para todos os valores de x. Assim, f''' é uma função constante e seu gráfico é uma reta horizontal. Portanto, para todos os valores de x,

$$f^{(4)}(x) = 0$$

Podemos interpretar fisicamente a terceira derivada no caso em que a função é a função posição $s = s(t)$ de um objeto que se move ao longo de uma reta. Como $s''' = (s'')' = a'$, a terceira derivada da função posição é a derivada da função aceleração e é chamada ***jerk***:

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

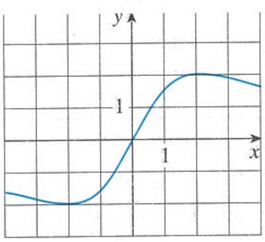
Assim, o *jerk* j é a taxa de variação da aceleração. O nome é adequado (*jerk*, em português, significa solavanco, sacudida), pois um *jerk* grande significa uma variação súbita na aceleração, o que causa um movimento abrupto em um veículo.

Vimos que uma aplicação da segunda e terceira derivadas ocorre na análise do movimento de objetos usando aceleração e *jerk*. Investigaremos mais uma aplicação da segunda derivada na Seção 4.3, quando mostraremos como o conhecimento de f'' nos dá informação sobre a forma do gráfico de f. No Capítulo 11, no Volume II, veremos como a segunda derivada e as derivadas de ordem mais alta nos permitem representar funções como somas de séries infinitas.

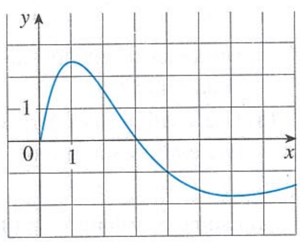
2.8 Exercícios

1–2 Use os gráficos dados para estimar o valor de cada derivada. Esboce então o gráfico de f'.

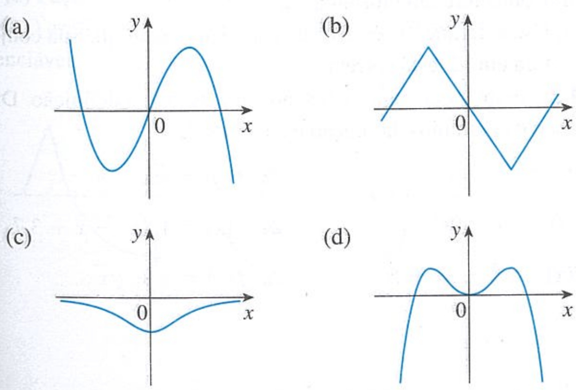
1. (a) $f'(-3)$
(b) $f'(-2)$
(c) $f'(-1)$
(d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$
(f) $f'(2)$
(g) $f'(3)$

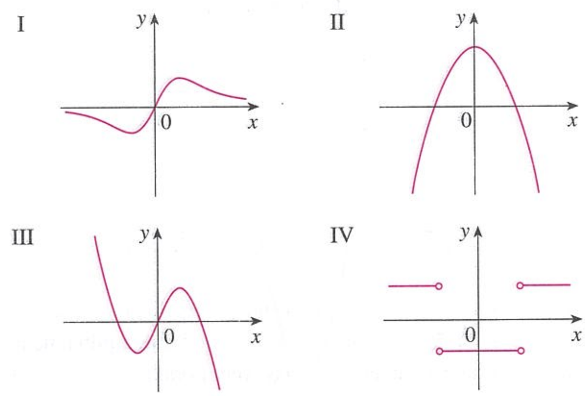


2. (a) $f'(0)$
(b) $f'(1)$
(c) $f'(2)$
(d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$
(f) $f'(5)$
(g) $f'(6)$
(h) $f'(7)$



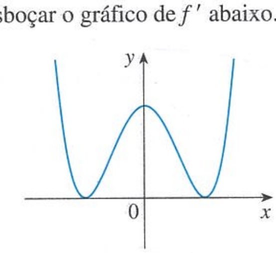
3. Associe o gráfico de cada função em (a)-(d) com o gráfico de sua derivada em I–IV. Dê razões para suas escolhas.



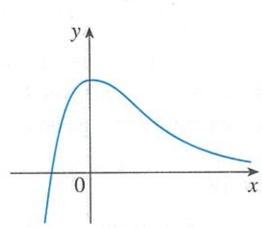


4–11 Trace ou copie o gráfico da função f dada. (Assuma que os eixos possuem escalas iguais.) Use, então, o método do Exemplo 1 para esboçar o gráfico de f' abaixo.

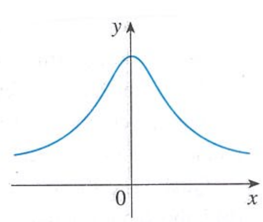
4.



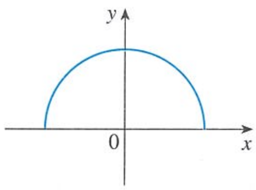
5.



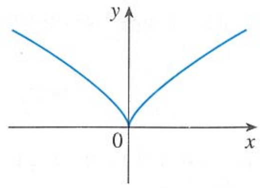
6.



