4.4 Exercícios

1–4 Dado que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \lim_{x\to a} h(x) = 1$$

$$\lim_{x\to a} p(x) = \infty \quad \lim_{x\to a} q(x) = \infty$$

quais dos limites a seguir são formas indeterminadas? Para aqueles que não são formas indeterminadas, calcule o limite quando possível.

1. (a) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$ (c) $\lim_{x\to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$

(d) $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$ (e) $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

2. (a) $\lim_{x\to a} [f(x)p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [h(x)p(x)]$

(c) $\lim_{x\to a} [p(x)q(x)]$

3. (a) $\lim_{x\to a} [f(x) - p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [p(x) - q(x)]$

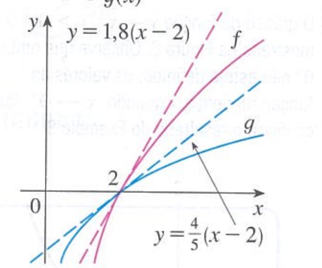
(c) $\lim_{x\to a} [p(x) + q(x)]$

4. (a) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{p(x)}$ (c) $\lim_{x\to a} [h(x)]^{p(x)}$

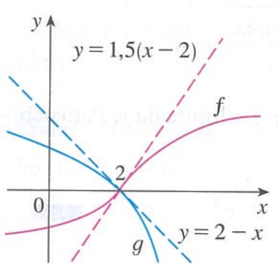
(d) $\lim_{x\to a} [p(x)]^{f(x)}$ (e) $\lim_{x\to a} [p(x)]^{q(x)}$ (f) $\lim_{x\to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

5–6 Use os gráficos de f e g e suas retas tangentes em (2, 0) para encontrar $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

5.



6.



7-66 Encontre o limite. Use a Regra de l'Hôspital quando for apropriado. Se houver um método mais elementar, considere utilizá-lo. Se a Regra de l'Hôspital não se aplicar, explique o porquê.

7. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

8. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$

9. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^3 - 1}$

10. $\lim_{x\to 1/2} \dfrac{6x^2 + 5x - 4}{4x^2 + 16x - 9}$

11. $\lim_{x\to(\pi/2)^+} \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{tg} 5x}$

13. $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^{2t} - 1}{\operatorname{sen} t}$

14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos x}$

15. $\lim_{\theta\to \pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen} \theta}{1 + \cos 2\theta}$

16. $\lim_{\theta\to \pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cossec} \theta}$

17. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

18. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} \pi x}$

19. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

20. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln \ln x}{x}$

21. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^8 - 1}{t^5 - 1}$

22. $\lim_{t\to 0} \dfrac{8^t - 5^t}{t}$

23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 4x}}{x}$

24. $\lim_{u\to\infty} \dfrac{e^{u/10}}{u^3}$

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x - x}{x^3}$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tgh} x}{\operatorname{tg} x}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x}$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$

30. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

31. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x3^x}{3^x - 1}$

32. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

33. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{tg}^{-1}(4x)}$

35. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x}$

36. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^x - 1}{\ln x + x - 1}$

37. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - ax + a - 1}{(x - 1)^2}$

38. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

39. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$

40. $\lim_{x\to a^+} \dfrac{\cos x \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$

41. $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}(\pi/x)$

42. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\, e^{-x/2}$

43. $\lim_{x\to 0} \operatorname{cotg} 2x \operatorname{sen} 6x$

44. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

45. $\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2}$

46. $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{tg}(1/x)$

47. $\lim_{x\to 1^+} \ln x \operatorname{tg}(\pi x/2)$

48. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \cos x \sec 5x$

49. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

50. $\lim_{x\to 0} (\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x)$

51. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$

52. $\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x} \right)$

53. $\lim_{x\to\infty} (x - \ln x)$

54. $\lim_{x\to 1^+} [\ln(x^7 - 1) - \ln(x^5 - 1)]$

55. $\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

56. $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} 2x)^x$

57. $\lim_{x\to 0} (1 - 2x)^{1/x}$

58. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x} \right)^{bx}$

59. $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$

60. $\lim_{x\to\infty} x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$

61. $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

62. $\lim_{x\to\infty} (e^x + x)^{1/x}$

É necessário o uso de uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

63. $\lim_{x\to 0^+} (4x+1)^{\text{cotg}\, x}$

64. $\lim_{x\to 1} (2-x)^{\text{tg}(\pi x/2)}$

65. $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$

66. $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$

67–68 Use gráficos para estimar o valor do limite. A seguir, use a Regra de l'Hôpital para encontrar o valor exato.

67. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$

68. $\lim_{x\to 0} \dfrac{5^x-4^x}{3^x-2^x}$

69–70 Ilustre a Regra de l'Hôspital fazendo o gráfico de $f(x)/g(x)$ e $f'(x)/g'(x)$ próximo de $x=0$, para ver que essas razões têm o mesmo limite quando $x \to 0$. Calcule também o valor exato do limite.

69. $f(x)=e^x-1, \quad g(x)=x^3+4x$

70. $f(x)=2x \operatorname{sen} x, \quad g(x)=\sec x - 1$

71. Demonstre que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}=\infty$$

para qualquer inteiro positivo n. Isso mostra que a função exponencial tende mais rapidamente ao infinito que qualquer potência de x.

