logo, $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

Quando $\Delta x \to 0$, a Equação 8 mostra que $\Delta u \to 0$. Assim, $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Portanto

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$
$$= f'(b)\,g'(a) = f'(g(a))\,g'(a)$$

Isso demonstra a Regra da Cadeia.

3.4 Exercícios

1–6 Escreva a função composta na forma $f(g(x))$. [Identifique a função de dentro $u = g(x)$ e a de fora $y = f(u)$.] Então, encontre a derivada dy/dx.

1. $y = \text{sen}\, 4x$
2. $y = \sqrt{4 + 3x}$
3. $y = (1 - x^2)^{10}$
4. $y = \text{tg}(\text{sen}\, x)$
5. $y = e^{\sqrt{x}}$
6. $y = \sqrt{2 - e^x}$

7–46 Encontre a derivada da função.

7. $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$
8. $F(x) = (4x - x^2)^{100}$
9. $F(x) = \sqrt[4]{1 + 2x + x^3}$
10. $f(x) = (1 + x^4)^{2/3}$
11. $g(t) = \dfrac{1}{(t^4 + 1)^3}$
12. $f(t) = \sqrt[3]{1 + \text{tg}\, t}$
13. $y = \cos(a^3 + x^3)$
14. $y = a^3 + \cos^3 x$
15. $y = xe^{-kx}$
16. $y = e^{-2t}\cos 4t$
17. $f(x) = (2x - 3)^4(x^2 + x + 1)^5$
18. $g(x) = (x^2 + 1)^3(x^2 + 2)^6$
19. $h(t) = (t + 1)^{2/3}(2t^2 - 1)^3$
20. $F(t) = (3t - 1)^4(2t + 1)^{-3}$
21. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$
22. $f(s) = \sqrt{\dfrac{s^2 + 1}{s^2 + 4}}$
23. $y = \sqrt{1 + 2e^{3x}}$
24. $y = 10^{1 - x^2}$
25. $y = 5^{-1/x}$
26. $G(y) = \dfrac{(y - 1)^4}{(y^2 + 2y)^5}$
27. $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$
28. $y = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$
29. $F(t) = e^{t\,\text{sen}\, 2t}$
30. $F(v) = \left(\dfrac{v}{v^3 + 1}\right)^6$
31. $y = \text{sen}(\text{tg}\, 2x)$
32. $y = \sec^2(m\theta)$
33. $y = 2^{\text{sen}\, \pi x}$
34. $y = x^2 e^{-1/x}$
35. $y = \cos\left(\dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right)$
36. $y = \sqrt{1 + xe^{-2x}}$
37. $y = \cot^2(\text{sen}\, \theta)$
38. $y = e^{k\,\text{tg}\sqrt{x}}$
39. $f(t) = \text{tg}(e^t) + e^{\text{tg}\, t}$
40. $y = \text{sen}(\text{sen}(\text{sen}\, x))$
41. $f(t) = \text{sen}^2(e^{\text{sen}^2 t})$
42. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
43. $g(x) = (2ra^{rx} + n)^p$
44. $y = 2^{3^{x^2}}$
45. $y = \cos\sqrt{\text{sen}(\text{tg}\, \pi x)}$
46. $y = [x + (x + \text{sen}^2 x)^3]^4$

47–50 Encontre y' e y''.

47. $y = \cos(x^2)$
48. $y = \cos^2 x$
49. $y = e^{\alpha x}\,\text{sen}\, \beta x$
50. $y = e^{e^x}$

51–54 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

51. $y = (1 + 2x)^{10}$, $(0, 1)$
52. $y = \sqrt{1 + x^3}$, $(2, 3)$
53. $y = \text{sen}(\text{sen}\, x)$, $(\pi, 0)$
54. $y = \text{sen}\, x + \text{sen}^2 x$, $(0, 0)$

55. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 2/(1 + e^{-x})$ no ponto $(0, 1)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

56. (a) A curva $y = |x|/\sqrt{2 - x^2}$ é chamada *curva ponta de bala*. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, 1)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

57. (a) Se $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável comparando os gráficos de f e f'.