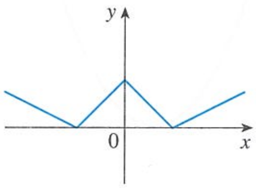
7.



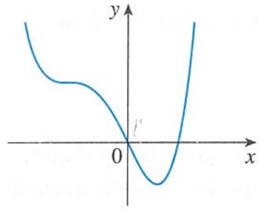
8.



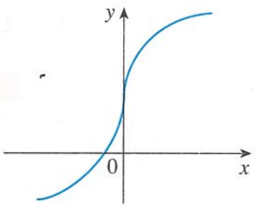
9.



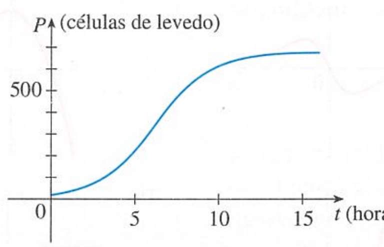
10.



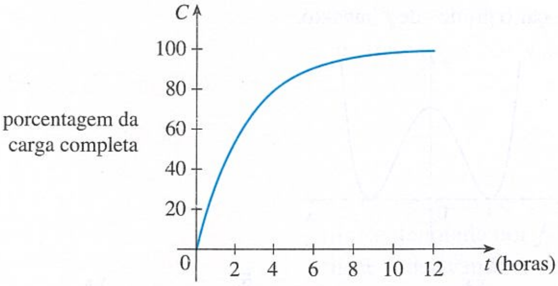
11.



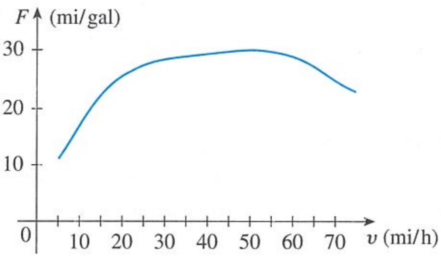
12. O gráfico mostrado corresponde ao da função população $P(t)$ de cultura em laboratório de células de levedo. Use o método do Exemplo 1 para obter o gráfico da derivada $P'(t)$. O que o gráfico de P' nos diz sobre a população de levedo?



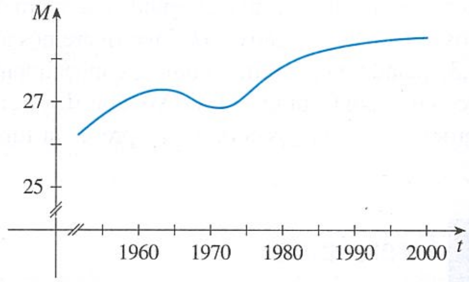
13. Uma pilha recarregável é colocada no carregador. O gráfico mostra $C(t)$, a porcentagem de capacidade total que a pilha alcança conforme a função de tempo t passa (em horas).
(a) Qual o significado da derivada $C'(t)$?
(b) Esboce o gráfico de $C'(t)$. O que o gráfico diz?



14. O gráfico (do Departamento de Energia dos EUA) mostra como a velocidade do carro afeta o rendimento do combustível. O rendimento do combustível F é medido em milhas por galão e a velocidade v é medida em milhas por hora.
(a) Qual o significado da derivada $F'(v)$?
(b) Esboce o gráfico de $F'(v)$.
(c) Em qual velocidade você deve dirigir se quer economizar combustível?



15. O gráfico mostra como a idade média dos homens japoneses quando se casam pela primeira vez variou na última metade do século XX. Esboce o gráfico da função derivada $M'(t)$. Em quais os anos a derivada foi negativa?



16–18 Faça um esboço cuidadoso de f e abaixo dele esboce o gráfico de f', como foi feito nos Exercícios 4–11. Você pode sugeir uma fórmula para $f'(x)$ a partir de seu gráfico?

16. $f(x) = \text{sen } x$

17. $f(x) = e^x$

18. $f(x) = \ln x$

19. Seja $f(x) = x^2$.
(a) Estime os valores de $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1)$ e $f'(2)$ fazendo uso de uma ferramenta gráfica para dar *zoom* no gráfico de f.
(b) Use a simetria para deduzir os valores de $f'(-\frac{1}{2}), f'(-1)$ e $f'(-2)$.
(c) Utilize os resultados de (a) e (b) para conjecturar uma fórmula para $f'(x)$.
(d) Use a definição de derivada para demonstrar que sua conjectura em (c) está correta.

20. Seja $f(x) = x^3$.
(a) Estime os valores de $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1), f'(2)$ e $f'(3)$ fazendo uso de uma ferramenta gráfica para dar *zoom* no gráfico de f.
(b) Use simetria para deduzir os valores de $f'(-\frac{1}{2}), f'(-1), f'(-2)$ e $f'(-3)$.
(c) Empregue os valores de (a) e (b) para fazer o gráfico de f'.
(d) Conjecture uma fórmula para $f'(x)$.
(e) Use a definição de derivada para demonstrar que sua conjectura em (d) está correta.