72 Demonstre que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p}=0$$

para todo número $p>0$. Isso mostra que a função logaritmo tende a infinito mais vagarosamente que qualquer potência de x.

73–74 O que acontece se você tentar usar a Regra de l'Hôspital para encontrar o limite? Calcule o limite usando outro método.

73. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

74. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \dfrac{\sec x}{\operatorname{tg} x}$

75. Investigue a família de curvas dada por $f(x)=e^x-cx$. Em particular, encontre os limites quando $x\to\pm\infty$ e determine os valores de c para os quais f tem um mínimo absoluto. O que acontece aos pontos mínimos quando c cresce?

76. Se um objeto de massa m é solto a partir do repouso, um modelo para sua velocidade v após t segundos, levando-se em conta a resistência do ar, é

$$v=\frac{mg}{c}(1-e^{-ct/m})$$

Onde g é a aceleração da gravidade e c é uma constante positiva. (No Capítulo 9 deduziremos essa equação a partir da hipótese de que a resistência do ar é proporcional à velocidade do objeto; c é a constante proporcionalidade.)

(a) Calcule $\lim_{t\to\infty} v$. Qual o significado desse limite?

(b) Para um valor fixo de t, use a Regra de l'Hôspital para calcular $\lim_{c\to 0^+} v$. O que você pode concluir sobre a velocidade de um objeto caindo no vácuo?

77. Se um montante inicial de dinheiro A_0 for investido a uma taxa de juros r capitalizada n vezes ao ano, o valor do investimento após t anos será

$$A=A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Se $n\to\infty$, nos referimos à *capitalização contínua* de juros. Use a regra de l'Hôspital para mostrar que se os juros forem capitalizados continuamente, então o montante após t anos será

$$A=A_0e^{rt}$$

78. Se uma bola de metal de massa m for lançada na água e a força de resistência for proporcional ao quadrado da velocidade, então a distância que a bola percorreu até o instante t é dada por

$$s(t)=\frac{m}{c}\ln\cosh\sqrt{\frac{gc}{mt}}$$

onde c é uma constante positiva. Encontre $\lim_{c\to 0^+} s(t)$.

79. Se um campo eletrostático E agir em um dielétrico polar líquido ou gasoso, o momento de dipolo resultante P por unidade de volume é

$$P(E)=\frac{e^E+e^{-E}}{e^E-e^{-E}}-\frac{1}{E}$$

Mostre que $\lim_{E\to 0^+} P(E)=0$.

80. Um cabo de metal tem raio r e é coberto por isolante, de modo que a distância do centro do cabo ao exterior do isolante é R. A velocidade de um impulso elétrico do cabo é

$$v=-c\left(\frac{r}{R}\right)^2\ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

onde c é uma constante positiva. Encontre os seguintes limites e interprete suas respostas.

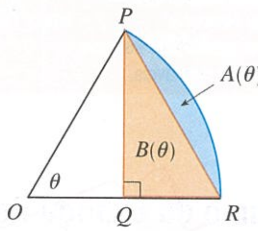
(a) $\lim_{R\to r^+} v$ (b) $\lim_{r\to 0^+} v$

81. A primeira aparição impressa da Regra de l'Hôspital foi em um livro *Analyse des infiniment petits* publicado pelo marquês de l'Hôspital em 1696. Esse foi o primeiro *livro* de cálculo publicado e o exemplo que o marquês usou em seu livro para ilustrar sua regra foi encontrar o limite da função

$$y=\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{aax}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$$

quando x tende a a, onde $a>0$. (Naquela época era comum escrever aa no lugar de a^2.) Resolva esse problema.

82. A figura mostra um setor de um círculo com ângulo central θ. Seja $A(\theta)$ a área do segmento entre a corda PR e o arco PR. Seja $B(\theta)$ a área do triângulo PQR. Encontre $\lim_{\theta\to 0^+} A(\theta)/B(\theta)$.



83. Calcule $\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)\right]$.

84. Suponha que f seja uma função positiva. Se $\lim_{x\to a} f(x)=0$ e $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$, mostre que

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=0$$

Isso mostra que 0^∞ não é uma forma indeterminada.

85. Se f' for contínua, $f(2)=0$ e $f'(2)=7$, calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2+3x)+f(2+5x)}{x}$$

86. Para quais valores de a e b a equação a seguir é válida?

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^3}+a+\frac{b}{x^2}\right)=0$$

87. Se f' for contínua, use a Regra de l'Hôspital para mostrar que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x)$$

Explique o significado dessa equação utilizando um diagrama.

88. Se f'' for contínua, mostre que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x)$$

89. Considere

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

(a) Use a definição de derivada para calcular $f'(0)$.

(b) Mostre que f tem derivadas de todas as ordens que são definidas em $\mathbb{R}$. [*Dica:* Primeiro mostre por indução que há um polinômio $p_n(x)$ e um número inteiro não negativo k_n tais que $f^{(n)}(x)=p_n(x)f(x)/x^{k_n}$ para $x\neq 0$.]

90. Considere

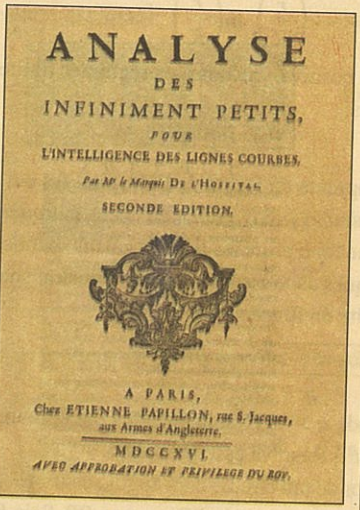
$$f(x)=\begin{cases} |x|^x & \text{se } x\neq 0\\ 1 & \text{se } x=0\end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em 0.

