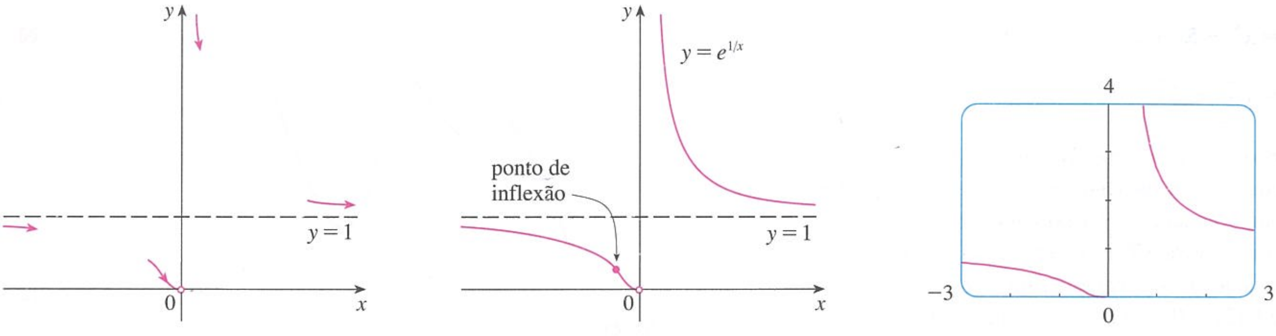



(a) Esboço preliminar (b) Esboço acabado (c) Confirmação computacional

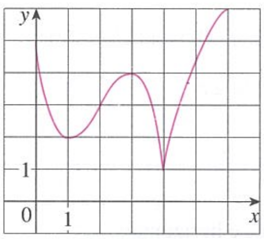
**FIGURA 13**

## 4.3 Exercícios

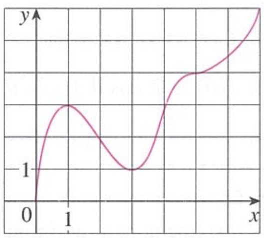
**1–2** Usar o gráfico dado de $f$ para encontrar o seguinte:

(a) Os intervalos abertos nos quais $f$ é crescente.
(b) Os intervalos abertos nos quais $f$ é decrescente.
(c) Os intervalos abertos nos quais $f$ é côncava para cima.
(d) Os intervalos abertos nos quais $f$ é côncava para baixo.
(e) As coordenadas dos pontos de inflexão.

**1.**




**2.**

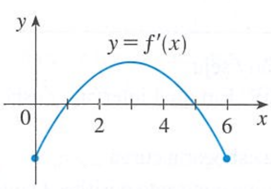



**3.** Suponha que lhe foi dada uma fórmula para uma função $f$.
(a) Como você determina onde $f$ é crescente ou decrescente?
(b) Como você determina onde o gráfico de $f$ é côncavo para cima ou para baixo?
(c) Como você localiza os pontos de inflexão?

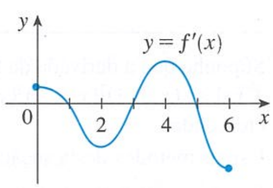
**4.** (a) Enuncie o Teste da Primeira Derivada.
(b) Enuncie o Teste da Segunda Derivada. Em que circunstância ele é inconclusivo? O que você faz se ele falha?

**5-6** O gráfico da *derivada* $f'$ de uma função $f$ está mostrado.
(a) Em quais intervalos $f$ é crescente ou decrescente?
(b) Em que valores de $x$ a função $f$ tem um mínimo ou máximo local?

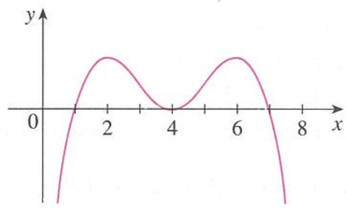
**5.**



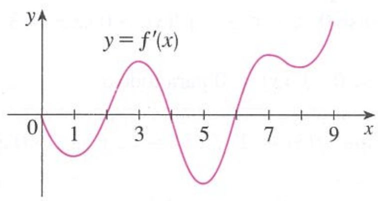

**6.**




**7.** Em cada item, indique as coordenadas $x$ dos pontos de inflexão de $f$. Dê razões para suas escolhas.
(a) Esta curva é o gráfico de $f$.
(b) Esta curva é o gráfico de $f'$.
(c) Esta curva é o gráfico de $f''$.




