

complicadas pode ser impossível calcular exatamente  $\Delta y$ . Nesses casos, a aproximação por diferenciais é especialmente útil.

Na notação de diferenciais, a aproximação linear [1] pode ser escrita como

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

Por exemplo, para a função  $f(x) = \sqrt{x + 3}$  do Exemplo 1, temos

$$dy = f'(x) dx = \frac{dx}{2\sqrt{x + 3}}$$

Se  $a = 1$  e  $dx = \Delta x = 0,05$ , então

$$dy = \frac{0,05}{2\sqrt{1 + 3}} = 0,0125$$

$$e \quad \sqrt{4,05} = f(1,05) \approx f(1) + dy = 2,0125$$

exatamente como encontramos no Exemplo 1.

Nosso exemplo final ilustra o uso de diferenciais na estimativa de erros que ocorrem em virtude de medidas aproximadas.

**EXEMPLO 4** O raio de uma esfera foi medido e descobriu-se que possui 21 cm com uma possibilidade de erro na medida de no máximo 0,05 cm. Qual é o erro máximo usando esse valor de raio para computar o volume da esfera?

**SOLUÇÃO** Se o raio da esfera for  $r$ , então seu volume é  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ . Se o erro na medida do valor de  $r$  for denotado por  $dr = \Delta r$ , então o erro correspondente no cálculo do valor de  $V$  é  $\Delta V$ , que pode ser aproximado pela diferencial

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Quando  $r = 21$  e  $dr = 0,05$ , temos

$$dV = 4\pi(21)^2 0,05 \approx 277$$

O erro máximo no volume calculado é de cerca de 277 cm<sup>3</sup>.

**OBSERVAÇÃO** Embora o erro possível no Exemplo 4 possa parecer muito grande, uma ideia melhor é dada pelo **erro relativo**, que é calculado dividindo-se o erro pelo volume total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3 \frac{dr}{r}$$

Assim, o erro relativo no volume é cerca de três vezes o erro relativo no raio. No Exemplo 4, o erro relativo no raio é de aproximadamente  $dr/r = 0,05/21 \approx 0,0024$  e produz um erro relativo de cerca de 0,007 no volume. Os erros também poderiam ser expressos como **erros percentuais** de 0,24% no raio e 0,7% no volume.

## 3.10 Exercícios

1–4 Encontre a linearização  $L(x)$  da função em  $a$ .

1.  $f(x) = x^4 + 3x^2$ ,  $a = -1$     2.  $f(x) = \sin x$ ,  $a = \pi/6$

3.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 4$     4.  $f(x) = x^{3/4}$ ,  $a = 16$

5. Encontre a aproximação linear da função  $f(x) = \sqrt{1-x}$  em  $a = 0$  e use-a para aproximar os números  $\sqrt{0,9}$  e  $\sqrt{0,99}$ . Ilustre fazendo os gráficos de  $f$  e da reta tangente.

6. Encontre a aproximação linear da função  $g(x) = \sqrt[3]{1+x}$  em  $a = 0$  e use-a para aproximar os números  $\sqrt[3]{0,95}$  e  $\sqrt[3]{1,1}$ . Ilustre, fazendo os gráficos de  $g$  e da reta tangente.

7-10 Verifique a aproximação linear dada em  $a = 0$ . A seguir, determine os valores de  $x$  para os quais a aproximação linear tem precisão de 0,1.

7.  $\ln(1+x) \approx x$                       8.  $\operatorname{tg} x \approx x$   
 9.  $1/(1+2x)^4 \approx 1-8x$             10.  $e^x \cos x \approx 1+x$

11-14 Encontre a diferencial da função.

11. (a)  $y = x^2 \operatorname{sen} 2x$                 (b)  $y = \ln \sqrt{1+t^2}$   
 12. (a)  $y = s/(1+2s)$                 (b)  $y = e^{-u} \cos u$   
 13. (a)  $y = \operatorname{tg} \sqrt{t}$                     (b)  $y = \frac{1-v^2}{1+v^2}$   
 14. (a)  $y = e^{\operatorname{tg} \pi t}$                     (b)  $y = \sqrt{1+\ln z}$

15-18 (a) Encontre a diferencial  $dy$  e (b) avalie  $dy$  para os valores dados de  $x$  e  $dx$ .

15.  $y = e^{x/10}$ ,  $x = 0$ ,  $dx = 0,1$   
 16.  $y = \cos \pi x$ ,  $x = \frac{1}{3}$ ,  $dx = -0,02$   
 17.  $y = \sqrt{3+x^2}$ ,  $x = 1$ ,  $dx = -0,1$   
 18.  $y = \frac{x+1}{x-1}$ ,  $x = 2$ ,  $dx = 0,05$

19-22 Compute  $\Delta y$  e  $dy$  para os valores dados de  $x$  e  $dx = \Delta x$ . A seguir, esboce um diagrama como o da Figura 5, mostrando os segmentos de reta com comprimentos  $dx$ ,  $dy$  e  $\Delta y$ .

