3.3 Exercícios

1–16 Derive.

1. $f(x) = 3x^2 - 2\cos x$
2. $f(x) = \sqrt{x}\,\text{sen}\,x$
3. $f(x) = \text{sen}\,x + \frac{1}{2}\text{cotg}\,x$
4. $y = 2\sec x - \text{cossec}\,x$
5. $g(t) = t^3\cos t$
6. $g(t) = 4\sec t + \text{tg}\,t$
7. $h(\theta) = \text{cossec}\,\theta + e^\theta\,\text{cotg}\,\theta$
8. $y = e^u(\cos u + cu)$
9. $y = \dfrac{x}{2 - \text{tg}\,x}$
10. $y = \text{sen}\,\theta\,\cos\theta$
11. $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta}{1 + \sec\theta}$
12. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \text{sen}\,x}$
13. $y = \dfrac{t\,\text{sen}\,t}{1 + t}$
14. $y = \dfrac{1 - \sec x}{\text{tg}\,x}$
15. $f(x) = xe^x\,\text{cossec}\,x$
16. $y = x^2\,\text{sen}\,x\,\text{tg}\,x$

17. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\text{cossec}\,x) = -\text{cossec}\,x\,\text{cotg}\,x$.

18. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\,\text{tg}\,x$.

19. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\text{cotg}\,x) = -\text{cossec}^2 x$.

20. Demonstre, pela definição de derivada, que se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\text{sen}\,x$.

21–24 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

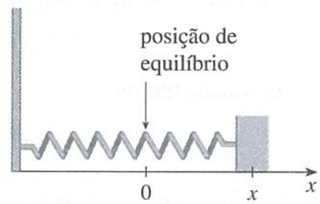
21. $y = \sec x$, $(\pi/3, 2)$
22. $y = e^x\cos x$, $(0, 1)$
23. $y = \cos x - \text{sen}\,x$, $(\pi, -1)$
24. $y = x + \text{tg}\,x$, (π, π)

25. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 2x\,\text{sen}\,x$ no ponto $(\pi/2, \pi)$.
   (b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.
26. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 3x + 6\cos x$ no ponto $(\pi/3, \pi + 3)$.
   (b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.
27. (a) Se $f(x) = \sec x - x$, encontre $f'(x)$.
   (b) Verifique se sua resposta para a parte (a) é razoável fazendo os gráficos de f e f' para $|x| < \pi/2$.
28. (a) Se $f(x) = e^x\cos x$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.
   (b) Verifique que suas respostas para a parte (a) são razoáveis fazendo os gráficos de f, f' e f''.
29. Se $H(\theta) = \theta\,\text{sen}\,\theta$, encontre $H'(\theta)$ e $H''(\theta)$.
30. Se $f(t) = \text{cossec}\,t$, encontre $f''(\pi/6)$.
31. (a) Use a Regra do Quociente para derivar a função
$$f(x) = \frac{\text{tg}\,x - 1}{\sec x}$$
   (b) Simplifique a expressão para $f(x)$ escrevendo-a em termos de sen x e cos x e, então, encontre $f'(x)$.
   (c) Mostre que suas respostas para as partes (a) e (b) são equivalentes.
32. Suponha $f(\pi/3) = 4$ e $f'(\pi/3) = -2$, e faça $g(x) = f(x)\,\text{sen}\,x$ e $h(x) = (\cos x)/f(x)$. Encontre
   (a) $g'(\pi/3)$ (b) $h'(\pi/3)$

33–34 Para quais valores de x o gráfico de f tem uma reta tangente horizontal?

33. $f(x) = x + 2\,\text{sen}\,x$
34. $f(x) = e^x\cos x$

35. Um corpo em uma mola vibra horizontalmente sobre uma superfície lisa (veja a figura). Sua equação de movimento é $x(t) = 8\,\text{sen}\,t$, onde t está em segundos e x, em centímetros.
   (a) Encontre a velocidade e a aceleração no tempo t.
   (b) Encontre a posição, velocidade e aceleração do corpo na posição de equilíbrio $t = 2\pi/3$. Em que direção ele está se movendo nesse momento?