(b) Pesquise graficamente se f é derivável em 0 por meio de sucessivos *zooms* em direção ao ponto (0, 1) sobre o gráfico de f.

(c) Mostre que f não é derivável em 0. Como reconciliar esse fato com a aparência do gráfico na parte (b)?

PROJETO ESCRITO AS ORIGENS DA REGRA DE L'HÔSPITAL



Thomas Fisher Rare Book Library

www.stewartcalculus.com
A internet é outra fonte de informação para este projeto. Clique em *History of Mathematics,* em www.stewartcalculus.com, para uma lista de websites confiáveis.

A Regra de l'Hôspital foi publicada pela primeira vez em 1696, no livro *Analyse des infiniment petits*, do marquês de l'Hôspital, mas na verdade ela foi descoberta em 1694 pelo matemático suíço John (Johann) Bernoulli. A explicação para esse fato é que esses dois matemáticos fizeram um curioso acordo, que dava ao marquês de l'Hôspital os direitos das descobertas de Bernoulli. Os detalhes desse acordo, inclusive a tradução da carta de l'Hôspital para Bernoulli propondo o arranjo, podem ser encontrados no livro de Eves [1].

Escreva um relatório sobre as origens histórica e matemática da Regra de l'Hôspital. Comece fornecendo uma breve biografia de ambos (o dicionário editado por Gillispie [2] é uma boa fonte), e resuma o arranjo feito por eles. A seguir, dê o enunciado da Regra de l'Hôspital, que é encontrada no livro de Struik [4] e mais resumidamente no livro de Katz [3]. Observe que l'Hôspital e Bernoulli formularam geometricamente a regra e deram a resposta em termos de diferenciais. Compare seus enunciados com a versão da regra de Bernoulli dada na Seção 4.4 e mostre que os dois enunciados são essencialmente iguais.

1. Eves, H. *em Mathematical Circles Volume 2:* Quadrantes III e IV Boston: Prindle, Weber and Schmidt, 1969. pp. 20–22.
2. Gillispie, C. C. *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Scribner's, 1974. Veja o artigo em Johann Bernoulli by E. A. Fellmann e J. O. Fleckenstein em Volume II e o artigo em Marquês de l'Hôspital por Abraham Robinson no Volume VIII.
3. Katz, V. *A History of Mathematics:* An Introduction. Nova York: HarperCollins, 1993. p. 484.
4. Struik, D. J. *A Sourcebook in Mathematics,* 1200–1800. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969. p. 315–316.

4.5 Resumo do Esboço de Curvas

Até o momento, estivemos preocupados com alguns aspectos particulares de esboço de curvas: domínio, imagem e simetria no Capítulo 1; limites, continuidade e assíntotas no Capítulo 2; derivadas e tangentes nos Capítulos 2 e 3; e valores extremos, intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade, pontos de inflexão e Regra de L'Hôspital neste capítulo. Chegou a hora de agruparmos todas essas informações para esboçar gráficos que revelem os aspectos importantes das funções.

Você pode se perguntar: por que não usar simplesmente uma calculadora gráfica ou computador para traçar uma curva? Por que precisamos usar o cálculo?

É verdade que a tecnologia moderna é capaz de produzir gráficos bem precisos. Contudo, mesmo a melhor ferramenta gráfica deve ser usada inteligentemente. Vimos na Seção 1.4 que é extremamente importante escolher uma janela retangular adequada para evitar obter um gráfico que nos leve a conclusões errôneas. (Veja, em particular, os Exemplos 1, 3, 4 e 5 naquela seção.) O uso do cálculo nos possibilita descobrir os aspectos mais interessantes dos gráficos e, em muitos casos, calcular *exatamente* os pontos de máximo, de mínimo e de inflexão.

Por exemplo, a Figura 1 mostra o gráfico de $f(x) = 8x^3 - 21x^2 + 18x + 2$. À primeira vista ele parece razoável; ele tem a mesma forma de curvas cúbicas como $y = x^3$, e não aparenta ter ponto de máximo ou de mínimo. Mas, se você calcular a derivada, verá que existe um máximo quando $x = 0{,}75$ e um mínimo quando $x = 1$. Realmente, se dermos um *zoom* nessa parte do gráfico, veremos o comportamento exibido na Figura 2. Sem o cálculo, poderíamos facilmente não ter reparado nisso.

Na próxima seção desenharemos os gráficos de funções usando a interação entre o cálculo e as ferramentas gráficas. Nesta seção faremos gráficos considerando primeiro a informação do roteiro a seguir. Não pressupomos que você tenha uma ferramenta gráfica, mas, se você tiver alguma, use-a somente para verificar o resultado de seu trabalho.

