3.5 Exercícios

1–4

(a) Encontre y' derivando implicitamente.

(b) Resolva a equação explicitamente isolando y e derive para obter y' em termos de x.

(c) Verifique que suas soluções para as partes (a) e (b) são consistentes substituindo a expressão por y na sua solução para a parte (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$ **2.** $4x^2 + 9y^2 = 36$

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$ **4.** $\cos x + \sqrt{y} = 5$

5–20 Encontre dy/dx por derivação implícita.

5. $x^3 + y^3 = 1$ **6.** $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

7. $x^2 + xy - y^2 = 4$ **8.** $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$

9. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$ **10.** $xe^y = x - y$

11. $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$ **12.** $1 + x = \operatorname{sen}(xy^2)$

13. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$ **14.** $e^y \operatorname{sen} x = x + xy$

15. $e^{x/y} = x - y$ **16.** $\sqrt{x + y} = 1 + x^2y^2$

17. $\operatorname{tg}^{-1}(x^2y) = x + xy^2$ **18.** $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 1$

19. $e^y \cos x = 1 + \operatorname{sen}(xy)$ **20.** $\operatorname{tg}(x - y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$

21. Se $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ e $f(1) = 2$, encontre $f'(1)$.

22. Se $g(x) + x \operatorname{sen} g(x) = x^2$, encontre $g'(0)$.

23–24 Considere y como a variável independente e x como a variável dependente e use a derivação implícita para encontrar dx/dy.

23. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$ **24.** $y \sec x = x \operatorname{tg} y$

25–32 Use a derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

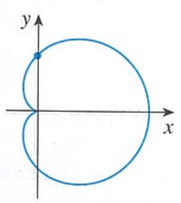
25. $y \operatorname{sen} 2x = x \cos 2y$, $(\pi/2, \pi/4)$

26. $\operatorname{sen}(x + y) = 2x - 2y$, (π, π)

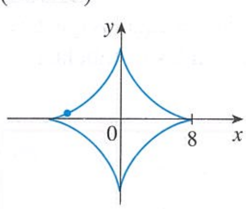
27. $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1, 1)$ (elipse)

28. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$, $(1, 2)$ (hipérbole)

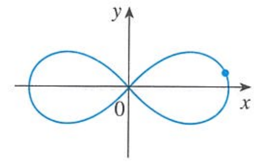
29. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$
$(0, \frac{1}{2})$
(cardioide)



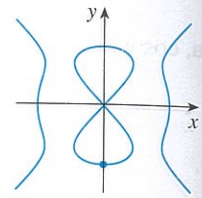
30. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$
$(-3\sqrt{3}, 1)$
(astroide)



31. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$
$(3, 1)$
(lemniscata)



32. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$
$(0, -2)$
(curva do diabo)



33. (a) A curva com equação $y^2 = 5x^4 - x^2$ é chamada **kampyle** (do grego, curvado) **de Eudoxo**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, 2)$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e a reta tangente em uma tela comum. (Se sua ferramenta gráfica puder traçar curvas definidas implicitamente, então use esse recurso. Caso não seja possível, você pode ainda criar o gráfico dessa curva traçando suas metades superior e inferior separadamente.)

34. (a) A curva com equação $y^2 = x^3 + 3x^2$ é denominada **cúbica de Tschirnhausen**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, -2)$.

(b) Em que pontos essa curva tem uma tangente horizontal?

(c) Ilustre as partes (a) e (b) traçando a curva e as retas tangentes sobre uma tela comum.

35–38 Encontre y'' por derivação implícita.

35. $9x^2 + y^2 = 9$ **36.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

37. $x^3 + y^3 = 1$ **38.** $x^4 + y^4 = a^4$

39. Se $xy + e^y = e$, encontre o valor de y'' no ponto onde $x = 0$.

40. Se $x^2 + xy + y^3 = 1$, encontre o valor de y''' no ponto onde $x = 1$.

41. Formas extravagantes podem ser criadas usando-se a capacidade de traçar funções definidas implicitamente de um SCA.

(a) Trace a curva com equação

$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

Em quantos pontos essa curva tem tangentes horizontais? Estime as abscissas desses pontos.

(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(0, 1)$ e $(0, 2)$.

(c) Encontre as abscissas exatas dos pontos da parte (a).