19.  $y = 2x - x^2$ ,  $x = 2$ ,  $\Delta x = -0,4$   
 20.  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 1$ ,  $\Delta x = 1$   
 21.  $y = 2/x$ ,  $x = 4$ ,  $\Delta x = 1$   
 22.  $y = e^x$ ,  $x = 0$ ,  $\Delta x = 0,5$

23-28 Use uma aproximação linear (ou diferencial) para estimar o número dado.

23.  $(1,999)^4$                               24.  $e^{-0,015}$   
 25.  $\sqrt[3]{1001}$                                 26.  $1/4,002$   
 27.  $\operatorname{tg} 44^\circ$                               28.  $\sqrt{99,8}$

29-31 Explique, em termos de aproximações lineares ou de diferenciais, por que a aproximação é razoável.

29.  $\sec 0,08 \approx 1$                       30.  $(1,01)^6 \approx 1,06$   
 31.  $\ln 1,05 \approx 0,05$

32. Sejam  $f(x) = (x-1)^2$ ,  $g(x) = e^{-2x}$   
 e  $h(x) = 1 + \ln(1-2x)$ .

- (a) Encontre as linearizações de  $f$ ,  $g$  e  $h$  em  $a = 0$ . O que você percebe? Como explicar o que aconteceu?  
 (b) Faça os gráficos de  $f$ ,  $g$  e  $h$ , e de suas aproximações lineares. Para qual função a aproximação é melhor? Para qual é pior? Explique.

33. A aresta de um cubo tem 30 cm, com um possível erro de medida de 0,1 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo possível no cálculo (a) do volume do cubo e (b) da área da superfície do cubo.

34. O raio de um disco circular é 24 cm, com um erro possível de 0,2 cm.

- (a) Use diferenciais para estimar o erro máximo na área calculada do disco.  
 (b) Qual o erro relativo? Qual o erro percentual?

35. A circunferência de uma esfera mede 84 cm, com erro possível de 0,5 cm.

- (a) Use diferenciais para estimar o erro máximo na área calculada da superfície. Qual o erro relativo?  
 (b) Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo no volume calculado. Qual o erro relativo?

36. Use as diferenciais para estimar a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de 0,05 cm de tinta a um domo com diâmetro de 50 m.

37. (a) Use as diferenciais para encontrar uma fórmula para o volume aproximado de uma fina camada cilíndrica com altura  $h$ , raio interno  $r$  e espessura  $\Delta r$ .

- (b) Qual é o erro envolvido no uso da fórmula da parte (a)?

38. Sabe-se que um lado de um triângulo retângulo mede 20 cm de comprimento e o ângulo oposto foi medido como  $30^\circ$ , com um erro possível de  $\pm 1^\circ$ .

- (a) Use diferenciais para estimar o erro no cálculo da hipotenusa.  
 (b) Qual é o erro percentual?

39. Se uma corrente  $I$  passar por um resistor com resistência  $R$ , a Lei de Ohm afirma que a queda de voltagem é  $V = RI$ . Se  $V$  for constante e  $R$  for medida com um certo erro, use diferenciais para mostrar que o erro relativo no cálculo de  $I$  é aproximadamente o mesmo (em módulo) que o erro relativo em  $R$ .

40. Quando o sangue flui ao longo de um vaso sanguíneo, o fluxo  $F$  (o volume de sangue por unidade de tempo que passa por um ponto dado) é proporcional à quarta potência do raio  $R$  do vaso:

$$F = kR^4$$

(Esta equação é conhecida como a Lei de Poiseuille; mostraremos porque isso é verdadeiro na Seção 8.4.) Uma artéria parcialmente obstruída pode ser alargada por uma operação chamada angioplastia, na qual um cateter-balão é inflado dentro da artéria a fim de aumentá-la e restaurar o fluxo normal do sangue.

Mostre que uma variação relativa em  $F$  é cerca de quatro vezes a variação relativa em  $R$ . Como um aumento de 5% no raio afeta o fluxo do sangue?

41. Estabeleça as seguintes regras para trabalhar com as diferenciais (onde  $c$  denota uma constante e  $u$  e  $v$  são funções de  $x$ ).
- (a)  $dc = 0$                               (b)  $d(cu) = c du$   
 (c)  $d(u+v) = du + dv$             (d)  $d(uv) = u dv + v du$   
 (e)  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$     (f)  $d(x^n) = nx^{n-1} dx$

42. Na página 431 de *Physics: Calculus*, 2. ed., por Eugene Hecht (Pacific Grove, CA, 2000), durante a dedução da Fórmula  $T = 2\pi\sqrt{L/g}$  para o período de um pêndulo de comprimento  $L$ , o autor obtém a equação  $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$  para a aceleração tangencial do peso do pêndulo. Ele então afirma: "para ângulos pe-

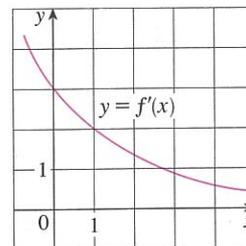
quenos, o valor de  $\theta$  em radianos é muito próximo do valor de  $\text{sen } \theta$ ; eles diferem por menos que 2% até cerca de  $20^\circ$ .