21–31 Encontre a derivada da função dada usando a definição. Diga quais são os domínios da função e da derivada.

21. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

22. $f(x) = mx + b$

23. $f(t) = 5t - 9t^2$

24. $f(x) = 1{,}5x^2 - x + 3{,}7$

25. $f(x) = x^3 - 3x + 5$

26. $f(x) = x + \sqrt{x}$

27. $g(x) = \sqrt{9 - x}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}$

29. $G(t) = \dfrac{1 - 2t}{3 + t}$

30. $f(x) = x^{3/2}$

31. $f(x) = x^4$

---

32. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = \sqrt{6 - x}$ começando pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$ e usando as transformações da Seção 1.3.
(b) Use o gráfico da parte (a) para esboçar o gráfico de f'.
(c) Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$. Quais os domínios de f e f'?
(d) Use uma ferramenta gráfica para fazer o gráfico de f' e compare-o com o esboço da parte (b).

33. (a) Se $f(x) = x^4 + 2x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável, comparando os gráficos de f e f'.

34. (a) Se $f(x) = x + 1/x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável, comparando os gráficos de f e f'.

35. A taxa de desemprego $U(t)$ varia com o tempo. A tabela fornece a porcentagem de desempregados na força de trabalho australiana em meados de 1995 a 2004.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1995	8,1	2000	6,2
1996	8,0	2001	6,9
1997	8,2	2002	6,5
1998	7,9	2003	6,2
1999	6,7	2004	5,6

(a) Qual o significado de $U'(t)$? Quais são suas unidades?
(b) Construa uma tabela de valores para $U'(t)$.

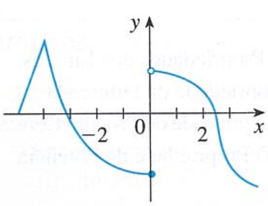
36. Seja $P(t)$ a porcentagem da população das Filipinas com idade maior que 60 anos no instante t. A tabela fornece projeções dos valores desta função de 1995 a 2020.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1995	5,2	2010	6,7
2000	5,5	2015	7,7
2005	6,1	2020	8,9

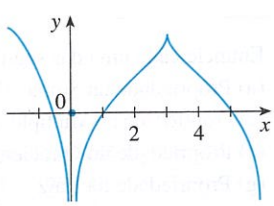
(a) Qual o significado de $P'(t)$? Quais são suas unidades?
(b) Construa uma tabela de valores para $P'(t)$.
(c) Faça os gráficos de P e P'.

37–40 O gráfico de f é dado. Indique os números nos quais f não é diferenciável.

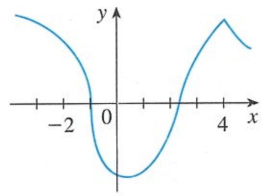
37.



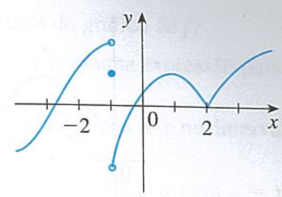
38.



39.



40.

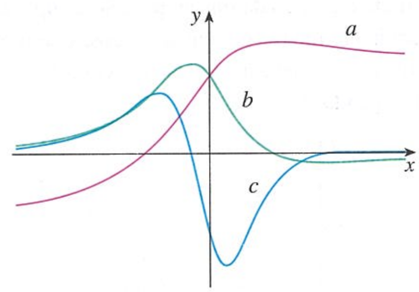


---

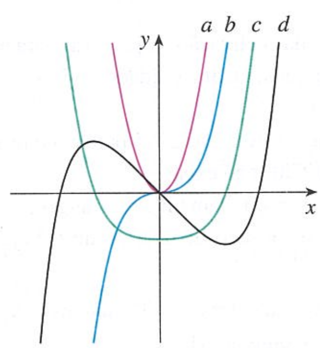
41. Faça o gráfico da função $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Dê *zoom* primeiro em direção ao ponto $(-1, 0)$ e, então, em direção à origem. Qual a diferença entre os comportamentos de f próximo a esses dois pontos? O que você conclui sobre a diferenciabilidade de f?

42. Dê *zoom* em direção aos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(-1, 0)$ sobre o gráfico da função $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. O que você observa? Explique o que você viu em termos da diferenciabilidade de g.

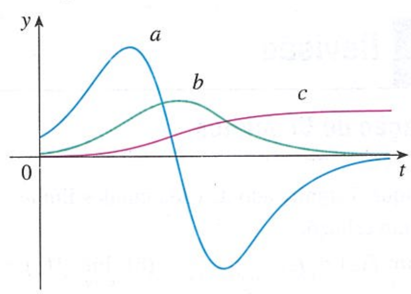
43. A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



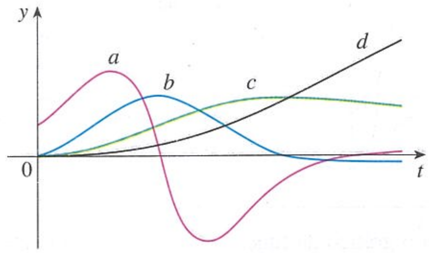
44. A figura mostra os gráficos de f, f', f'' e f'''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



45. A figura mostra os gráficos de três funções. Uma é a função da posição de um carro, outra é a velocidade do carro e outra é sua aceleração. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



46. A figura mostra os gráficos de quatro funções. Uma é a função da posição de um carro, outra é a velocidade do carro, outra é sua aceleração e outra é seu *jerk*. Identifique cada curva e explique suas escolhas.

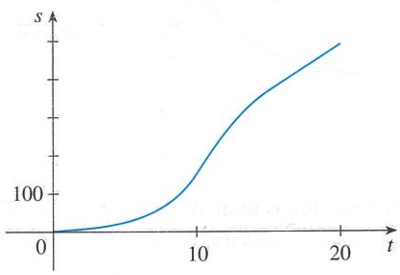


47–48 Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$ e $f''(x)$. A seguir, trace f, f' e f'' em uma mesma tela e verifique se suas respostas são razoáveis.

47. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ **48.** $f(x) = x^3 - 3x$

49. Se $f(x) = 2x^2 - x^3$, encontre $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ e $f^{(4)}(x)$. Trace f, f', f'' e f''' em uma única tela. Os gráficos são consistentes com as interpretações geométricas destas derivadas?

50. (a) É mostrado o gráfico da função posição de um veículo, onde s é medido em metros e t, em segundos. Use-o para traçar a velocidade e a aceleração do veículo. Qual é a aceleração em $t = 10$ segundos?



(b) Use a curva da aceleração da parte (a) para estimar o *jerk* em $t = 10$ segundos. Qual a unidade do *jerk*?

51. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
(a) Se $a \neq 0$, use a Equação 2.7.5 para encontrar $f'(a)$.
(b) Mostre que $f'(0)$ não existe.
(c) Mostre que $y = \sqrt[3]{x}$ tem uma reta tangente vertical em $(0, 0)$. (Relembre o formato do gráfico de f. Veja a Figura 13 na Seção 1.2.)

52. (a) Se $g(x) = x^{2/3}$, mostre que $g'(0)$ não existe.
(b) Se $a \neq 0$, encontre $g'(a)$.
(c) Mostre que $y = x^{2/3}$ tem uma reta tangente vertical em $(0, 0)$.
(d) Ilustre a parte (c) fazendo o gráfico de $y = x^{2/3}$.

53. Mostre que a função $f(x) = |x - 6|$ não é diferenciável em 6. Encontre uma fórmula para f' e esboce seu gráfico.

54. Onde a função maior inteiro $f(x) = [\![x]\!]$ não é diferenciável? Encontre uma fórmula para f' e esboce seu gráfico.

55. (a) Esboce o gráfico da função $f(x) = x|x|$.
(b) Para quais valores de x é f diferenciável?
(c) Encontre uma fórmula para f'.

56. As derivadas **à esquerda** e **à direita** de F em a são definidas por

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

e

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se esses limites existirem. Então $f'(a)$ existe se, e somente se, essas derivadas unilaterais existirem e forem iguais.
(a) Encontre $f'_-(4)$ e $f'_+(4)$ para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 5 - x & \text{se } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{se } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(b) Esboce o gráfico de f.
(c) Onde f é descontínua?
(d) Onde f não é diferenciável?

57. Lembre-se de que uma função f é chamada *par* se $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio, e *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$ para cada um destes x. Demonstre cada uma das afirmativas a seguir.
(a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.
(b) A derivada de uma função ímpar é uma função par.

58. Quando você abre uma torneira de água quente, a temperatura T da água depende de quanto tempo a água está fluindo.
(a) Esboce um gráfico possível de T como uma função do tempo t que decorreu desde que a torneira foi aberta.
(b) Descreva como é a taxa de variação de T em relação a t quando t está crescendo.
(c) Esboce um gráfico da derivada de T.

59. Seja ℓ a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$. O *ângulo de inclinação* de ℓ é o ângulo ϕ que ℓ faz com a direção positiva do eixo x. Calcule ϕ com a precisão de um grau.

2 Revisão

Verificação de Conceitos

1. Explique o significado de cada um dos limites a seguir e ilustre com um esboço.
(a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$
(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
(e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

2. Descreva as várias situações nas quais um limite pode não existir. Ilustre-as com figuras.

3. Enuncie cada uma das seguintes Propriedades dos Limites.
(a) Propriedade da Soma (b) Propriedade da Diferença
(c) Propriedade do Múltiplo (d) Propriedade do Produto Constante
(e) Propriedade do Quociente (f) Propriedade da Potência
(g) Propriedade da Raiz

4. O que afirma o Teorema do Confronto?

5. (a) O que significa dizer que uma reta $x = a$ é uma assíntota vertical da curva $y = f(x)$? Trace curvas que ilustrem cada uma das várias possibilidades.

(b) O que significa dizer que uma reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$? Trace curvas que ilustrem cada uma das várias possibilidades.