(d) Crie curvas ainda mais extravagantes modificando a equação da parte (a).

SCA **42.** (a) A curva com equação

$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

foi comparada com um "vagão sacolejante". Use um SCA para traçar essa curva e descubra o porquê desse nome.

(b) Em quantos pontos essa curva tem retas tangentes horizontais?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador SCA Requer sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

Encontre as coordenadas x desses pontos.

43. Encontre os pontos sobre a lemniscata do Exercício 31 onde a tangente é horizontal.

44. Mostre, fazendo a derivação implícita, que a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

45. Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0).

46. Mostre que a soma das coordenadas das intersecções com os eixos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c.

47. Mostre, usando a derivação implícita, que qualquer reta tangente em um ponto P a um círculo com centro O é perpendicular ao raio OP.

48. A Regra da Potência pode ser demonstrada usando a derivação implícita para o caso onde n é um número racional, $n = p/q$, e $y = f(x) = x^n$ é suposta de antemão ser uma função derivável. Se $y = x^{p/q}$, então $y^q = x^p$. Use a derivação implícita para mostrar que

$$y' = \frac{p}{q} x^{(p/q)-1}$$

49–60 Encontre a derivada da função. Simplifique quando possível.

49. $y = \text{tg}^{-1}\sqrt{x}$

50. $y = \sqrt{\text{tg}^{-1}x}$

51. $y = \text{sen}^{-1}(2x + 1)$

52. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}\,\sec^{-1}x$

53. $G(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\arccos x$

54. $y = \text{tg}^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

55. $h(t) = \text{cotg}^{-1}(t) + \text{cotg}^{-1}(1/t)$

56. $F(\theta) = \text{arcsen}\sqrt{\text{sen}\,\theta}$

57. $y = x\,\text{sen}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2}$

58. $y = \cos^{-1}(\text{sen}^{-1}t)$

59. $y = \arccos\left(\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ a > b > 0$

60. $y = \text{arctg}\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

61–62 Encontre $f'(x)$. Verifique se sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f'.

61. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\text{arcsen}\,x$

62. $f(x) = \text{arctg}(x^2 - x)$

63. Demonstre a fórmula para $(d/dx)(\cos^{-1}x)$ pelo mesmo método usado para $(d/dx)(\text{sen}^{-1}x)$.

64. (a) Uma maneira de definir $\sec^{-1}x$ é dizer que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ e $0 \leqslant y < \pi/2$ ou $\pi \leqslant y < 3\pi/2$. Mostre que, com essa definição,

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

(b) Outra maneira de definir $\sec^{-1}x$ que é às vezes usada é dizer que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ e $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $y \neq 0$. Mostre que, com essa definição,

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

65–68 Duas curvas são **ortogonais** se suas retas tangentes forem perpendiculares em cada ponto de intersecção. Mostre que as famílias dadas de curvas são **trajetórias ortogonais** uma em relação a outra, ou seja, toda curva de uma família é ortogonal a toda curva da outra família. Esboce ambas as famílias de curvas no mesmo sistema de coordenadas.

65. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$

66. $x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = by$

67. $y = cx^2, \quad x^2 + 2y^2 = k$

68. $y = ax^3, \quad x^2 + 3y^2 = b$

69. Mostre que a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ e a hipérbole $x^2/A^2 - y^2/B^2 = 1$ são trajetórias ortogonais se $A^2 < a^2$ e $a^2 - b^2 = A^2 + B^2$ (logo, a elipse e a hipérbole possuem os mesmos focos).

70. Encontre o valor do número a de tal modo que as famílias das curvas $y = (x + c)^{-1}$ e $y = a(x + k)^{1/3}$ sejam trajetórias ortogonais.

71. (a) A *Equação de van der Waals* para n mols de um gás é

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

onde P é a pressão, V é o volume e T é a temperatura do gás. A constante R é a constante de gás universal e a e b são constantes positivas que são características de um gás em particular. Se T permanece constante, use a derivação implícita para encontrar dV/dP.

(b) Encontre a taxa de variação de volume em relação à pressão de 1 mol de dióxido de carbono em um volume de $V = 10$ L e uma pressão de $P = 2{,}5$ atm. Use $a = 3{,}592$ L^2-atm/mol^2 e $b = 0{,}04267$ L/mol.

