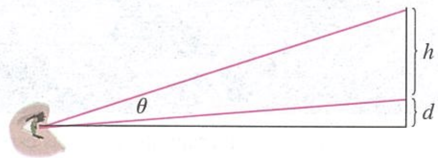


72. Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30 cm dobrando-se para cima 1/3 da folha de cada lado, fazendo um ângulo θ com a horizontal. Como θ deve ser escolhido para que a calha carregue a maior quantidade de água possível?



73. Como deve ser escolhido o ponto P sobre o segmento AB de forma a maximizar o ângulo θ?

74. Uma pintura em uma galeria de arte tem altura h e está pendurada de forma que o lado de baixo está a uma distância d acima do olho de um observador (como na figura). A que distância da parede deve ficar o observador para obter a melhor visão? (Em outras palavras, onde deve ficar o observador de forma a maximizar o ângulo θ subentendido em seu olho pela pintura?)

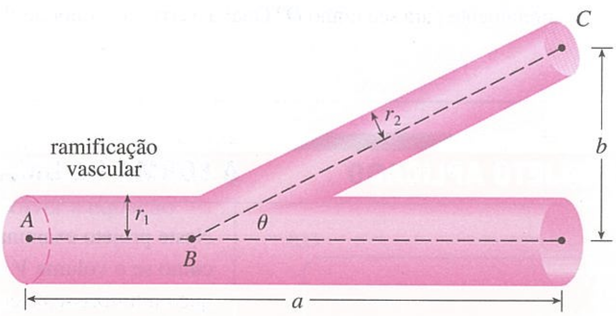


75. Encontre a área máxima do retângulo que pode ser circunscrito em torno de um dado retângulo com comprimento L e largura W. [*Dica*: Expresse a área como uma função do ângulo θ.]

76. O sistema vascular sanguíneo consiste em vasos sanguíneos (artérias, arteríolas, capilares e veias) que transportam o sangue do coração para os órgãos e de volta para o coração. Esse sistema deve trabalhar de forma a minimizar a energia despendida pelo coração no bombeamento do sangue. Em particular, essa energia é reduzida quando a resistência do sangue diminui. Uma das Leis de Poiseuille dá a resistência R do sangue como

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

onde L é o comprimento do vaso sanguíneo; r, o raio; e C é uma constante positiva determinada pela viscosidade do sangue. (Poiseuille estabeleceu essa lei experimentalmente, mas também seguiu a Equação 8.4.2.) A figura mostra um vaso sanguíneo principal de raio r_1 ramificado em um ângulo θ em um vaso menor de raio r_2.



(a) Use a Lei de Poiseuille para mostrar que a resistência total do sangue ao longo do caminho ABC é

$$R = C\left(\frac{a - b \operatorname{cotg}\theta}{r_1^4} + \frac{b \operatorname{cossec}\theta}{r_2^4}\right)$$

onde a e b são as distâncias mostradas na figura.

(b) Demonstre que essa resistência é minimizada quando

$$\cos\theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

(c) Encontre o ângulo ótimo de ramificação (com precisão de um grau) quando o raio do vaso sanguíneo menor é 2/3 do raio do vaso maior.


Manfred Kage/Peter Arnold Images/Photolibrary

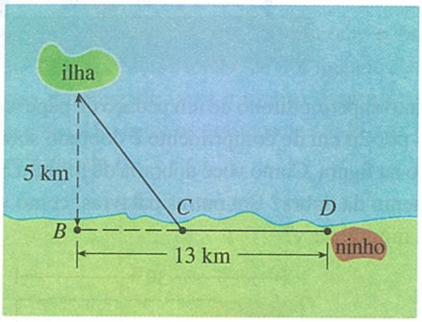
77. Os ornitologistas determinaram que algumas espécies de pássaros tendem a evitar voos sobre largas extensões de água durante o dia. Acredita-se que é necessária mais energia para voar sobre a água que a terra, pois o ar em geral sobe sobre a terra e desce sobre a água durante o dia. Um pássaro com essas tendências é solto de uma ilha que está a 5 km do ponto mais próximo B sobre uma praia reta, voa para um ponto C na praia e então voa ao longo da praia para a área D, seu ninho. Suponha que o pássaro instintivamente escolha um caminho que vai minimizar seu gasto de energia. Os pontos B e D distam 13 km um do outro.