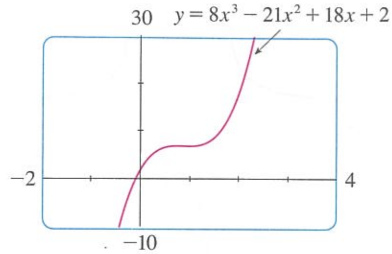


FIGURA 1

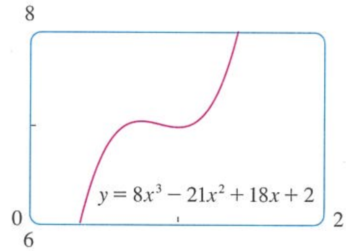


FIGURA 2

Roteiro para Esboçar uma Curva

A lista a seguir pretende servir como um guia para esboçar uma curva $y = f(x)$ à mão. Nem todos os itens são relevantes para cada função. (Por exemplo, uma curva pode não ter uma assíntotas ou possuir simetria.) No entanto, o roteiro fornece todas as informações necessárias para fazer um esboço que mostre os aspectos mais importantes da função.

A. Domínio É frequentemente útil começar determinando o domínio D de f, isto é, o conjunto dos valores de x para os quais $f(x)$ está definida.

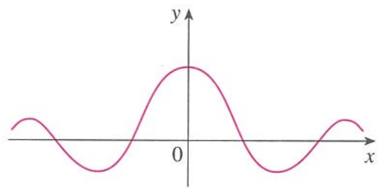
B. Intersecções com os Eixos A intersecção com o eixo y é $f(0)$. Para encontrarmos as intersecções com o eixo x, fazemos $y = 0$ e isolamos x. (Você pode omitir esse passo se a equação for difícil de resolver.)

C. Simetria

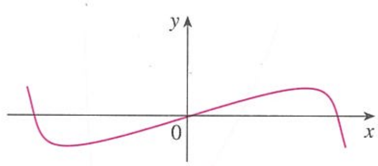
(i) Se $f(-x) = f(x)$ para todo x em D, isto é, a equação da curva não muda se x for substituído por $-x$, então f é uma **função par**, e a curva é simétrica em relação ao eixo y. Isso significa que nosso trabalho fica cortado pela metade. Se soubermos como é a curva para $x \geqslant 0$, então precisaremos somente refletir em torno do eixo y para obter a curva completa [veja a Figura 3(a)]. Alguns exemplos são: $y = x^2$, $y = x^4$, $y = |x|$ e $y = \cos x$.

(ii) Se $f(-x) = -f(x)$ para todo x em D, então f é uma **função ímpar** e a curva é simétrica em realação à origem. Novamente, podemos obter a curva completa se soubermos como ela é para $x \geqslant 0$. [Gire 180° em torno da origem; veja a Figura 3(b).] Alguns exemplos simples de funções ímpares são $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ e $y = \operatorname{sen} x$.

(iii) Se $f(x + p) = f(x)$ para todo x em D, onde p é uma constante positiva, então f é chamada **função periódica**, e o menor desses números p é chamado **período**. Por exemplo, $y = \operatorname{sen} x$ tem o período 2π e $y = \operatorname{tg} x$ tem período π. Se soubermos como é o gráfico em um intervalo de comprimento p, então poderemos usar a translação para esboçar o gráfico inteiro (veja a Figura 4).



(a) Função par: simetria reflexional



(b) Função ímpar: simetria rotacional

FIGURA 3

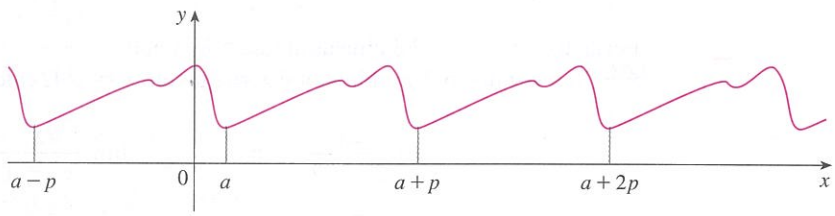


FIGURA 4
Função periódica: simetria translacional

D. Assíntotas

(i) *Assíntotas horizontais*. Lembre-se, da Seção 2.6, de que se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, então a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$. Se resultar que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (ou $-\infty$), então não temos uma assíntota à direita, o que também é uma informação, proveitosa no esboço da curva.

(ii) *Assíntotas verticais*. Lembre-se, da Seção 2.2, de que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical se pelo menos uma das seguintes afirmativas for verdadeira:

1
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

(Para as funções racionais, você pode localizar as assíntotas verticais igualando a zero o denominador, após ter cancelado qualquer fator comum. Mas para outras funções esse método não se aplica.) Além disso, ao esboçar a curva é muito útil saber exatamente qual das afirmativas em $\boxed{1}$ é verdadeira. Se $f(a)$ não estiver definida, mas a for uma extremidade do domínio de f, então você deve calcular $\lim_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x)$, seja esse limite infinito ou não.

(iii) *Assíntotas oblíquas*. Elas serão discutidas no fim desta seção.

E. Intervalos de Crescimento ou Decrescimento Use o Teste C/D. Calcule $f'(x)$ e encontre os intervalos nos quais $f'(x)$ é positiva (f é crescente) e os intervalos nos quais $f'(x)$ é negativa (f é decrescente).