6. Quais das curvas a seguir têm assíntotas verticais? E horizontais?

(a) $y = x^4$ (b) $y = \operatorname{sen} x$
(c) $y = \operatorname{tg} x$ (d) $y = \operatorname{tg}^{-1} x$
(e) $y = e^x$ (f) $y = \ln x$
(g) $y = 1/x$ (h) $y = \sqrt{x}$

7. (a) Qual o significado de f ser contínua em a?
(b) Qual o significado de f ser contínua no intervalo $(-\infty, \infty)$? Nesse caso, o que se pode dizer sobre o gráfico de f?

8. O que afirma o Teorema do Valor Intermediário?

9. Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

10. Considere um objeto movendo-se ao longo de uma reta com a posição dada por $f(t)$ no momento t. Escreva uma expressão para a velocidade instantânea do objeto em $t = a$. Como pode ser interpretada essa velocidade em termos do gráfico de f?

11. Se $y = f(x)$ e x variar de x_1 a x_2, escreva uma expressão para o seguinte:
(a) Taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$.
(b) Taxa instantânea de variação de y em relação a x em $x = x_1$.

12. Defina a derivada $f'(a)$. Discuta as duas maneiras de interpretar esse número.

13. Defina a segunda derivada de f. Se $f(t)$ for a função de posição de uma partícula, como você pode interpretar a segunda derivada?

14. (a) O que significa f ser diferenciável em a?
(b) Qual a relação entre diferenciabilidade e continuidade de uma função?
(c) Esboce o gráfico de uma função que é contínua, mas não diferenciável em $a = 2$.

15. Descreva as várias situações nas quais uma função não é diferenciável. Ilustre-as com figuras.

Teste – Verdadeiro ou Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. $\displaystyle \lim_{x\to 4}\left(\frac{2x}{x-4} - \frac{8}{x-4}\right) = \lim_{x\to 4}\frac{2x}{x-4} - \lim_{x\to 4}\frac{8}{x-4}$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6} = \frac{\lim_{x\to 1}(x^2+6x-7)}{\lim_{x\to 1}(x^2+5x-6)}$

3. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x^2+2x-4} = \frac{\lim_{x\to 1}(x-3)}{\lim_{x\to 1}(x^2+2x-4)}$

4. Se $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ não existe.

5. Se $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ não existe.

6. Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ não existem, então $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ não existe.

7. Se $\lim_{x\to a} f(x)$ existe mas $\lim_{x\to a} g(x)$ não existe, então $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ não existe.

8. Se $\lim_{x\to 6}[f(x)\,g(x)]$ existe, então o limite deve ser $f(6)\,g(6)$.

9. Se p for um polinômio, então $\lim_{x\to b} p(x) = p(b)$.

10. Se $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] = 0$.

11. Uma função pode ter duas assíntotas horizontais distintas.

12. Se f tem domínio $[0, \infty)$ e não possui assíntota horizontal, então $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

13. Se a reta $x = 1$ for uma assíntota vertical de $y = f(x)$, então f não está definida em 1.

14. Se $f(1) > 0$ e $f(3) < 0$, então existe um número c entre 1 e 3 tal que $f(c) = 0$.

15. Se f for contínua em 5 e $f(5) = 2$ e $f(4) = 3$, então $\lim_{x\to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.

16. Se f for contínua em $[-1, 1]$ e $f(-1) = 4$ e $f(1) = 3$, então existe um número r tal que $|r| < 1$ e $f(r) = \pi$.

17. Seja f uma função tal que $\lim_{x\to 0} f(x) = 6$. Então existe um número positivo δ tal que, se $0 < |x| < \delta$, então $|f(x) - 6| < 1$.

18. Se $f(x) > 1$ para todo x e $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, então $\lim_{x\to 0} f(x) > 1$.

19. Se f for contínua em a, então f é diferenciável em a.

20. Se $f'(r)$ existe, então $\lim_{x\to r} f(x) = f(r)$.

21. $\displaystyle \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

22. A equação $x^{10} - 10x^2 + 5 = 0$ tem uma raiz no intervalo $(0, 2)$.

23. Se f é contínua em a, então $|f|$ também o é.

24. Se $|f|$ é contínua em a, então f também o é.

Exercícios

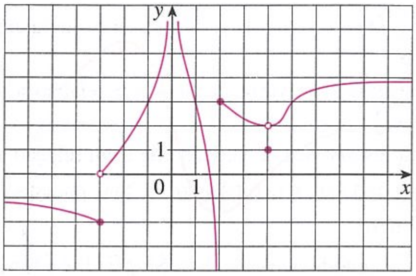
1. É dado o gráfico de f.
(a) Encontre cada limite, ou explique por que ele não existe.

(i) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to -3^+} f(x)$
(iii) $\lim_{x\to -3} f(x)$ (iv) $\lim_{x\to 4} f(x)$
(v) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (vi) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$
(vii) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (viii) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

(b) Dê as equações das assíntotas horizontais.
(c) Dê as equações das assíntotas verticais.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

(d) Em que números f é descontínua? Explique.