(a) Verifique a aproximação linear em 0 para a função seno:

$$\text{sen } x \approx x$$

(b) Use uma ferramenta gráfica para determinar os valores de  $x$  para os quais  $\text{sen } x$  e  $x$  difiram por menos que 2%. Então, verifique a afirmação de Hecht, convertendo de radianos para graus.

43. Suponha que a única informação que temos sobre uma função  $f$  é que  $f(1) = 5$  e que o gráfico de sua derivada é como mostrado.
- (a) Use uma aproximação linear para estimar  $f(0,9)$  e  $f(1,1)$ .
- (b) Suas estimativas na parte (a) são muito grandes ou pequenas? Explique.



44. Suponha que não tenhamos uma fórmula para  $g(x)$ , mas saibamos que  $g(2) = -4$  e  $g'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$  para todo  $x$ .
- (a) Use uma aproximação linear para estimar  $g(1,95)$  e  $g(2,05)$ .
- (b) Suas estimativas na parte (a) são muito grandes ou pequenas? Explique.

## PROJETO APLICADO



## POLINÔMIOS DE TAYLOR

A aproximação pela reta tangente  $L(x)$  é a melhor aproximação de primeiro grau (linear) para  $f(x)$  próximo de  $x = a$  porque  $f(x)$  e  $L(x)$  têm a mesma taxa de variação (derivada) em  $a$ . Para uma aproximação melhor que a linear, vamos tentar uma aproximação de segundo grau (quadrática)  $P(x)$ . Em outras palavras, aproximaremos uma curva por uma parábola em vez de uma reta. Para nos assegurarmos de que é uma boa aproximação, estipularemos o seguinte:

- (i)  $P(a) = f(a)$  ( $P$  e  $f$  devem ter o mesmo valor em  $a$ .)  
 (ii)  $P'(a) = f'(a)$  ( $P$  e  $f$  devem ter a mesma taxa de mudança em  $a$ .)  
 (iii)  $P''(a) = f''(a)$  (As inclinações de  $P$  e  $f$  devem variar na mesma taxa em  $a$ .)

- Encontre a aproximação quadrática  $P(x) = A + Bx + Cx^2$  para a função  $f(x) = \cos x$  que satisfaça as condições (i), (ii) e (iii) com  $a = 0$ . Faça o gráfico de  $P$ ,  $f$  e da aproximação linear  $L(x) = 1$  em uma mesma tela. Comente a qualidade das aproximações  $P$  e  $L$  de  $f$ .
- Determine os valores de  $x$  para os quais a aproximação quadrática  $f(x) \approx P(x)$  do Problema 1 tem precisão de 0,1. [Dica: faça os gráficos de  $y = P(x)$ ,  $y = \cos x - 0,1$  e  $y = \cos x + 0,1$  em uma tela comum.]
- Para aproximar uma função  $f$  por uma função quadrática  $P$  próxima a um número  $a$ , é melhor escrever  $P$  na forma

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2$$

Mostre que a função quadrática que satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

- Encontre a aproximação quadrática para  $f(x) = \sqrt{x + 3}$  próxima a  $a = 1$ . Faça os gráficos de  $f$ , da aproximação quadrática e da aproximação linear do Exemplo 2 da Seção 3.10 na mesma tela. O que você conclui?
- Em vez de ficarmos satisfeitos com aproximações lineares ou quadráticas para  $f(x)$  próximo a  $x = a$ , vamos tentar encontrar aproximações melhores por polinômios de graus mais altos. Procuramos por um polinômio de grau  $n$

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que  $T_n$  e suas primeiras  $n$  derivadas tenham os mesmos valores em  $x = a$  que  $f$  e suas primeiras  $n$  derivadas. Derivando repetidamente e fazendo  $x = a$ , mostre que essas condições estão satisfeitas se  $c_0 = f(a)$ ,  $c_1 = f'(a)$ ,  $c_2 = \frac{1}{2}f''(a)$  e em geral

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

onde  $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot k$ . O polinômio resultante

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

é denominado **polinômio de Taylor de grau  $n$  de  $f$  centrado em  $a$** .

- Encontre o polinômio de Taylor de 8º grau, centrado em  $a = 0$  para a função  $f(x) = \cos x$ . Faça os gráficos de  $f$  junto com os polinômios de Taylor  $T_2$ ,  $T_4$ ,  $T_6$ ,  $T_8$  na janela retangular  $[-5, 5]$  por  $[-1,4; 1,4]$  e comente quão bem eles aproximam  $f$ .



É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador