(ii) trimestralmente, (iii) mensalmente, (iv) semanalmente, (v) diariamente, (vi) a cada hora e (vii) continuamente.

(b) Suponha que \$1.000 sejam emprestados e que os juros sejam capitalizados continuamente. Se $A(t)$ é o valor após t anos, onde $0 \leqslant t \leqslant 3$, esboce o gráfico $A(t)$ para cada uma das taxas de juros de 6%, 8% e 10% numa tela comum.

9. (a) Se \$3.000 são investidos a 5% de juros, encontre o valor do investimento ao fim de 5 anos, para juros capitalizados (i) anualmente, (ii) semestralmente, (iii) mensalmente, (iv) semanalmente, (v) diariamente ou (vi) continuamente.

(b) Se $A(t)$ for a quantia do investimento no tempo t para o caso da capitalização contínua, escreva uma equação diferencial e uma condição inicial satisfeitas por $A(t)$.

20. (a) Quanto tempo o investimento levará para dobrar o valor se a taxa de juros for 6% e capitalizada continuamente?

(b) Qual é a taxa de juros anual equivalente?

3.9 Taxas Relacionadas

Quando bombeamos ar para dentro de um balão, tanto o volume quanto o raio do balão crescem, e suas taxas de crescimento estão relacionadas. Mas é muito mais fácil medir diretamente a taxa de crescimento do volume do que a do raio.

Em um problema de taxas relacionadas, a ideia é calcular a taxa de variação de uma grandeza em termos da taxa de variação da outra (que pode ser medida mais facilmente). O procedimento é achar uma equação que relacione as duas grandezas e então usar a Regra da Cadeia para derivar ambos os lados em relação ao tempo.

SP De acordo com os Princípios de esolução de Problemas discutidos no apítulo 1, o primeiro passo é entender o roblema. Isso inclui lê-lo uidadosamente, identificando o que foi ado e as incógnitas, e introduzir uma otação adequada.

EXEMPLO 1 Ar está sendo bombeado para um balão esférico de modo que seu volume aumenta a uma taxa de 100 cm^3/s. Quão rápido o raio do balão está aumentando quando o diâmetro for 50 cm?

SOLUÇÃO Vamos começar identificando duas coisas:

a *informação dada:*

a taxa de crescimento do ar é 100 cm^3/s

e a *incógnita*:

a taxa de crescimento do raio quando o diâmetro é 50 cm

Para expressarmos matematicamente essas grandezas, introduzimos alguma *notação* sugestiva:

Seja V o volume do balão e seja r seu raio.

A chave está em lembrar que taxas de variação são derivadas. Neste problema, o volume e o raio são funções do tempo t. A taxa de crescimento do volume em relação ao tempo é a derivada dV/dt, e a taxa de crescimento do raio é dr/dt. Podemos, portanto, reapresentar o que foi dado e a incógnita como a seguir:

$$\textit{Dada:} \qquad \frac{dV}{dt} = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$\textit{Incógnita:} \qquad \frac{dr}{dt} \text{ quando } r = 25 \text{ cm}$$

SP O segundo estágio da resolução do roblema é idealizar um esquema que incule o que foi dado à incógnita.

Para conectarmos dV/dt e dr/dt, primeiro relacionamos V e r pela fórmula para o volume de uma esfera:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Para usarmos a informação dada, derivamos cada lado dessa equação em relação a t. Para derivarmos o lado direito precisamos usar a Regra da Cadeia:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

)bserve que, embora dV/dt seja onstante, dr/dt *não* é constante.

Agora, isolamos a incógnita:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Se colocarmos $r = 25$ e $dV/dt = 100$ nessa equação, obtemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2}100 = \frac{1}{25\pi}$$

O raio do balão está crescendo a uma taxa de $1/(25\pi) \approx 0{,}0127$ cm/s.

EXEMPLO 2 Uma escada com 5 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada desliza, afastando-se da parede a uma taxa de 1 m/s, quão rápido o topo da escada está escorregando para baixo na parede quando a base da escada está a 3 m da parede?

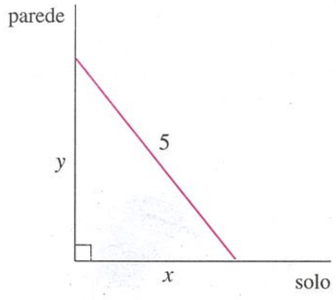

FIGURA 1

SOLUÇÃO Primeiro desenhe um diagrama e coloque legendas, como na Figura 1. Sejam x metros a distância da base da escada à parede, e y metros a distância do topo da escada ao solo. Observe que x e y são ambas funções de t (tempo, medido em segundos).