**8.** O gráfico da primeira derivada $f'$ de uma função $f$ está mostrado.
(a) Em que intervalos $f$ está crescendo? Explique.
(b) Em que valores de $x$ a função $f$ tem um mínimo ou máximo local? Explique.
(c) Em que intervalos $f$ é côncava para cima ou para baixo? Explique.
(d) Quais são as coordenadas dos pontos de inflexão de $f$? Por quê?




**9–18**
(a) Encontre os intervalos nos quais $f$ é crescente ou decrescente.
(b) Encontre os valores máximo e mínimo locais de $f$.
(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

**9.** $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

**10.** $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

**11.** $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

**12.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

**13.** $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

**14.** $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

**15.** $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

**16.** $f(x) = x^2 \ln x$

**17.** $f(x) = x^2 - x - \ln x$

**18.** $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$

**19–21** Encontre os valores máximo e mínimo locais de $f$ usando os Testes da Primeira e da Segunda Derivadas. Qual método você prefere?

É necessário o uso de uma calculadora gráfica ou computador
SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

**19.** $f(x) = x^5 - 5x + 3$

**20.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

**21.** $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x}$

**22.** (a) Encontre os números críticos de $f(x) = x^4(x - 1)^3$.
(b) O que o Teste da Segunda Derivada mostra para você sobre o comportamento de $f$ nesses números críticos?
(c) O que mostra o Teste da Primeira Derivada?

**23.** Suponha que $f''$ seja contínua em $(-\infty, \infty)$.
(a) Se $f'(2) = 0$ e $f''(2) = -5$, o que podemos dizer sobre $f$?
(b) Se $f'(6) = 0$ e $f''(6) = 0$, o que podemos dizer sobre $f$?

**24–29** Esboce o gráfico de uma função que satisfaça a todas as condições dadas.

**24.** Assíntota vertical $x = 0$, $f'(x) > 0$ se $x < -2$,
$f'(x) < 0$ se $x > -2$ $(x \neq 0)$,
$f''(x) < 0$ se $x < 0$, $f''(x) > 0$ se $x > 0$

**25.** $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$,
$f'(x) > 0$ se $x < 0$ ou $2 < x < 4$,
$f'(x) < 0$ se $0 < x < 2$ ou $x > 4$,
$f''(x) > 0$ se $1 < x < 3$, $f''(x) < 0$ se $x < 1$ ou $x > 3$

**26.** $f'(1) = f'(-1) = 0$, $f'(x) < 0$ se $|x| < 1$,
$f'(x) > 0$ se $1 < |x| < 2$, $f'(x) = -1$ se $|x| > 2$,
$f''(x) < 0$ se $-2 < x < 0$, ponto de inflexão $(0, 1)$

**27.** $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ se $|x| > 2$,
$f'(-2) = 0$, $\lim_{x \to 2} |f'(x)| = \infty$, $f''(x) > 0$ se $x \neq 2$

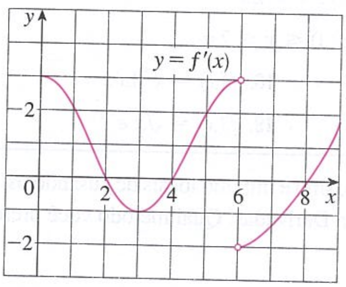
**28.** $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ se $|x| > 2$,
$f'(2) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, $f(-x) = -f(x)$,
$f''(x) < 0$ se $0 < x < 3$, $f''(x) > 0$ se $x > 3$

**29.** $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$ para todo $x$

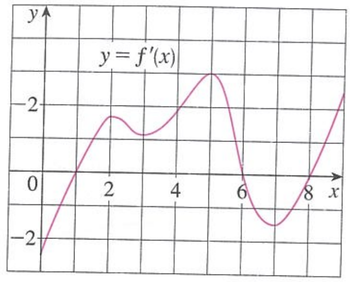
**30.** Suponha que $f(3) = 2$, $f'(3) = \frac{1}{2}$ e $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$ para todo $x$.
(a) Esboce um gráfico possível de $f$.
(b) Quantas soluções a equação $f(x) = 0$ tem? Por quê?
(c) É possível que $f'(2) = \frac{1}{3}$? Por quê?