F. Valores Máximos e Mínimos Locais Encontre os números críticos de f [os números c nos quais $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe]. Use então o Teste da Primeira Derivada. Se f' muda de positiva para negativa em um número crítico c, então $f(c)$ é um máximo local. Se f' muda de negativa para positiva em c, então $f(c)$ é um mínimo local. Apesar de ser usualmente preferível usar o Teste da Primeira Derivada, você pode usar o Teste da Segunda Derivada se $f'(c) = 0$ e $f''(c) \neq 0$. Então $f''(c) > 0$ implica que $f(c)$ é um local mínimo, enquanto $f''(c) < 0$ implica que $f(c)$ é um máximo local.

G. Concavidade e Pontos de Inflexão Calcule $f''(x)$ e use o Teste da Concavidade. A curva é côncava para cima se $f''(x) > 0$, e côncava para baixo se $f''(x) < 0$. Os pontos de inflexão ocorrem quando muda a direção da concavidade.

H. Esboço da Curva Usando as informações nos itens A–G, faça o gráfico. Coloque as assíntotas como linhas tracejadas. Marque as intersecções com os eixos, os pontos de máximo e de mínimo e os pontos de inflexão. Então, faça a curva passar por esses pontos, subindo ou descendo de acordo com E, com a concavidade de acordo com G e tendendo às assíntotas. Se precisão adicional for desejada próximo de algum ponto, você poderá calcular o valor da derivada aí. A tangente indica a direção na qual a curva segue.

EXEMPLO 1 Use o roteiro para esboçar a curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

A. O domínio é

$$\{x \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \mid x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

B. As intersecções com os eixos x e y são ambas 0.

C. Uma vez que $f(-x) = f(x)$, a função f é par. A curva é simétrica em relação ao eixo y.

D.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2$$

Portanto, a reta $y = 2$ é uma assíntota horizontal.

Uma vez que o denominador é zero quando $x = \pm 1$, calculamos os seguintes limites:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty$$

Consequentemente, as retas $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais. Essa informação sobre os limites e as assíntotas permite-nos traçar um esboço preliminar na Figura 5 mostrando as partes da curva próximas das assíntotas.

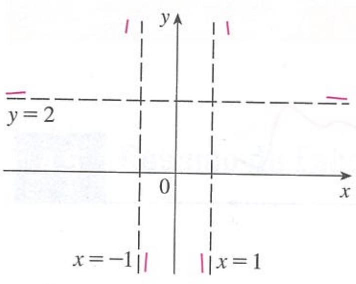


FIGURA 5
Esboço preliminar

Mostramos que a curva se aproxima de sua assíntota horizontal por cima na Figura 5; isso está confirmado pelos intervalos de crescimento e decrescimento.

E.

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)(4x) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

Como $f'(x) > 0$ quando $x < 0$ $(x \neq -1)$ e $f'(x) < 0$ quando $x > 0$ $(x \neq 1)$, f é crescente em $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0)$ e decrescente em $(0, 1)$ e $(1, \infty)$.

F. O único número crítico é $x = 0$. Uma vez que f' muda de positiva para negativa em 0, $f(0) = 0$ é um máximo local pelo Teste da Primeira Derivada.

G. $$f''(x) = \frac{(x^2-1)^2(-4) + 4x \cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

Uma vez que $12x^2 + 4 > 0$ para todo x, temos

$$f''(x) > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff |x| > 1$$

e $f''(x) < 0 \iff |x| < 1$. Assim, a curva é côncava para cima nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$ e côncava para baixo em $(-1, 1)$. Não há ponto de inflexão, já que 1 e -1 não estão no domínio de f.

H. Usando a informação em E–G, finalizamos o esboço da Figura 6.

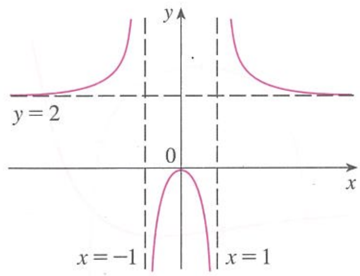


FIGURA 6
Esboço final de $y = \frac{2x^2}{x^2-1}$

EXEMPLO 2 Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$.

A. Domínio $= \{x \mid x + 1 > 0\} = \{x \mid x > -1\} = (-1, \infty)$

B. As intersecções com os eixos x e y são ambas 0.

C. Simetria: nenhuma.

D. Uma vez que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \infty$$

não há assíntota horizontal. Como $\sqrt{x+1} \to 0$ quando $x \to -1^+$ e $f(x)$ é sempre positiva, temos

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \infty$$

então a reta $x = -1$ é uma assíntota vertical.

E. $$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x+1} - x^2 \cdot 1/(2\sqrt{x+1})}{x+1} = \frac{x(3x+4)}{2(x+1)^{3/2}}$$

Vemos que $f'(x) = 0$ quando $x = 0$ (note que $-\frac{4}{3}$ não está no domínio de f), então o único número crítico é 0. Como $f'(x) < 0$ quando $-1 < x < 0$ e $f'(x) > 0$ quando $x > 0$, f é decrescente em $(-1, 0)$ e crescente em $(0, \infty)$.

F. Uma vez que $f'(0) = 0$ e f' muda de negativa para positiva em 0, $f(0) = 0$ é um mínimo local (e absoluto) pelo Teste da Primeira Derivada.