Foi-nos dado que $dx/dt = 1$ m/s, e nos foi pedido para encontrar dy/dt quando $x = 3$ m (veja a Figura 2). Neste problema, a relação entre x e y é dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Derivando cada lado em relação a t usando a Regra da Cadeia, temos

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

e isolando a taxa desejada, obtemos

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

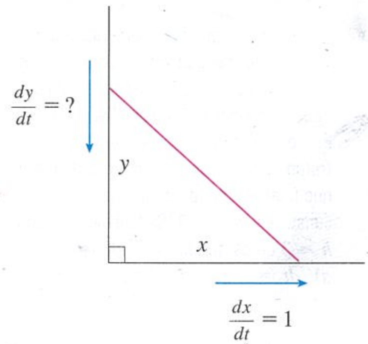

FIGURA 2

Quando $x = 3$, o Teorema de Pitágoras fornece $y = 4$ e, portanto, substituindo esses valores e $dx/dt = 1$, temos

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4}(1) = -\frac{3}{4}\text{ m/s}$$

O fato de dy/dt ser negativo indica que a distância do topo da escada ao solo está *decrescendo* a uma taxa de $\frac{3}{4}$ m/s. Em outras palavras, o topo da escada está deslizando para baixo a uma taxa de $\frac{3}{4}$ m/s.

EXEMPLO 3 Um tanque de água possui o formato de um cone circular invertido, com base de raio de 2 m e altura igual a 4 m. Se a água está sendo bombeada para o tanque a uma taxa de 2 m^3/ min, encontre a taxa na qual o nível de água está aumentando quando a água estiver a 3 m de profundidade.

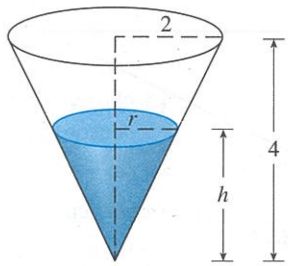

FIGURA 3

SOLUÇÃO Primeiro vamos esboçar o cone e colocar legendas, como na Figura 3. Sejam V, r, e h o volume da água, o raio da superfície e a altura no instante t, onde t é medido em minutos.

Foi-nos dado que $dV/dt = 2$ m^3/min e nos foi pedido para encontrar dh/dt quando h for 3 m. As quantidades V e h são relacionadas pela equação

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

mas é muito útil expressar V como uma função apenas de h. Para eliminar r, usamos os triângulos similares na Figura 3 para escrever

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \qquad r = \frac{h}{2}$$

e a expressão para V se torna

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

Agora podemos derivar cada lado em relação a t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \frac{dh}{dt}$$

então $$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2} \frac{dV}{dt}$$

Substituindo $h = 3$ m e $dV/dt = 2\ \text{m}^3/\text{min}$, temos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2} \cdot 2 = \frac{8}{9\pi}$$

O nível da água estará subindo a uma taxa de $8/(9\pi) \approx 0{,}28$ m/min.

SP Pare um pouco: o que aprendemos nos exemplos 1–3 que nos ajudará a resolver os problemas futuros?

Estratégia de Solução de Problemas É útil lembrar-se de alguns dos *Princípios de Resolução de Problemas* (Capítulo 1) e adaptá-los para as taxas relacionadas como demonstrou nossa experiência nos Exemplos 1–3:

1. Leia cuidadosamente o problema.
2. Se possível, faça um diagrama.
3. Introduza uma notação. Atribua símbolos para todas as grandezas que são funções do tempo.
4. Expresse a informação dada e a taxa pedida em termos das derivadas.
5. Escreva uma equação que relacione as várias grandezas do problema. Se necessário, use a geometria da situação para eliminar uma das variáveis por substituição (como no Exemplo 3).
6. Use a Regra da Cadeia para derivar ambos os lados da equação em relação a t.
7. Substitua a informação dada na equação resultante e resolva-a para determinar a taxa desconhecida.

ATENÇÃO Um erro comum é substituir a informação numérica dada (para grandezas que variam com o tempo) cedo demais. Isso deve ser feito somente *após* a derivação. (O Passo 7 segue o Passo 6.) Por exemplo, no Exemplo 3 tratamos com valores genéricos de h até que finalmente, na última etapa, substituímos $h = 3$ (Se tivéssemos feito $h = 3$ antes, teríamos obtido $dV/dt = 0$, que está claramente errado.)

Os exemplos a seguir são ilustrações desta estratégia.

EXEMPLO 4 O carro A está se movimentando para o oeste a 90 km/h e o carro B está se movimentando para o norte a 100 km/h. Ambos vão em direção à intersecção de duas estradas. A que taxa os carros se aproximam um do outro quando o carro A está a 60 m e o carro B está a 80 m da intersecção?

SOLUÇÃO Desenhamos a Figura 4, onde C é a intersecção das estradas. Em um dado instante t, seja x a distância do carro A a C, seja y a distância do carro B a C, e seja z a distância entre os carros, em que x, y e z são medidos em quilômetros.

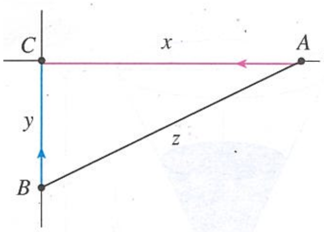

FIGURA 4

Foi-nos dado que $dx/dt = -90$ km/h e $dy/dt = -100$ km/h. (As derivadas são negativas porque x e y são decrescentes.) Foi-nos pedido para encontrar dz/dt. A equação que relaciona x, y e z é dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Derivando cada lado em relação a t, temos

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

Quando $x = 0{,}06$ km e $y = 0{,}08$ km, o Teorema de Pitágoras nos dá $z = 0{,}1$ km, portanto

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0{,}1}[0{,}06(-90) + 0{,}08(-100)]$$
$$= -134 \text{ km/h}$$

Os carros aproximam-se um do outro a uma taxa de 134 km/h.