2. Esboce um gráfico de um exemplo de função f que satisfaça as seguintes condições:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-3} f(x) = \infty$,
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$,
f é contínua à direita em 3.

3–20 Encontre o limite.

3. $\lim_{x\to 1} e^{x^3-x}$

4. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

5. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

6. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

7. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(h-1)^3+1}{h}$

8. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2-4}{t^3-8}$

9. $\lim_{r\to 9} \dfrac{\sqrt{r}}{(r-9)^4}$

10. $\lim_{v\to 4^+} \dfrac{4-v}{|4-v|}$

11. $\lim_{u\to 1} \dfrac{u^4-1}{u^3+5u^2-6u}$

12. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2}$

13. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

14. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

15. $\lim_{x\to\pi^-} \ln(\operatorname{sen} x)$

16. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1-2x^2-x^4}{5+x-3x^4}$

17. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)$

18. $\lim_{x\to\infty} e^{x-x^2}$

19. $\lim_{x\to 0+} \operatorname{tg}^{-1}(1/x)$

20. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$

21–22 Use gráficos para descobrir as assíntotas das curvas. E então demonstre o que você tiver descoberto.

21. $y = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

22. $y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}$

23. Se $2x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ para $0 < x < 3$, encontre $\lim_{x\to 1} f(x)$.

24. Demonstre que $\lim_{x\to 0} x^2 \cos(1/x^2) = 0$.

25–28 Demonstre cada afirmação usando a definição precisa de limite.

25. $\lim_{x\to 2} (14-5x) = 4$

26. $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

27. $\lim_{x\to 2} (x^2-3x) = -2$

28. $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{2}{\sqrt{x-4}} = \infty$

29. Considere

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \\ 3-x & \text{se } 0 \leqslant x < 3 \\ (x-3)^2 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

(a) Calcule cada limite, se ele existir.

(i) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (iii) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(iv) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (v) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ (vi) $\lim_{x\to 3} f(x)$

(b) Onde f é descontínua?

(c) Esboce o gráfico de f.

30. Considere

$$g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2-x & \text{se } 2 < x \leqslant 3 \\ x-4 & \text{se } 3 < x < 4 \\ \pi & \text{se } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(a) Para cada um dos números 2, 3 e 4, descubra se g é contínua à esquerda, à direita ou contínua no número.

(b) Esboce o gráfico de g.

31–32 Mostre que cada função é contínua em seu domínio. Diga qual é o domínio.

31. $h(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$

32. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-2}$

33–34 Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação no intervalo dado.

33. $x^5 - x^3 + 3x - 5 = 0$, $(1, 2)$

34. $\cos\sqrt{x} = e^x - 2$, $(0, 1)$

35. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = 9 - 2x^2$ no ponto $(2, 1)$.

(b) Encontre uma equação dessa reta tangente.

36. Encontre as equações de retas tangentes à curva

$$y = \frac{2}{1-3x}$$

nos pontos de abscissas 0 e -1.

37. O deslocamento (em metros) de um objeto movendo-se ao longo de uma reta é dado por $s = 1 + 2t + \frac{1}{4}t^2$, onde t é medido em segundos.

(a) Encontre a velocidade média nos seguintes períodos.

(i) $[1, 3]$ (ii) $[1, 2]$

(iii) $[1; 1{,}5]$ (iv) $[1; 1{,}1]$

(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 1$.

38. De acordo com a Lei de Boyle, se a temperatura de um gás confinado for mantida constante, então o produto da pressão P pelo volume V é uma constante. Suponha que, para um certo gás, $PV = 4.000$, P é medido em pascals e V é medido em litros.

(a) Encontre a taxa de variação média de P quando V aumenta de 3 L para 4 L.

(b) Expresse V como uma função de P e mostre que a taxa de variação instantânea de V em relação a P é inversamente proporcional ao quadrado de P.

39. (a) Use a definição de derivada para encontrar $f'(2)$, onde $f(x) = x^3 - 2x$.

(b) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 2x$ no ponto $(2, 4)$.

(c) Ilustre a parte (b) fazendo o gráfico da curva e da reta tangente na mesma tela.

40. Encontre uma função f e um número a tais que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^6 - 64}{h} = f'(a)$$

41. O custo total de saldar uma dívida a uma taxa de juros de $r\%$ ao ano é $C = f(r)$.

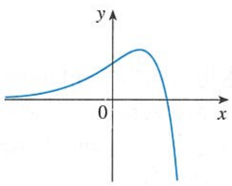
(a) Qual o significado da derivada $f'(r)$? Quais são suas unidades?

(b) O que significa a afirmativa $f'(10) = 1200$?

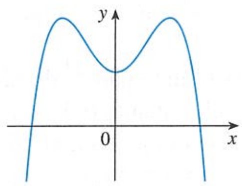
(c) $f'(r)$ é sempre positiva ou muda de sinal?

42–44 Trace ou copie o gráfico da função. Então, esboce o gráfico de sua derivada.

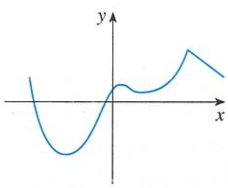
42.