G. $$f''(x) = \frac{2(x+1)^{3/2}(6x+4) - (3x^2+4x)3(x+1)^{1/2}}{4(x+1)^3} = \frac{3x^2+8x+8}{4(x+1)^{5/2}}$$

Observe que o denominador é sempre positivo. O numerador é o polinômio quadrático $3x^2 + 8x + 8$, que é sempre positivo, pois seu discriminante é $b^2 - 4ac = -32$, que é negativo, e o coeficiente de x^2 é positivo. Assim, $f''(x) > 0$ para todo x no domínio de f, o que significa que f é côncava para cima em $(-1, \infty)$ e não há ponto de inflexão.

H. A curva está esboçada na Figura 7.

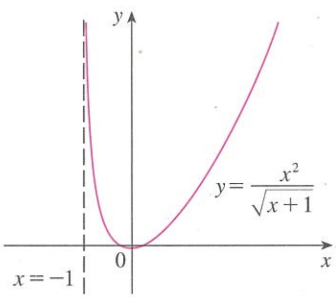


FIGURA 7

EXEMPLO 3 Esboce o gráfico de $f(x) = xe^x$.

A. O domínio é $\mathbb{R}$.

B. As intersecções com os eixos x e y são ambas 0.

C. Simetria: nenhuma.

D. Como ambos x e e^x tornam-se grandes quando $x \to \infty$, temos que $\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$. Quando $x \to -\infty$, contudo, $e^x \to 0$ e temos um produto indeterminado que requer o uso da Regra de l'Hôspital:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} (-e^x) = 0$$

Assim, o eixo x é uma assíntota horizontal.

E. $$f'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x$$

Uma vez que e^x é sempre positiva, vemos que $f'(x) > 0$ quando $x + 1 > 0$ e $f'(x) < 0$ quando $x + 1 < 0$. Logo, f é crescente em $(-1, \infty)$ e decrescente em $(-\infty, -1)$.

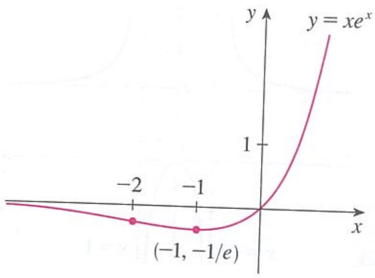


FIGURA 8

F. Como $f'(-1) = 0$ e f' muda de negativa para positiva em $x = -1$, $f(-1) = -e^{-1}$ é um mínimo local (e absoluto).

G.
$$f''(x) = (x + 1)e^x + e^x = (x + 2)e^x$$

Visto que $f''(x) > 0$ se $x > -2$ e $f''(x) < 0$ se $x < -2$, f é côncava para cima em $(-2, \infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty, -2)$. O ponto de inflexão é $(-2, -2e^{-2})$.

H. Usamos essa informação para traçar a curva da Figura 8.

EXEMPLO 4 Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$.

A. O domínio é $\mathbb{R}$.

B. A intersecção com o eixo y é $f(0) = \frac{1}{2}$. As intersecções com o eixo x ocorrem quando $\cos x = 0$, ou seja, $x = (2n + 1)\,\pi/2$, em que n é um número inteiro.

C. f não é nem par nem ímpar, mas $f(x + 2\pi) = f(x)$ para todo x; logo, f é periódica e tem um período 2π. Dessa forma, precisamos considerar somente $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ e então estender a curva por translação na parte H.

D. Assíntotas: nenhuma.

E.
$$f'(x) = \frac{(2 + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) - \cos x\,(\cos x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^2} = -\frac{2\operatorname{sen} x + 1}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

Logo, $f'(x) > 0$ quando $2\operatorname{sen} x + 1 < 0 \iff \operatorname{sen} x < -\frac{1}{2} \iff 7\pi/6 < x < 11\pi/6$. Assim, f é crescente em $(7\pi/6, 11\pi/6)$ e decrescente em $(0, 7\pi/6)$ e $(11\pi/6, 2\pi)$.

F. A partir da parte E e do Teste da Primeira Derivada, vemos que o valor mínimo local é $f(7\pi/6) = -1/\sqrt{3}$ e o valor máximo local é $f(11\pi/6) = 1/\sqrt{3}$.

G. Se usarmos a regra do quociente novamente, obtemos

$$f''(x) = -\frac{2\cos x\,(1 - \operatorname{sen} x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^3}$$

Como $(2 + \operatorname{sen} x)^3 > 0$ e $1 - \operatorname{sen} x \geqslant 0$ para todo x, sabemos que $f''(x) > 0$ quando $\cos x < 0$, ou seja, $\pi/2 < x < 3\pi/2$. Assim, f é côncava para cima em $(\pi/2, 3\pi/2)$ e côncava para baixo em $(0, \pi/2)$ e $(3\pi/2, 2\pi)$. Os pontos de inflexão são $(\pi/2, 0)$ e $(3\pi/2, 0)$.

H. O gráfico da função restrita a $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ é mostrado na Figura 9. Então, nós o estendemos, usando a periodicidade, para completar o gráfico na Figura 10.