58. A função $f(x) = \text{sen}(x + \text{sen}\, 2x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, aparece em aplicações à síntese de modulação de frequência (FM).
(a) Use um gráfico de f, feito por uma calculadora gráfica, para fazer um esboço rústico do gráfico de f'.
(b) Calcule $f'(x)$ e use essa expressão, com uma ferramenta gráfica, para fazer o gráfico de f'. Compare com o gráfico obtido no item (a).

59. Encontre todos os pontos do gráfico da função $f(x) = 2\,\text{sen}\, x + \text{sen}^2 x$ nos quais a reta tangente é horizontal.

60. Encontre as coordenadas x de todos os pontos sobre a curva $y = \text{sen}\, 2x - 2\,\text{sen}\, x$ nos quais a reta tangente é horizontal.

61. Se $F(x) = f(g(x))$, onde $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$ e $g'(5) = 6$, encontre $F'(5)$.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador   SCA Requer sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

62. Se $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$, onde $f(1) = 7$ e $f'(1) = 4$, encontre $h'(1)$.

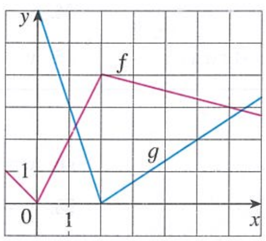
63. Uma tabela de valores para f, g, f' e g' é fornecida.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

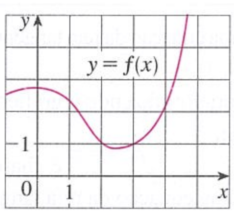
(a) Se $h(x) = f(g(x))$, encontre $h'(1)$.
(b) Se $H(x) = g(f(x))$, encontre $H'(1)$.

64. Sejam f e g as funções no Exercício 63.
(a) Se $F(x) = f(f(x))$, encontre $F'(2)$.
(b) Se $G(x) = g(g(x))$, encontre $G'(3)$.

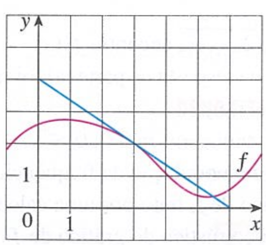
65. Se f e g forem as funções cujos gráficos são mostrados, sejam $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$, e $w(x) = g(g(x))$. Encontre cada derivada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.
(a) $u'(1)$ (b) $v'(1)$ (c) $w'(1)$



66. Se f for a função cujo gráfico é mostrado, sejam $h(x) = f(f(x))$ e $g(x) = f(x^2)$. Use o gráfico de f para estimar o valor de cada uma das derivadas.
(a) $h'(2)$ (b) $g'(2)$



67. Se $g(x) = \sqrt{f(x)}$, onde o gráfico de f é mostrado, avalie $g'(3)$.



68. Suponha que f seja uma derivável em $\mathbb{R}$ e α, um número real. Sejam $F(x) = f(x^\alpha)$ e $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encontre expressões para (a) $F'(x)$ e (b) $G'(x)$.

69. Suponha que f seja derivável em $\mathbb{R}$. Sejam $F(x) = f(e^x)$ e $G(x) = e^{f(x)}$. Encontre expressões para (a) $F'(x)$ e (b) $G'(x)$.

70. Sejam $g(x) = e^{cx} + f(x)$ e $h(x) = e^{kx}f(x)$, onde $f(0) = 3$, $f'(0) = 5$ e $f''(0) = -2$.
(a) Encontre $g'(0)$ e $g''(0)$ em termos de c.
(b) Em termos de k, encontre uma equação da reta tangente para o gráfico de h no ponto onde $x = 0$.

71. Seja $r(x) = f(g(h(x)))$, onde $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$ e $f'(3) = 6$. Encontre $r'(1)$.

72. Se g for duas vezes derivável e $f(x) = xg(x^2)$, encontre f'' em termos de g, g' e g''.

73. Se $F(x) = f(3f(4f(x)))$, onde $f(0) = 0$ e $f'(0) = 2$, encontre $F'(0)$.

74. Se $F(x) = f(xf(xf(x)))$, onde $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$ e $f'(3) = 6$, encontre $F'(1)$.