(a) Em geral, se é preciso 1,4 vezes mais energia para voar sobre a água do que sobre a terra, para que ponto C o pássaro precisa voar para minimizar a energia total gasta no retorno ao ninho?

(b) Sejam W e L a energia (em joules) por quilômetro voado sobre a água e sobre a terra, respectivamente. Qual o significado, em termos do voo do pássaro, de grandes valores da razão W/L? O que significaria um valor pequeno? Determine a razão W/L correspondente ao mínimo dispêndio de energia.

(c) Qual deveria ser o valor de W/L a fim de que o pássaro voasse diretamente para seu ninho D? Qual deveria ser o valor de W/L para o pássaro voar para B e então seguir ao longo da praia para D?

(d) Se os ornitologistas observarem que pássaros de certa espécie atingem a praia em um ponto a 4 km de B, quantas vezes mais energia será despendida pelo pássaro para voar sobre a água que sobre a terra?



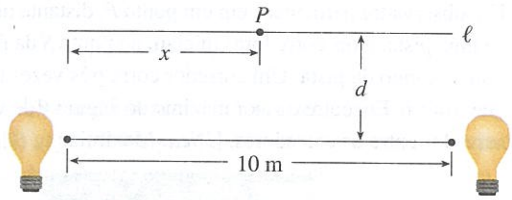
78. Duas fontes de luz de igual potência estão colocadas a 10 m uma da outra. Um objeto deve ser colocado em um ponto P sobre uma reta ℓ paralela à reta que une as fontes de luz a uma distância d metros dela (veja a figura). Queremos localizar P em ℓ de forma que a intensidade de iluminação seja minimizada. Precisamos usar o fato de que a intensidade de iluminação para uma única fonte é diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte.

(a) Encontre uma expressão para a intensidade $I(x)$ em um ponto P.

(b) Se $d = 5$ m, use os gráficos de $I(x)$ e $I'(x)$ para mostrar que a intensidade é minimizada quando $x = 5$ m, isto é, quando P está no ponto médio de ℓ.

(c) Se $d = 10$ m, mostre que a intensidade (talvez surpreendentemente) *não* é minimizada no ponto médio.

(d) Em algum ponto entre $d = 5$ m e $d = 10$ m existe um valor de d no qual o ponto de iluminação mínima muda abruptamente. Estime esse valor de d por métodos gráficos. Encontre então o valor exato de d.

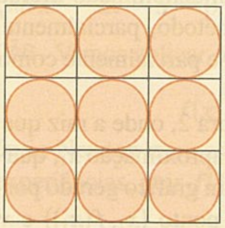


PROJETO APLICADO — A FORMA DE UMA LATA

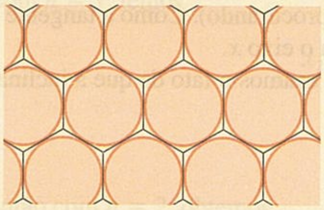
Neste projeto examinaremos a forma mais econômica para uma lata. Primeiro interpretamos isso como se o volume V de uma lata cilíndrica fosse dado e precisássemos achar a altura h e o raio r que minimizasse no custo do metal para fazer a lata (veja a figura). Se desprezarmos qualquer perda de metal no processo de manufatura, então o problema seria minimizar a área da superfície do cilindro. Resolvendo esse problema no Exemplo 2 da Seção 4.7, descobrimos que $h = 2r$, isto é, a altura deve ser igual ao diâmetro. Porém, se você olhar seu armário ou um supermercado com uma régua, descobrirá que a altura é geralmente maior que o diâmetro, e a razão h/r varia de 2 até cerca 3,8. Vamos ver se conseguimos explicar este fenômeno.