**31–32** O gráfico da derivada $f'$ de uma função contínua $f$ está mostrado.
(a) Em que intervalos $f$ está crescendo? E decrescendo?
(b) Em que valores de $x$ a função $f$ tem um máximo local? E no mínimo local?
(c) Em que intervalos $f$ é côncava para cima? E côncava para baixo?
(d) Diga as coordenadas $x$ dos pontos de inflexão.
(e) Supondo que $f(0) = 0$, esboce o gráfico de $f$.

**31.**




**32.**




**33–44**
(a) Encontre os intervalos em que a função é crescente ou decrescente.
(b) Encontre os valores máximos ou mínimos locais.
(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.
(d) Use as informações das partes (a)–(c) para esboçar o gráfico. Verifique seu trabalho com uma ferramenta gráfica, se você tiver uma.

**33.** $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

**34.** $f(x) = 2 + 3x - x^3$

**35.** $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$

**36.** $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

**37.** $h(x) = (x + 1)^5 - 5x - 2$

**38.** $h(x) = 5x^3 - 3x^5$

**39.** $F(x) = x\sqrt{6 - x}$

**40.** $G(x) = 5x^{2/3} - 2x^{5/3}$

**41.** $C(x) = x^{1/3}(x + 4)$

**42.** $f(x) = \ln(x^4 + 27)$

**43.** $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

**44.** $S(x) = x - \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 4\pi$

**45–52**
(a) Encontre as assíntotas verticais e horizontais.
(b) Encontre os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente.
(c) Encontre os valores máximos e mínimos locais.
(d) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.
(e) Use a informação das partes (a)–(d) para esboçar o gráfico de $f$.

**45.** $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

**46.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

**47.** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

**48.** $f(x) = \dfrac{e^x}{1 - e^x}$

**49.** $f(x) = e^{-x^2}$

**50.** $f(x) = x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}\ln x$

**51.** $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

**52.** $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$

**53.** Suponha que a derivada da função $f$ seja $f'(x) = (x + 1)^2(x - 3)^5(x - 6)^4$. Em qual intervalo $f$ está crescendo?

**54.** Use os métodos desta seção para esboçar a curva $y = x^3 - 3a^2x + 2a^3$, onde $a$ é uma constante positiva. O que os membros desta família de curvas têm em comum? Como eles diferem entre si?

**55–56**
(a) Use um gráfico de $f$ para estimar os valores máximo e mínimo. Então, encontre os valores exatos.
(b) Estime o valor de $x$ em que $f$ cresce mais rapidamente. Então, encontre o valor exato.

**55.** $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ **56.** $f(x) = x^2e^{-x}$

**57–58**

(a) Use um gráfico de $f$ para estimar aproximadamente os intervalos de concavidade e as coordenadas dos pontos de inflexão.

(b) Use um gráfico de $f''$ para dar uma estimativa melhor.

**57.** $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

**58.** $f(x) = x^3(x-2)^4$

SCA **59-60** Estime os intervalos de concavidade com precisão de uma casa decimal usando um sistema de computação algébrica para calcular e fazer o gráfico de $f''$.

**59.** $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ **60.** $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{tg}^{-1} x}{1+x^3}$

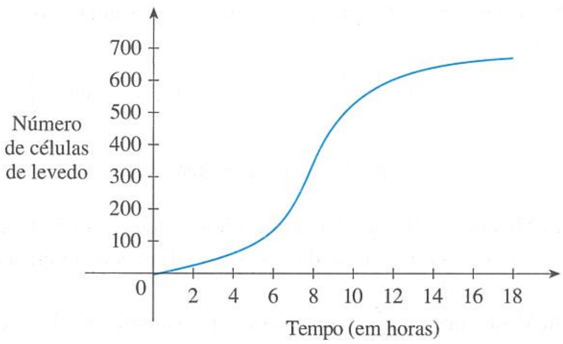
**61.** É dado o seguinte gráfico de uma população de células de levedo em uma nova cultura de laboratório em função do tempo.