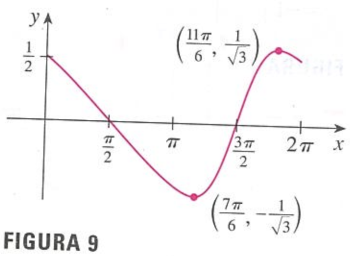


FIGURA 9

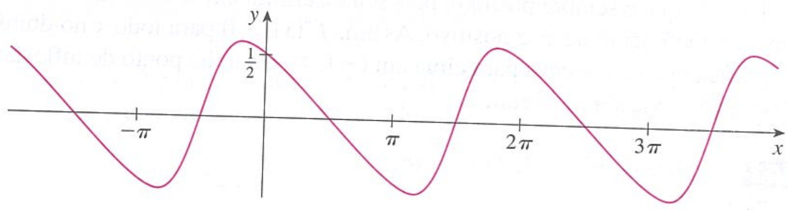


FIGURA 10

EXEMPLO 5 Esboce o gráfico de $y = \ln(4 - x^2)$.

A. O domínio é

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\} = (-2, 2)$$

B. A intersecção com o eixo y é $f(0) = \ln 4$. Para encontrarmos a intersecção com o eixo x, fazemos

$$y = \ln(4 - x^2) = 0$$

Sabemos que $\ln 1 = 0$, de modo que temos $4 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 3$ e, portanto, as intersecções com o eixo x é $\pm\sqrt{3}$.

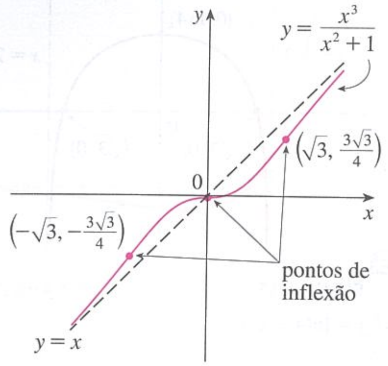


FIGURA 13

G. $$f''(x) = \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2 - (x^4+3x^2)\cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

Visto que $f''(x) = 0$ quando $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}$, montamos a seguinte tabela:

Intervalo	x	$3-x^2$	$(x^2+1)^3$	$f''(x)$	f
$x < -\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$	CC em $(-\infty, -\sqrt{3})$
$-\sqrt{3} < x < 0$	$-$	$+$	$+$	$-$	CB em $(-\sqrt{3}, 0)$
$0 < x < \sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	CC em $(0, \sqrt{3})$
$x > \sqrt{3}$	$+$	$-$	$+$	$-$	CB em $(\sqrt{3}, \infty)$

Os pontos de inflexão são $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$, $(0, 0)$ e $\left(\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$.

H. O gráfico de f está esboçado na Figura 13.

4.5 Exercícios

1–54 Use o roteiro desta seção para esboçar a curva.

1. $y = x^3 + x$
2. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$
3. $y = 2 - 15x + 9x^2 - x^3$
4. $y = 8x^2 - x^4$
5. $y = x(x-4)^3$
6. $y = x^5 - 5x$
7. $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x$
8. $y = (4 - x^2)^5$
9. $y = \dfrac{x}{x-1}$
10. $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$
11. $y = \dfrac{x-x^2}{2-3x+x^2}$
12. $y = \dfrac{x}{x^2-9}$
13. $y = \dfrac{1}{x^2-9}$
14. $y = \dfrac{x^2}{x^2+9}$
15. $y = \dfrac{x}{x^2+9}$
16. $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$
17. $y = \dfrac{x-1}{x^2}$
18. $y = \dfrac{x}{x^3-1}$
19. $y = \dfrac{x^2}{x^2+3}$
20. $y = \dfrac{x^3}{x-2}$
21. $y = (x-3)\sqrt{x}$
22. $y = 2\sqrt{x} - x$
23. $y = \sqrt{x^2+x-2}$
24. $y = \sqrt{x^2+x} - x$
25. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
26. $y = x\sqrt{2-x^2}$
27. $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
28. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
29. $y = x - 3x^{1/3}$
30. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$
31. $y = \sqrt[3]{x^2-1}$
32. $y = \sqrt[3]{x^3+1}$
33. $y = \operatorname{sen}^3 x$
34. $y = x + \cos x$
35. $y = x \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
36. $y = 2x - \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
37. $y = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < 3\pi$
38. $y = \sec x + \operatorname{tg} x, \quad 0 < x < \pi/2$
39. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$
40. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2+\cos x}$
41. $y = \operatorname{arctg}(e^x)$
42. $y = (1-x)e^x$
43. $y = 1/(1+e^{-x})$
44. $y = e^{-x}\operatorname{sen} x, \ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$
45. $y = x - \ln x$
46. $y = e^{2x} - e^x$
47. $y = (1+e^x)^{-2}$
48. $y = e^x/x^2$
49. $y = \ln(\operatorname{sen} x)$
50. $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$
51. $y = xe^{-1/x}$
52. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$
53. $y = e^{3x} + e^{-2x}$
54. $y = \operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

55. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula é
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
onde m_0 é a massa de repouso da partícula, m é a massa quando a partícula se move com velocidade v em relação ao observador e c é a velocidade da luz. Esboce o gráfico de m como uma função de v.

56. Na teoria da relatividade, a energia de uma partícula é
$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + h^2c^2/\lambda^2}$$
em que m_0 é a massa de repouso da partícula, λ é seu comprimento de onda e h é a constante de Planck. Esboce o gráfico de E como uma função de λ. O que o gráfico mostra sobre a força?

57. Um modelo para dispersão de um rumor é dado pela equação
$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$
onde $p(t)$ é a proporção da população que já ouviu o boato no tempo t e a e k são constantes positivas.
(a) Quando a metade da população terá ouvido um rumor?
(b) Quando ocorre a maior taxa de dispersão do boato?
(c) Esboce o gráfico de p.