75. Mostre que a função $y = e^{2x}(A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x)$ satisfaz a equação diferencial $y'' - 4y' + 13y = 0$.

76. Para quais valores de r a função $y = e^{rx}$ satisfaz a equação diferencial $y'' - 4y' + y = 0$?

77. Encontre a 50ª derivada de $y = \cos 2x$.

78. Encontre a 1000ª derivada de $f(x) = xe^{-x}$.

79. O deslocamento de uma partícula em uma corda vibrante é dado pela equação $s(t) = 10 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(10\pi t)$ onde s é medido em centímetros e t, em segundos. Encontre a velocidade da partícula após t segundos.

80. Se a equação de movimento de uma partícula for dada por $s = A \cos(\omega t + \delta)$, dizemos que a partícula está em movimento *harmônico simples*.
(a) Encontre a velocidade da partícula no tempo t.
(b) Quando a velocidade é zero?

81. Cefeu é uma constelação cujo brilho é variável. A estrela mais visível dessa constelação é a Delta Cefeu, para a qual o intervalo de tempo entre os brilhos máximos é de 5,4 dias. O brilho médio dessa estrela é de 4,0, com uma variação de $\pm 0{,}35$. Em vista desses dados, o brilho de Delta Cefeu no tempo t, onde t é medido em dias, foi modelada pela função

$$B(t) = 4{,}0 + 0{,}35 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{5{,}4}\right)$$

(a) Encontre a taxa de variação do brilho após t dias.
(b) Encontre, com precisão até duas casas decimais, a taxa de crescimento após 1 dia.

82. No Exemplo 4 da Seção 1.3 chegamos a um modelo para a duração da luz do dia (em horas) em Ancara, Turquia, no t-ésimo dia do ano:

$$L(t) = 12 + 2{,}8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Use esse modelo para comparar como o número de horas de luz do dia aumenta em Ancara em 21 de março e em 21 de maio.

83. O movimento de uma mola sujeita a uma força de atrito ou a uma força de amortecimento (tal como o amortecedor em um carro) é frequentemente modelado pelo produto de uma função exponencial e uma função seno ou cosseno. Suponha que a equação de movimento de um ponto nessa mola seja

$$s(t) = 2e^{-1{,}5t} \operatorname{sen} 2\pi t$$

onde s é medido em centímetros e t, em segundos. Encontre a velocidade após t segundos e faça o gráfico das funções posição e velocidade para $0 \leqslant t \leqslant 2$.

84. Sob certas circunstâncias, um boato se propaga de acordo com a equação

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

onde $p(t)$ é a proporção da população que já ouviu o boato no tempo t e a e k são contantes positivas. [Na Seção 9.4 veremos que esta é uma equação razoável para $p(t)$.]

(a) Encontre $\lim_{t\to\infty} p(t)$.

(b) Encontre a taxa de propagação do boato.

(c) Faça o gráfico de p para o caso $a = 10$, $k = 0{,}5$, onde t é medido em horas. Use o gráfico para estimar quanto tempo será necessário para o boato atingir 80% da população.

85. Uma partícula se move ao longo de uma reta com deslocamento $s(t)$, velocidade $v(t)$ e aceleração $a(t)$. Mostre que

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}$$

Explique a diferença entre os significados das derivadas dv/dt e dv/ds.

86. Ar está sendo bombeado para dentro de um balão climático esférico. Em qualquer tempo t, o volume do balão será $V(t)$ e seu raio será $r(t)$.

(a) O que as derivadas dV/dr e dV/dt representam?

(b) Expresse dV/dt em termos de dr/dt.

87. O *flash* de uma câmera opera armazenando carga em um capacitor e liberando-a instantaneamente ao ser disparado. Os dados na tabela à esquerda descrevem a carga Q armazenada no capacitor (medida em microcoulombs, μC) no tempo t (medido em segundos após o *flash* ter sido disparado).

t	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
Q	100,00	81,87	67,03	54,88	44,93	36,76

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para encontrar um modelo exponencial para a carga (veja a Seção 1.5).