(a) Descreva como varia a taxa de crescimento populacional.

(b) Quanto a taxa é mais alta?

(c) Em quais intervalos a função população é côncava para cima ou para baixo?

(d) Estime as coordenadas do ponto de inflexão.




**62.** Seja $f(t)$ a temperatura no instante $t$ onde você mora e suponha que no instante $t = 3$ você se sinta desconfortavelmente quente. Como você se sente em relação às informações dadas em cada caso?

(a) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = 4$

(b) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = -4$

(c) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = 4$

(d) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = -4$

**63.** Seja $K(t)$ uma medida do conhecimento adquirido por você estudando $t$ horas para um teste. Qual será maior: $K(8) - K(7)$ ou $K(3) - K(2)$? O gráfico de $K$ é côncavo para cima ou para baixo? Por quê?

**64.** A caneca mostrada na figura está sendo enchida com café a uma taxa constante (medida em volume por unidade de tempo). Esboce um gráfico da profundidade do café na caneca como uma função do tempo. Forneça uma explicação para o formato do gráfico em termos de concavidade. Qual o significado do ponto de inflexão?

**65.** Uma *curva dose-resposta* descreve o nível de medicamento na corrente sanguínea depois de uma droga ser administrada. Uma função onda $S(t) = At^pe^{-kt}$ é usada frequentemente para modelar a curva de resposta, refletindo uma oscilação inicial acentuada no nível da droga e então um declínio gradual. Se, para uma droga específica, $A = 0{,}01$, $p = 4$, $k = 0{,}07$ e $t$ for medido em minutos, estime o tempo correspondente aos pontos de inflexão e explique seu significado. Se você tiver uma ferramenta gráfica, use-a para traçar a curva de resposta à droga.

**66.** A família das curvas em forma de sino

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

ocorre em probabilidade e estatística, nas quais ela é chamada *função densidade normal*. A constante $\mu$ é denominada *média*, e a constante positiva $\sigma$ é conhecida como *desvio padrão*. Por simplicidade, mudamos a escala da função de forma a remover o fator $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ e vamos analisar o caso especial onde $\mu = 0$. Logo, estudamos a função

$$f(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

(a) Encontre a assíntota, o valor máximo e os pontos de inflexão de $f$.

(b) Que papel desempenha $\sigma$ no formato da curva?

(c) Ilustre, fazendo o gráfico de quatro membros dessa família sobre a mesma tela.

**67.** Encontre uma função cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tenha um valor máximo local 3 em $x = -2$ e um valor mínimo local 0 em $x = 1$.

**68.** Para quais valores dos números $a$ e $b$ a função

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

tem o valor máximo de $f(2) = 1$?

**69.** (a) Se a função $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tem o valor mínimo local de $-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ em $x = 1/\sqrt{3}$, quais são os valores de $a$ e $b$?

(b) Qual das tangentes à curva na parte (a) tem a menor inclinação?

**70.** Para que valores de $a$ e $b$ é $(2; 2{,}5)$ um ponto de inflexão da curva $x^2y + ax + by = 0$? Quais pontos de inflexão adicionais a curva tem?

**71.** Mostre que a curva $y = (1+x)/(1+x^2)$ tem três pontos de inflexão e todos ficam sobre uma mesma reta.

**72.** Mostre que as curvas $y = e^{-x}$ e $y = -e^{-x}$ tocam a curva $y = e^{-x}$ sen $x$ em seu ponto de inflexão.

**73.** Mostre que os pontos de inflexão da curva $y = x$ sen $x$ estão sobre a curva $y^2(x^2 + 4) = 4x^2$.

**74–76** Suponha que todas as funções sejam duas vezes deriváveis e que as segundas derivadas nunca sejam nulas.

**74.** (a) Se $f$ e $g$ forem côncavas para cima em $I$, mostre que $f + g$ é côncavo para cima em $I$.

(b) Se $f$ for positiva e côncava para cima em $I$, mostre que a função $g(x) = [f(x)]^2$ é côncava para cima em $I$.

**75.** (a) Se $f$ e $g$ forem funções positivas, crescentes e côncavas para cima em $I$, mostre que a função produto $fg$ é côncava para cima em $I$.