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

58. Um modelo para a concentração no instante t de uma droga injetada na corrente sanguínea é

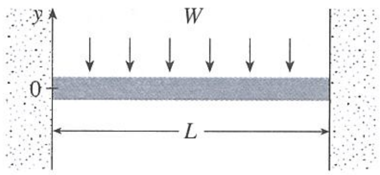
$$C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$$

onde a, b e K são constantes positivas e $b > a$. Esboce o gráfico da função concentração. O que o gráfico nos diz sobre como a concentração varia conforme o tempo passa?

59. A figura mostra uma viga de comprimento L embutida entre paredes de concreto. Se uma carga constante W for distribuída uniformemente ao longo de seu comprimento, a viga assumirá a forma da curva de deflexão

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2$$

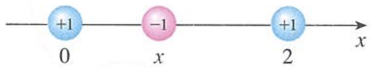
onde E e I são constantes positivas. (E é o módulo de elasticidade de Young, e I é o momento de inércia de uma secção transversal da viga.) Esboce o gráfico da curva de deflexão.



60. A Lei de Coulomb afirma que a força de atração entre duas partículas carregadas é diretamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. A figura mostra partículas com carga 1 localizadas nas posições 0 e 2 sobre o eixo das coordenadas, e uma partícula com a carga -1 em uma posição x entre elas. Segue da Lei de Coulomb que a força resultante agindo sobre a partícula do meio é

$$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{k}{(x-2)^2} \qquad 0 < x < 2$$

onde k é uma constante positiva. Esboce o gráfico da função força resultante. O que o gráfico mostra sobre a força?



61–64 Ache a equação da assíntota oblíqua. Não desenhe a curva.

61. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

62. $y = \dfrac{2x^3 + x^2 + x + 3}{x^2 + 2x}$

63. $y = \dfrac{4x^3 - 2x^2 + 5}{2x^2 + x - 3}$

64. $y = \dfrac{5x^4 + x^2 + x}{x^3 - x^2 + 2}$

65–70 Use o roteiro desta seção para esboçar o gráfico da curva. No passo D, ache uma equação para a assíntota oblíqua.

65. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

66. $y = \dfrac{1 + 5x - 2x^2}{x - 2}$

67. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$

68. $y = \dfrac{x^3}{(x + 1)^2}$

69. $y = 1 + \frac{1}{2}x + e^{-x}$

70. $y = 1 - x + e^{1+x/3}$

71. Mostre que a curva $y = x - \text{tg}^{-1}x$ tem duas assíntotas oblíquas: $y = x + \pi/2$ e $y = x - \pi/2$. Use esse fato para esboçar a curva.

72. Mostre que a curva $y = \sqrt{x^2 + 4x}$ tem duas assíntotas oblíquas: $y = x + 2$ e $y = -x - 2$. Use esse fato para esboçar a curva.

73. Mostre que as retas $y = (b/a)x$ e $y = -(b/a)x$ são assíntotas oblíquas da hipérbole $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

74. Seja $f(x) = (x^3 + 1)/x$. Mostre que

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x^2] = 0$$

Isso mostra que o gráfico de f tende ao gráfico de $y = x^2$, e dizemos que a curva $y = f(x)$ é *assintótica* à parábola $y = x^2$. Use esse fato para ajudá-lo no esboço do gráfico de f.

75. Discuta o comportamento assintótico de $f(x) = (x^4 + 1)/x$ da mesma forma que no Exercício 74. Use então seus resultados para auxiliá-lo no esboço do gráfico de f.

76. Use o comportamento assintótico de $f(x) = \cos x + 1/x^2$ para esboçar seu gráfico sem seguir o roteiro de esboço de curvas desta seção.

4.6 Representação Gráfica com Cálculo e Calculadoras

O método usado para esboçar as curvas na seção precedente foi um auge dentro de nosso estudo de cálculo diferencial. O gráfico foi o objetivo final obtido por nós. Nesta seção, nosso ponto de vista é completamente diferente. *Começamos* aqui com um gráfico produzido por uma calculadora gráfica ou computador e então o refinamos. Usamos o cálculo para nos assegurar de que estão aparentes todos os aspectos importantes da curva. E com o uso de ferramentas gráficas podemos nos dedicar a curvas complicadas demais para tratar sem essa tecnologia. O objetivo aqui é a *interação* entre o cálculo e calculadoras.

Se você ainda não leu a Seção 1.4, deve fazê-lo agora. Ela explica como evitar algumas das armadilhas das ferramentas gráficas através da escolha de janelas retangulares apropriadas.

EXEMPLO 1 Faça o gráfico do polinômio $f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 2x^2$. Use os gráficos de f' e f'' para estimar todos os pontos de máximo e de mínimo e os intervalos de concavidade.

SOLUÇÃO Se especificarmos um domínio, mas não uma imagem, muitas ferramentas gráficas deduzirão uma imagem adequada a partir dos valores calculados. A Figura 1 mostra o gráfico obtido a partir de uma dessas ferramentas se especificarmos que $-5 \leqslant x \leqslant 5$. Embora essa janela retangular seja útil para mostrar que o comportamento assintótico (o comportamento nas extremidades) é o mesmo que o de $y = 2x^6$, é óbvio que estão omitidos os deta-