36. Uma tira elástica é presa a um gancho e uma massa é presa na ponta inferior da tira. Quando o corpo é puxado para baixo e então solto, ele vibra verticalmente. A equação do movimento é $s = 2\cos t + 3\,\text{sen}\,t$, $t \geqslant 0$, onde s é medido em centímetros e t, em segundos. (Consideremos o sentido positivo como para baixo.)
   (a) Encontre a velocidade e a aceleração no tempo t.
   (b) Faça os gráficos das funções velocidade e aceleração.
   (c) Quando o corpo passa pela posição de equilíbrio pela primeira vez?
   (d) A que distância da posição de equilíbrio o corpo chega?
   (e) Quando a velocidade é máxima?
37. Uma escada com 6 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Seja θ o ângulo entre o topo da escada e a parede e x, a distância do pé da escada até a parede. Se o pé da escada escorregar para longe da parede, com que velocidade x variará em relação a θ quando $\theta = \pi/3$?
38. Um objeto de massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força é
$$F = \frac{\mu mg}{\mu\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta}$$
onde μ é uma constante chamada *coeficiente de atrito*.
   (a) Encontre a taxa de variação de F em relação a θ.
   (b) Quando essa taxa de variação é igual a 0?
   (c) Se $m = 20$ kg, $g = 9{,}8$ m/s^2 e $\mu = 0{,}6$, faça o gráfico de F como uma função de θ e use-o para encontrar o valor de θ para o qual $dF/d\theta = 0$. Esse valor é consistente com a resposta dada na parte (b)?

39–48 Encontre o limite

39. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{x}$

40. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 4x}{\text{sen } 6x}$

41. $\lim_{t \to 0} \frac{\text{tg } 6t}{\text{sen } 2t}$

42. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\text{sen }\theta}$

43. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{5x^3 - 4x}$

44. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x \text{ sen } 5x}{x^2}$

45. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen }\theta}{\theta + \text{tg }\theta}$

46. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x}$

47. $\lim_{x \to \pi/4} \frac{1 - \text{tg } x}{\text{sen } x - \cos x}$

48. $\lim_{x \to 1} \frac{\text{sen}(x - 1)}{x^2 + x - 2}$

49–50 Encontre a derivada dada, encontrando as primeiras derivadas e observando o padrão que ocorre.

49. $\frac{d^{99}}{dx^{99}}(\text{sen } x)$

50. $\frac{d^{35}}{dx^{35}}(x \text{ sen } x)$

51. Encontre constantes A e B de forma que a função $y = A \text{ sen } x + B \cos x$ satisfaça a equação diferencial $y'' + y' - 2y = \text{sen } x$.

52. (a) Avalie $\lim_{x \to \infty} x \text{ sen } \frac{1}{x}$.

(b) Avalie $\lim_{x \to 0} x \text{ sen } \frac{1}{x}$.

(c) Ilustre as partes (a) e (b) fazendo o gráfico de $y = x \text{ sen}(1/x)$.

53. Derive cada identidade trigonométrica para obter uma nova identidade (ou uma familiar).

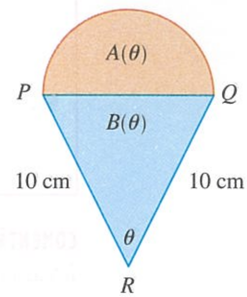
(a) $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$

(b) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

(c) $\text{sen } x + \cos x = \frac{1 + \text{cotg } x}{\text{cossec } x}$

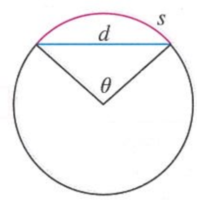
54. Um semicírculo com diâmetro PQ está sobre um triângulo isósceles PQR para formar uma região com um formato de sorvete, conforme mostra a figura. Se $A(\theta)$ é a área do semicírculo e $B(\theta)$ é a área do triângulo, encontre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



55. A figura mostra um arco de círculo com comprimento s e uma corda com comprimento d, ambos subentendidos por um ângulo central θ. Encontre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{s}{d}$$



56. Seja $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$.

(a) Faça o gráfico de f. Que tipo de descontinuidade parece ocorrer em 0?

(b) Calcule os limites laterais de f em 0. Esses valores confirmam sua resposta para a parte (a)?

3.4 A Regra da Cadeia

Suponha que você precise derivar a função

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Veja a Seção 1.3 para uma revisão das funções compostas.

As fórmulas de derivação que você aprendeu nas seções precedentes deste capítulo não lhe permitem calcular $F'(x)$.

Observe que F é uma função composta. Na realidade, se assumirmos $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2 + 1$, então poderemos escrever $y = F(x) = f(g(x))$, ou seja, $F = f \circ g$. Sabemos como derivar ambas, f e g, então seria útil ter uma regra que nos dissesse como achar a derivada de $F = f \circ g$ em termos das derivadas de f e g.

O resultado é que a derivada da função composta $f \circ g$ é o produto das derivadas de f e g. Esse fato é um dos mais importantes das regras de derivação e é chamado *Regra da Cadeia*. Ela parece plausível se interpretarmos as derivadas como taxas de variação. Considere du/dx como a taxa de variação de u com relação a x, dy/du como a taxa de variação de y com relação a u, e dy/dx como a taxa de variação de y com relação a x. Se u variar duas vezes mais rápido que x, e y variar três vezes mais rápido que u, então parece plausível que y varie seis vezes mais rápido que x e, portanto, esperamos que