1. O material para fazer as latas é cortado de folhas de metal. Os lados cilíndricos são formados dobrando-se retângulos; esses retângulos são cortados da folha com uma pequena ou nenhuma

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador



Discos cortados a partir de quadrados



Discos cortados a partir de hexágonos

perda. Mas se os discos do topo e da base forem cortados de quadrados de lado $2r$ (como na figura), isso leva a uma considerável perda de metal, que pode ser reciclado, mas que tem um pequeno ou nenhum valor para quem fabrica as latas. Se for esse o caso, mostre que a quantidade de metal usada é minimizada quando

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \approx 2{,}55$$

2. Uma maneira mais eficiente de obter os discos é dividir a folha de metal em hexágonos e cortar as tampas e bases circulares dos hexágonos (veja a figura). Mostre que se for adotada essa estratégia, então

$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \approx 2{,}21$$

3. Os valores de h/r que encontramos nos Problemas 1 e 2 estão muito próximos daqueles que realmente ocorrem nas prateleiras do supermercado, mas eles ainda não levam em conta tudo. Se examinarmos mais de perto uma lata, veremos que a tampa e a base são formadas de discos com raio maior que aqueles que são dobrados sobre as extremidades da lata. Se permitíssemos isso, aumentaríamos h/r. Mais significativamente, além do custo do metal, devemos incorporar o custo de manufatura da lata. Vamos supor que a maior parte da despesa esteja em ligar os lados às bordas para formar as latas. Se cortássemos os discos dos hexágonos como no Problema 2, então o custo total seria proporcional a

$$4\sqrt{3}\,r^2 + 2\pi rh + k(4\pi r + h)$$

onde k é o inverso do comprimento que pode ser ligado ao custo por uma unidade de área de metal. Mostre que essa expressão é minimizada quando

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}} \cdot \frac{2\pi - h/r}{\pi h/r - 4\sqrt{3}}$$

4. Desenhe $\sqrt[3]{V}/k$ como uma função de $x = h/r$ e use seu gráfico para argumentar que quando uma lata é grande ou a junção é barata, deveríamos fazer h/r aproximadamente 2,21 (como no Problema 2). Mas quando a lata é pequena ou a junção é cara, h/r deve ser substancialmente maior.

5. Nossa análise mostra que as latas grandes devem ser quase quadradas, mas as latas pequenas devem ser altas e estreitas. Examine as formas relativas das latas em um supermercado. Nossa conclusão é de forma geral verdadeira na prática? Há exceções? Você pode apontar as razões de latas pequenas não serem sempre altas e estreitas?

4.8 Método de Newton

Suponha que um vendedor de carro ponha um carro à venda por \$ 18.000, ou em pagamentos de \$ 375 mensais durante cinco anos. Você gostaria de saber qual a taxa de juros mensal que o vendedor de fato está cobrando. Para encontrar a resposta você deve resolver a equação

$$\boxed{1} \qquad 48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0$$

(Os detalhes são explicados no Exercício 41.) Como você deve resolver a equação?

Para uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ existe uma fórmula bem conhecida para as raízes. Para as equações de terceiro e quarto grau também existem fórmulas para as raízes, mas elas são extremamente complicadas. Se f for um polinômio de grau 5 ou maior, não existe nenhuma fórmula. Da mesma forma, não existe uma fórmula que nos possibilite encontrar as raízes exatas de uma equação transcendental como $\cos x = x$.

Podemos encontrar uma solução *aproximada* para a Equação 1 traçando o lado esquerdo da equação. Usando uma ferramenta gráfica, e após experimentar com janela retangular, obtemos o gráfico na Figura 1.

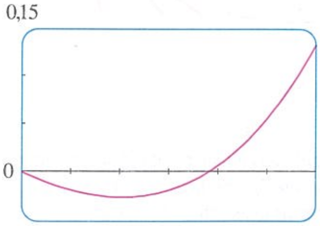


FIGURA 1