43.



44.



45. (a) Se $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$, use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$.

(b) Encontre os domínios de f e f'.

(c) Faça os gráficos na mesma tela de f e f'. Compare os gráficos para ver se sua resposta da parte (a) é razoável.

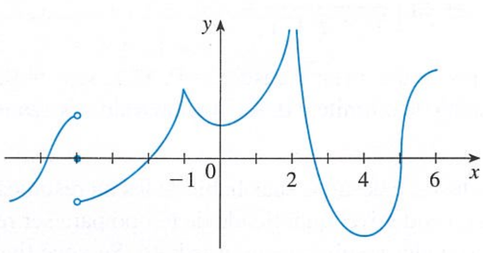
46. (a) Encontre as assíntotas do gráfico de $f(x) = \dfrac{4 - x}{3 + x}$ e use-as para esboçar o gráfico.

(b) Use o gráfico da parte (a) para esboçar o gráfico de f'.

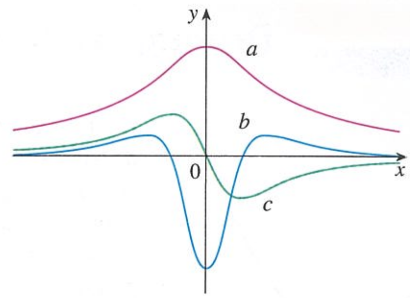
(c) Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$.

(d) Use uma ferramenta gráfica para fazer o gráfico de f' e compare-o com o esboço da parte (b).

47. É dado o gráfico de f. Indique os números nos quais f não é diferenciável.



48. A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



49. Seja $E(t)$ o valor do euro (a moeda europeia) em termos do dólar americano no instante t. A tabela dá valores desta função, em meados do ano, de 2000 a 2004. Interprete e estime os valores de $E'(2002)$.

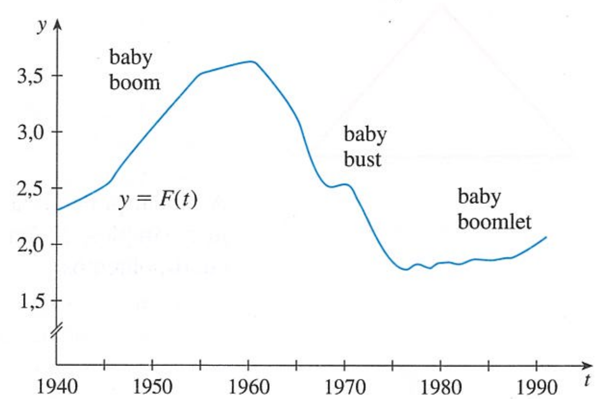
t	2000	2001	2002	2003	2004
$E(t)$	0,955	0,847	0,986	1,149	1,218

50. A *taxa de fertilidade total* no momento t, denotada por $F(t)$, é a estimativa do número médio de crianças nascidas de cada mulher (supondo que a taxa de nascimento corrente permaneça constante). O gráfico da taxa de fertilidade total dos Estados Unidos mostra as flutuações entre 1940 a 1990.

(a) Estime os valores de $F'(1950)$, $F'(1965)$ e $F'(1987)$.

(b) Qual o significado dessas derivadas?

(c) Você pode sugerir as razões para os valores dessas derivadas?



51. Suponha que $|f(x)| \leq g(x)$ para todo x, onde $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Encontre $\lim_{x \to a} f(x)$.

52. Seja $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$.

(a) Para quais valores de a existe $\lim_{x \to a} f(x)$?

(b) Em quais números f é descontínua?

Problemas Quentes

Em uma discussão anterior consideramos a estratégia de *introduzir algo novo* nos **Princípios da Resolução de Problemas** (No final do Capítulo 1). No exemplo a seguir vamos mostrar como esse princípio pode ser algumas vezes proveitoso quando calculamos os limites. A ideia é mudar a variável – introduzir uma nova variável relacionada à original – de forma a tornar mais simples o problema. Mais tarde, na Seção 5.5, faremos uso mais extensivo dessa ideia geral.

EXEMPLO 1 Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x}$, onde c é uma constante.

SOLUÇÃO Colocado dessa forma, esse limite parece desafiador. Na Seção 2.3 calculamos vários limites nos quais tanto o numerador quanto o denominador tendem a zero. Lá, nossa estratégia foi realizar algum tipo de manipulação algébrica que levasse a um cancelamento simplificador, porém, aqui não está claro que tipo de álgebra será necessário.

Assim, introduzimos uma nova variável t pela equação

$$t = \sqrt[3]{1+cx}$$

Também necessitamos expressar x em termos de t, e então resolvemos esta equação:

$$t^3 = 1 + cx \Rightarrow x = \frac{t^3-1}{c} \qquad (\text{se } c \neq 0)$$

Observe que $x \longrightarrow 0$ é equivalente a $t \longrightarrow 1$. Isso nos permite converter o limite dado em outro, envolvendo a variável t:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x} = \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{(t^3-1)/c}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{c(t-1)}{t^3-1}$$

A mudança de variável nos permitiu substituir um limite relativamente complicado por um mais simples, de um tipo já visto antes. Fatorando o denominador como uma diferença dos cubos, obtemos

$$\lim_{t\to 1} \frac{c(t-1)}{t^3-1} = \lim_{t\to 1} \frac{c(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{c}{t^2+t+1} = \frac{c}{3}$$

Ao fazer a mudança da variável, tivemos de descartar o caso $c = 0$. Mas, se $c = 0$, a função é nula para todo x diferente de zero e então seu limite é 0. Assim, em todos os casos, o limite é $c/3$.