(b) Mostre que a parte (a) permanece verdadeira mesmo que $f$ e $g$ sejam ambas decrescentes.

(c) Suponha que $f$ seja crescente e $g$, decrescente. Mostre, dando três exemplos, que $fg$ pode ser côncava para cima, côncava para baixo ou linear. Por que os argumentos usados nas partes (a) e (b) não podem ser usados neste caso?

**76.** Suponha que $f$ e $g$ sejam ambas côncavas para cima em $(-\infty, \infty)$. Sob que condições em $f$ a função composta $h(x) = f(g(x))$ será côncava para cima?

---

**77.** Mostre que tg $x > x$ para $0 < x < \pi/2$. [*Dica:* Mostre que $f(x) = \text{tg}\, x - x$ é crescente em $(0, \pi/2)$.]

**78.** (a) Mostre que $e^x \geqslant 1 + x$ para $x \geqslant 0$.

(b) Deduza que $e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ para $x \geqslant 0$.

(c) Use a indução matemática para demonstrar que para $x \geqslant 0$ e qualquer inteiro positivo $n$,

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

**79.** Mostre que uma função cúbica (um polinômio de terceiro grau) sempre tem exatamente um ponto de inflexão. Se seu gráfico tem três intersecções com o eixo $x$, $x_1$, $x_2$ e $x_3$, mostre que a coordenada $x$ do ponto de inflexão é $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.

**80.** Para quais valores de $c$ o polinômio $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ tem dois pontos de inflexão? E um ponto de inflexão? E nenhum? Ilustre traçando o gráfico de $P$ para vários valores de $c$. Como o gráfico muda quando $c$ decresce?

**81.** Demonstre que se $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de $f$ e $f''$ existir em um intervalo aberto contendo $c$, então $f''(c) = 0$. [*Dica*: Aplique o Teste da Primeira Derivada e o Teorema de Fermat à função $g = f'$.]

**82.** Mostre que se $f(x) = x^4$, então $f''(0) = 0$, mas $(0, 0)$ não é um ponto de inflexão do gráfico de $f$.

**83.** Mostre que a função $g(x) = x|x|$ tem um ponto de inflexão em $(0, 0)$, mas $g''(0)$ não existe.

**84.** Suponha que $f'''$ seja contínua e $f'(c) = f''(c) = 0$, mas $f'''(c) > 0$. A função $f$ tem um mínimo ou máximo local em $c$? A função $f$ apresenta um ponto de inflexão em $c$?

**85.** Suponha que $f$ seja derivável em um intervalo $I$ e $f'(x) > 0$ para todos os números $x$ em $I$, exceto para um único número $c$. Prove que $f$ é crescente em todo o intervalo $I$.

**86.** Para quais valores de $c$ a função

$$f(x) = cx + \frac{1}{x^2 + 3}$$

é crescente $(-\infty, \infty)$?

**87.** Os três casos no Teste da Primeira Derivada cobrem as situações encontradas usualmente, mas não esgotam todas as possibilidades. Considere as função $f$, $g$ e $h$ cujos valores em 0 são todos 0 e, para $x \neq 0$,

$$f(x) = x^4 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \qquad g(x) = x^4\left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

$$h(x) = x^4\left(-2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

(a) Mostre que 0 é um número crítico de todas as três funções, mas suas derivadas mudam de sinal infinitas vezes em ambos os lados de 0.

(b) Mostre que $f$ não tem um máximo nem um mínimo local em 0, que $g$ tem um mínimo local e que $h$ tem um máximo local.

## 4.4 Formas Indeterminadas e Regra de l'Hôspital

Suponha que estejamos tentando analisar o comportamento da função

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

Apesar de $F$ não estar definida em $x = 1$, precisamos saber como $F$ se comporta *próximo* a 1. Em particular, gostaríamos de saber o valor do limite

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

No cálculo desse limite não podemos aplicar a Propriedade 5 dos Limites (o limite de um quociente é o quociente dos limites; veja a Seção 2.3), pois o limite do denominador é 0. De fato, embora o limite em $\boxed{1}$ exista, seu valor não é óbvio, porque tanto o numerador como o denominador tendem a 0 e $\frac{0}{0}$ não está definido.

Em geral, se tivermos um limite da forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$