**EXEMPLO 6** Demonstre a identidade $\text{tg}^{-1}x + \text{cotg}^{-1}x = \pi/2$.

**SOLUÇÃO** Embora não seja necessário o cálculo para demonstrar essa identidade, a demonstração usando cálculo é bem simples. Se $f(x) = \text{tg}^{-1}x + \text{cotg}^{-1}x$, então

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

para todos os valores de $x$. Portanto $f(x) = C$, uma constante. Para determinar o valor de $C$, fazemos $x = 1$ (porque podemos calcular $f(1)$ exatamente). Então

$$C = f(1) = \text{tg}^{-1}1 + \text{cotg}^{-1}1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Assim, $\text{tg}^{-1}x + \text{cotg}^{-1}x = \pi/2$.

## 4.2 Exercícios

**1–4** Verifique que a função satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo dado. Então, encontre todos os números $c$ que satisfazem à conclusão do Teorema de Rolle.

**1.** $f(x) = 5 - 12x + 3x^2$, $[1, 3]$

**2.** $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2$, $[0, 3]$

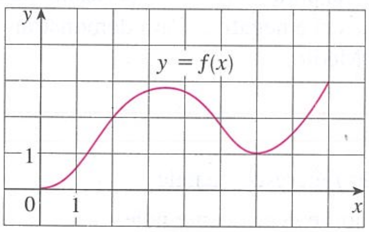
**3.** $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x$, $[0, 9]$

**4.** $f(x) = \cos 2x$, $[\pi/8, 7\pi/8]$

**5.** Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostre que $f(-1) = f(1)$, mas não existe um número $c$ em $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

**6.** Seja $f(x) = \text{tg}\, x$. Mostre que $f(0) = f(\pi)$, mas não existe um número $c$ em $(0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

**7.** Use o gráfico de $f$ para estimar os valores de $c$ que satisfaçam à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[0, 8]$.




**8.** Use o gráfico de $f$ dado no Exercício 7 para estimar os valores de $c$ que satisfaçam à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[1, 7]$.

**9–12** Verifique se a função satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo dado. Então, encontre todos os números $c$ que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio.

**9.** $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $[0, 2]$

**10.** $f(x) = x^3 + x - 1$, $[0, 2]$

**11.** $f(x) = e^{-2x}$, $[0, 3]$

**12.** $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, $[1, 4]$

**13–14** Encontre o número $c$ que satisfaça à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo dado. Desenhe o gráfico da função, a reta secante passando pelas extremidades, e a reta tangente em $(c, f(c))$. A reta secante e a reta tangente são paralelas?

**13.** $f(x) = \sqrt{x}$, $[0, 4]$

**14.** $f(x) = e^{-x}$, $[0, 2]$

**15.** Seja $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Mostre que não existe um valor $c$ em $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

**16.** Seja $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Mostre que não existe um valor $c$ tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

**17-18** Mostre que a equação tem exatamente uma raiz real.

**17.** $2x + \cos x = 0$

**18.** $x^3 + e^x = 0$

**19.** Mostre que a equação $x^3 - 15x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo $[-2, 2]$.

**20.** Mostre que a equação $x^4 + 4x + c = 0$ tem no máximo duas raízes reais.

**21.** (a) Mostre que um polinômio de grau 3 tem, no máximo, três raízes reais.

(b) Mostre que um polinômio de grau $n$ tem, no máximo, $n$ raízes reais.

**22.** (a) Suponha que $f$ seja derivável em $\mathbb{R}$ e tenha duas raízes. Mostre que $f'$ tem pelo menos uma raiz.

(b) Suponha que $f$ seja duas vezes derivável em $\mathbb{R}$ e tenha três raízes. Mostre que $f''$ tem pelo menos uma raiz real.

(c) Você pode generalizar os itens (a) e (b)?

**23.** Se $f(1) = 10$ e $f'(x) \geq 2$ para $1 \leq x \leq 4$, quão pequeno $f(4)$ pode ser?

**24.** Suponha que $3 \leq f'(x) \leq 5$ para todos os valores de $x$. Mostre que $18 \leq f(8) - f(2) \leq 30$.

É necessário o uso de uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homeworks Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

25. Existe uma função $f$ tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ e $f'(x) \leqslant 2$ para todo $x$?

26. Suponha que $f$ e $g$ sejam contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em $(a, b)$. Suponha também que $f(a) = g(a)$ e $f'(x) < g'(x)$ para $a < x < b$. Prove que $f(b) < g(b)$. [*Dica*: Aplique o Teorema do Valor Médio para a função $h = f - g$.]