SCA **72.** (a) Use a derivação implícita para encontrar y' se $x^2 + xy + y^2 + 1 = 0$.

(b) Trace a curva da parte (a). O que você observa? Demonstre que o que você observa está correto.

(c) Em vista da parte (b), o que você pode dizer sobre a expressão para y' que você encontrou na parte (a)?

73. A equação $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa uma "elipse girada", isto é, uma elipse cujos eixos não são paralelos aos eixos coordenados. Encontre os pontos nos quais essa elipse cruza o eixo x e mostre que as retas tangentes nesses pontos são paralelas.

74. (a) Onde a reta normal à elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$ no ponto $(-1, 1)$ intersecta a elipse uma segunda vez?

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da elipse e da reta normal.

75. Encontre todos os pontos sobre a curva $x^2y^2 + xy = 2$ onde a inclinação da reta tangente é -1.

76. Encontre as equações de ambas as retas tangentes para a elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que passem pelo ponto $(12, 3)$.

77. (a) Suponha que f seja uma função injetora, derivável e que sua função inversa f^{-1} seja também derivável. Use a derivação implícita para mostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

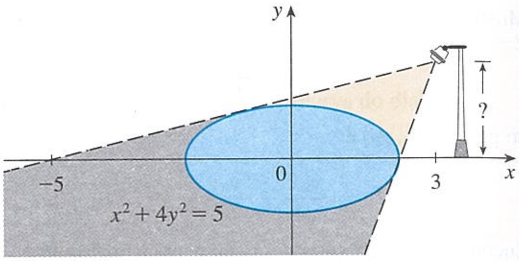
desde que o denominador não seja 0.

(b) Se $f(4) = 5$ e $f'(4) = \frac{2}{3}$, encontre $(f^{-1})'(5)$.

78. (a) Mostre que $f(x) = x + e^x$ é injetora.
(b) Qual o valor de $f^{-1}(1)$?
(c) Use a fórmula do Exercício 77(a) para determinar $(f^{-1})'(1)$.

79. A **Função de Bessel** de ordem 0, $y = J(x)$, satisfaz a equação diferencial $xy'' + y' + xy = 0$ para todos os valores de x e seu valor em 0 é $J(0) = 1$.
(a) Encontre $J'(0)$.
(b) Use a derivação implícita para encontrar $J''(0)$.

80. A figura mostra uma lâmpada localizada três unidades à direita do eixo y e uma sombra originada pela região elíptica $x^2 + 4y^2 \leqslant 5$. Se o ponto $(-5, 0)$ estiver na borda da sombra, qual a altura da lâmpada acima do eixo?



PROJETO APLICADO SCA FAMÍLIAS DE CURVAS IMPLÍCITAS

Neste projeto você explorará os formatos mutantes de curvas definidas implicitamente ao variar constantes numa família e determinará que características são comuns a todos os membros da família.

1. Considere a família de curvas

$$y^2 - 2x^2(x + 8) = c[(y + 1)^2(y + 9) - x^2]$$

(a) Traçando as curvas com $c = 0$ e $c = 2$, determine quantos pontos de intersecção existem. (Você pode precisar aplicar o *zoom* para encontrar todas elas.)
(b) Agora adicione as curvas com $c = 5$ e $c = 10$ aos esboços da parte (a). O que você percebe? E quanto aos outros valores de c?

2. (a) Trace diversos membros da família de curvas

$$x^2 + y^2 + cx^2y^2 = 1$$

Descreva como a curva muda à medida que você varia o valor de c.
(b) O que acontece à curva quando $c = -1$? Descreva o que aparece na tela. Você pode provar isso algebricamente?
(c) Encontre y' por derivação implícita. Para o caso $c = -1$, sua expressão para y' é consistente com o que você descobriu na parte (b)?

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

3.6 Derivadas de Funções Logarítmicas

Nesta seção vamos usar a derivação implícita para achar as derivadas das funções logarítmicas $y = \log_a x$ e, em particular, da função logarítmica natural $y = \ln x$. [É possível demonstrar que as funções logarítmicas são deriváveis: com certeza isso é plausível a partir dos seus gráficos (Veja a Figura 12 na Seção 1.6).]

1
$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $y = \log_a x$. Então

$$a^y = x$$

Derivando essa equação implicitamente em relação a x, usando a Fórmula 3.4.5, obtemos