(b) A derivada $Q'(t)$ representa a corrente elétrica (medida em microampères, μA, que flui do capacitor para a lâmpada do *flash*. Use a parte (a) para estimar a corrente quando $t = 0{,}04$ s. Compare com o resultado do Exemplo 2 na Seção 2.1.

88. A tabela fornece a população do México (em milhões) em anos de censo no século XX.

Ano	População	Ano	População
1900	13,6	1960	34,9
1910	15,2	1970	48,2
1920	14,3	1980	66,8
1930	16,6	1990	81,2
1940	19,7	2000	97,5
1950	25,8		

(a) Use uma calculadora gráfica ou um computador para ajustar uma função exponencial com os dados. Faça um gráfico dos pontos dados e do modelo exponencial. Quão bom é o ajuste?

(b) Estime as taxas de crescimento populacional em 1950 e 1960 fazendo a média de inclinações de retas secantes.

(c) Use sua exponencial da parte (a) para encontrar um modelo para as taxas de crescimento da população do México no século XX.

(d) Use seu modelo na parte (c) para estimar as taxas de crescimento em 1950 e 1960. Compare com sua estimativa da parte (b).

SCA **89.** Os SCA têm comandos que derivam funções, mas a forma da resposta pode não ser conveniente e, portanto, comandos posteriores podem ser necessários para simplificar a resposta.

(a) Use um SCA para encontrar a derivada do Exemplo 5 e compare com a resposta dele. A seguir, use o comando simplificar e compare novamente.

(b) Use um SCA para derivar a função do Exemplo 6. O que acontecerá se você usar o comando simplificar? O que acontecerá se você usar o comando fatorar? Qual forma da resposta é melhor para localizar as tangentes horizontais?

SCA **90.** (a) Use um SCA para derivar a função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - x + 1}{x^4 + x + 1}}$$

e para simplificar o resultado.

(b) Onde o gráfico de f tem tangentes horizontais?

(c) Faça os gráficos de f e f' na mesma tela. Os gráficos são consistentes com sua resposta da parte (b)?

91. Use a Regra da Cadeia para demonstrar o que segue.

(a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.

(b) A derivada de uma função ímpar é uma função par.

92. Use a Regra da Cadeia e a Regra do Produto para dar uma demonstração alternativa da Regra do Quociente.
[*Sugestão:* Escreva $f(x)/g(x) = f(x)[g(x)]^{-1}$.]

93. (a) Se n for um inteiro positivo, demonstre que

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^n x \cos nx) = n\,\text{sen}^{n-1}x \cos(n+1)x$$

(b) Encontre uma fórmula para a derivada de $y = \cos^n x \cos nx$ que seja similar àquela da parte (a).

94. Suponha que $y = f(x)$ seja uma curva que está sempre acima do eixo x e que não tenha uma tangente horizontal, sendo f derivável em toda a parte. Para quais valores de y a taxa de variação de y^5 em relação a x é 80 vezes a taxa de variação de y em relação a x?

95. Use a Regra da Cadeia para mostrar que, se θ for medido em graus, então

$$\frac{d}{d\theta}(\text{sen}\,\theta) = \frac{\pi}{180}\cos\theta$$

(Isso dá uma razão para a convenção de que a medida em radianos é sempre usada quando tratamos o cálculo de funções trigonométricas: as fórmulas de derivação não seriam tão simples se usássemos a medida de graus.)

96. (a) Escreva $|x| = \sqrt{x^2}$ e use a Regra da Cadeia para mostrar que

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$$

(b) Se $f(x) = |\text{sen}\,x|$, encontre $f'(x)$ e esboce os gráficos de f e f'. Onde f não é derivável?

(c) Se $g(x) = \text{sen}\,|x|$, encontre $g'(x)$ e esboce os gráficos de g e g'. Onde g não é derivável?

97. Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, onde f e g são funções duas vezes deriváveis, mostre que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

98. Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, onde f e g possuem três derivadas, encontre a fórmula para d^3y/dx^3 análoga à dada no Exercício 97.