27. Mostre que $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ se $x > 0$.

28. Suponha que $f$ seja uma função ímpar e é derivável em toda parte. Demonstre que para todo o número positivo $b$, existe um número $c$ em $(-b, b)$ tal que $f'(c) = f(b)/b$.

29. Use o Teorema do Valor Médio para demonstrar a desigualdade

$$|\text{sen } a - \text{sen } b| \leqslant |a - b| \qquad \text{para todo } a \text{ e } b.$$

30. Se $f'(x) = c$ ($c$ é uma constante) para todo $x$, use o Corolário 7 para mostrar que $f(x) = cx + d$ para alguma constante $d$.

31. Sejam $f(x) = 1/x$ e

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\[2ex] 1 + \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x$ em seus domínios. Podemos concluir a partir do Corolário 7 que $f - g$ é constante?

32. Use o método do Exemplo 6 para demonstrar a identidade

$$2 \text{ sen}^{-1}x = \cos^{-1}(1 - 2x^2), \qquad x \geqslant 0.$$

33. Demonstre a identidade.

$$\text{arcsen}\,\frac{x-1}{x+1} = 2 \text{ arctg}\,\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$$

34. Ás 14 h da tarde o velocímetro do carro mostra 50 km/h. Às 14 h 10, ele mostra 65 km/h. Prove que em algum momento entre 14 h e 14 h 10 a aceleração era exatamente de 90 km/h$^2$.

35. Dois corredores iniciam uma corrida no mesmo instante e terminam empatados. Prove que em algum momento durante a corrida, eles tinham a mesma velocidade. [*Dica:* Considere $f(t) = g(t) - h(t)$, onde $g$ e $h$ são as duas posições dos corredores.]

36. Um número $a$ é chamado **ponto fixo** de uma função $f$ se $f(a) = a$. Demonstre que se $f'(x) \neq 1$ para todos os números reais $x$, então $f$ tem no máximo um ponto fixo.

## 4.3 Como as Derivadas Afetam a Forma de um Gráfico

Muitas das aplicações do cálculo dependem de nossa habilidade para deduzir fatos sobre uma função $f$ a partir de informações relativas a suas derivadas. Como $f'(x)$ representa a inclinação da curva $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$, ela nos informa para qual direção a curva segue em cada ponto. Assim, é razoável esperar que informações sobre $f'(x)$ nos forneçam informações sobre $f(x)$.

### O que $f'$ diz sobre $f$?

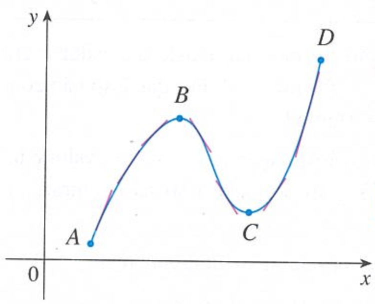



**FIGURA 1**

Para ver como a derivada de $f$ pode nos dizer onde uma função é crescente ou decrescente, observe a Figura 1. (As funções crescentes e decrescentes foram definidas na Seção 1.1.) Entre $A$ e $B$ e entre $C$ e $D$, as retas tangentes têm inclinação positiva e, portanto, $f'(x) > 0$. Entre $B$ e $C$, as retas tangentes têm inclinação negativa e, portanto, $f'(x) < 0$. Assim, parece que $f$ cresce quando $f'(x)$ é positiva e decresce quando $f'(x)$ é negativa. Para demonstrar que isso é sempre válido, vamos usar o Teorema do Valor Médio.

Vamos abreviar o nome deste teste para Teste C/D.

**Teste Crescente/Decrescente**

(a) Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, então $f$ é crescente nele.

(b) Se $f'(x) < 0$ em um intervalo, então $f$ é decrescente nele.

DEMONSTRAÇÃO

(a) Sejam $x_1$ e $x_2$ dois números quaisquer no intervalo com $x_1 < x_2$. De acordo com a definição de uma função crescente, temos de mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Como nos foi dado que $f'(x) > 0$, sabemos que $f$ é derivável em $[x_1, x_2]$. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número $c$ entre $x_1$ e $x_2$ tal que

$$\boxed{1} \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Agora $f'(c) > 0$, por hipótese, e $x_2 - x_1 > 0$, pois $x_1 < x_2$. Assim, o lado direito da Equação 1 é positivo e, portanto,

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \text{ou} \qquad f(x_1) < f(x_2)$$