As questões a seguir destinam-se a testar e desafiar suas habilidades na resolução de problemas. Algumas delas requerem uma considerável quantidade de tempo para ser resolvidas; assim sendo, não se desencoraje se não puder resolvê-las de imediato. Se você tiver dificuldades, pode ser proveitoso rever a discussão sobre os princípios de resolução de problemas, no Capítulo 1.

Problemas

1. Calcule $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

2. Encontre números a e b tais que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$.

3. Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{|2x-1| - |2x+1|}{x}$.

4. A figura mostra um ponto P sobre a parábola $y = x^2$ e um ponto Q onde a perpendicular que bissecta OP intercepta o eixo y. À medida que P tende à origem ao longo da parábola, o que acontece com Q? Ele tem uma posição-limite? Se sim, encontre-a.

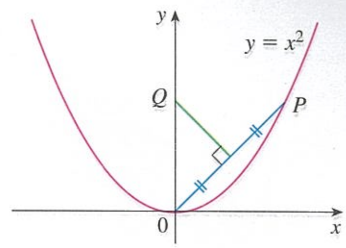


FIGURA PARA O PROBLEMA 4

5. Calcule os limites a seguir, se existirem, onde $[\![x]\!]$ denota a função maior inteiro.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{[\![x]\!]}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} x[\![1/x]\!]$

6. Esboce a região do plano definida por cada uma das seguintes equações.

(a) $[\![x]\!]^2 + [\![y]\!]^2 = 1$ (b) $[\![x]\!]^2 - [\![y]\!]^2 = 3$ (c) $[\![x+y]\!]^2 = 1$ (d) $[\![x]\!] + [\![y]\!] = 1$

7. Encontre todos os valores de a para os quais f é contínua em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leqslant a \\ x^2 & \text{se } x > a. \end{cases}$$

8. Um **ponto fixo** de uma função f é um número c em seu domínio tal que $f(c) = c$. (A função não movimenta c; ele fica fixo.)

(a) Esboce o gráfico de uma função contínua com o domínio $[0, 1]$ cuja imagem também está em $[0, 1]$. Localize um ponto fixo de f.

(b) Tente fazer o gráfico de uma função contínua com o domínio $[0, 1]$ e a imagem em $[0, 1]$ que *não* tenha um ponto fixo. Qual é o obstáculo?

(c) Use o Teorema do Valor Intermediário para demonstrar que toda função contínua com o domínio $[0, 1]$ e a imagem em $[0, 1]$ deve ter um ponto fixo.

9. Se $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = 2$ e $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = 1$, encontre $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$.

10. (a) A figura mostra um triângulo isósceles ABC com $\angle B = \angle C$. A bissetriz do ângulo B intersecta o lado AC no ponto P. Suponha que a base BC permaneça fixa, mas a altura $|AM|$ do triângulo tenda a 0, de forma que A tenda ao ponto médio M de BC. O que acontece com o ponto P durante esse processo? Ele tem uma posição-limite? Se sim, encontre-a.

(b) Tente esboçar a trajetória descrita por P durante esse processo. Então, encontre a equação dessa curva e use-a para esboçar a curva.

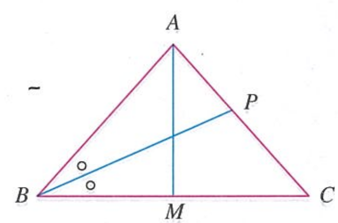


FIGURA PARA O PROBLEMA 10

11. (a) Se começarmos da latitude 0° e procedermos na direção oeste, poderemos ter $T(x)$ como a temperatura de um ponto x em um dado instante. Supondo que T seja uma função contínua de x, mostre que a todo instante fixo existem pelo menos dois pontos diametralmente opostos sobre a linha do equador com exatamente a mesma temperatura.

(b) O resultado da parte (a) é verdadeiro para os pontos sobre qualquer círculo sobre a superfície da Terra?

(c) O resultado da parte (a) vale para a pressão barométrica e para a altitude?

12. Se f for uma função diferenciável e $g(x) = xf(x)$, use a definição de derivada para mostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

13. Suponha que f seja uma função que satisfaça a equação

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$$

para todos os números reais x e y. Suponha também que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(a) Encontre $f(0)$. (b) Encontre $f'(0)$. (c) Encontre $f'(x)$.

14. Suponha que f seja uma função com a propriedade $|f(x)| \leqslant x^2$ para todo x. Mostre que $f(0) = 0$. A seguir, mostre que $f'(0) = 0$.