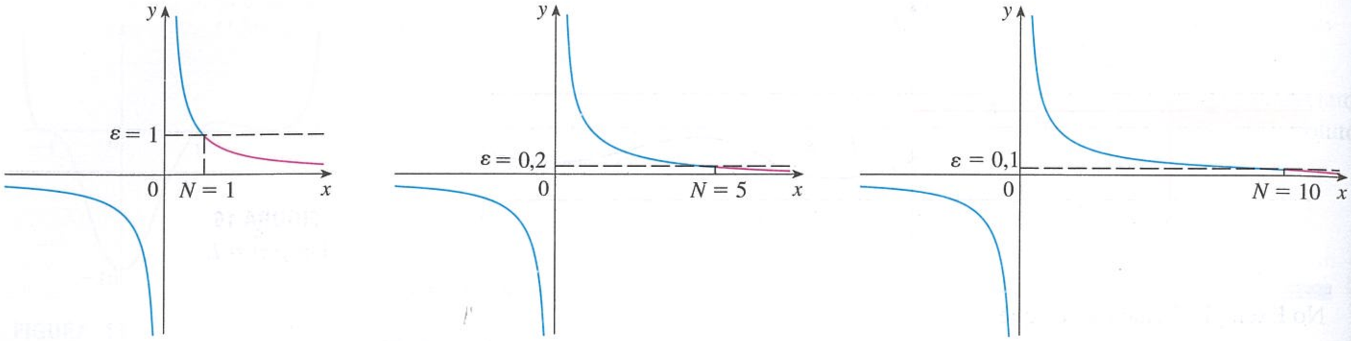


FIGURA 18

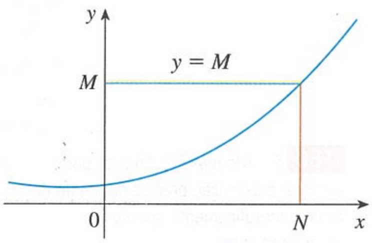


FIGURA 19
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Finalmente, observamos que pode ser definido um limite infinito no infinito da forma a seguir. A ilustração geométrica está dada na Figura 19.

9 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

significa que para todo positivo M existe um correspondente número positivo N tal que

$$\text{se} \quad x > N \quad \text{então} \quad f(x) > M.$$

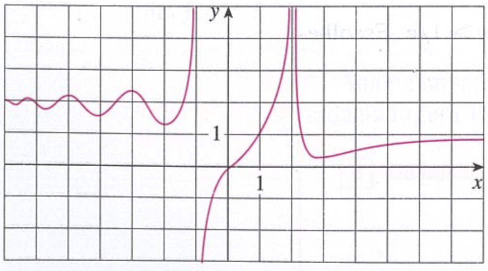
Definições análogas podem ser feitas quando o símbolo ∞ é substituído por $-\infty$. (Veja o Exercício 74.)

2.6 Exercícios

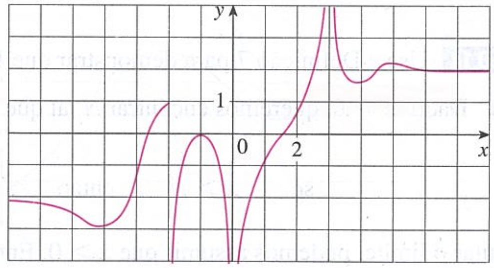
1. Explique com suas palavras o significado de cada um dos itens a seguir.
   (a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$ (b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$

2. (a) O gráfico de $y = f(x)$ pode interceptar uma assíntota vertical? E uma assíntota horizontal? Ilustre com gráficos.
   (b) Quantas assíntotas horizontais pode ter o gráfico de $y = f(x)$? Ilustre com gráficos as possibilidades.

3. Para a função f, cujo gráfico é dado, diga quem são.
   (a) $\lim_{x\to2} f(x)$ (b) $\lim_{x\to-1^-} f(x)$
   (c) $\lim_{x\to-1^+} f(x)$ (d) $\lim_{x\to\infty} f(x)$
   (e) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (f) As equações das assíntotas



4. Para a função g, cujo gráfico é dado, determine o que se pede.
   (a) $\lim_{x\to\infty} g(x)$ (b) $\lim_{x\to-\infty} g(x)$
   (c) $\lim_{x\to3} g(x)$ (d) $\lim_{x\to0} g(x)$
   (e) $\lim_{x\to-2^+} g(x)$ (f) As equações das assíntotas



5–10 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

5. $\lim_{x\to0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 5, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -5$

6. $\lim_{x\to2} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-2^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty,$
   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad f(0) = 0$

7. $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0,$
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty,$ f é ímpar

9. $f(0) = 3, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 4, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2,$
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 4^+} f(x) = \infty,$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

10. $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 2, \quad f(0) = 0,$ f é par

11. Faça uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$$

calculando a função $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ e 100. Então, use o gráfico de f para comprovar sua conjectura.

12. (a) Use o gráfico de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ com precisão de duas casas decimais.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com precisão de quatro casas decimais.

13–14 Calcule o limite justificando cada passagem com as propriedade dos limites que forem usadas.

13. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x + 4}{2x^2 + 5x - 8}$

14. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}}$

15–38 Encontre o limite ou demonstre que não existe.

15. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x + 3}$

16. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x + 5}{x - 4}$

17. $\lim_{x\to -\infty} \frac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$

18. $\lim_{y\to\infty} \frac{2 - 3y^2}{5y^2 + 4y}$

19. $\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}$

20. $\lim_{t\to\infty} \frac{t - t\sqrt{t}}{2t^{3/2} + 3t - 5}$

21. $\lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + x)}$

22. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}}$

23. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

24. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

25. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

26. $\lim_{x\to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

27. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

28. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + 1}$

29. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$

30. $\lim_{x\to\infty} (e^{-x} + 2\cos 3x)$

31. $\lim_{x\to -\infty} (x^4 + x^5)$

32. $\lim_{x\to -\infty} \frac{1 + x^6}{x^4 + 1}$

33. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(e^x)$

34. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$

35. $\lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$

36. $\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2 + 1}$

37. $\lim_{x\to\infty} (e^{-2x}\cos x)$

38. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg}^{-1}(\ln x)$

39. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

traçando o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$

(b) Faça uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar qual será o valor do limite.

(c) Demonstre que sua conjectura está correta.

40. (a) Use um gráfico de

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ com precisão de uma casa decimal.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com precisão de quatro casas decimais.

(c) Encontre o valor exato do limite.

41–46 Encontre as assíntotas horizontais e verticais de cada curva. Confira seu trabalho por meio de um gráfico da curva e das estimativas das assíntotas.

41. $y = \frac{2x + 1}{x - 2}$

42. $y = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$

43. $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

44. $y = \frac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$

45. $y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

46. $y = \frac{2e^x}{e^x - 5}$

47. Estime a assíntota horizontal da função

$$f(x) = \frac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2\,000}$$

através do gráfico f para $-10 \leqslant x \leqslant 10$. A seguir, determine a equação da assíntota calculando o limite. Como você explica a discrepância?

48. (a) Trace o gráfico da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

Quantas assíntotas horizontais e verticais você observa? Use o gráfico para estimar os valores dos limites

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

(b) Calculando valores de $f(x)$, dê estimativas numéricas dos limites na parte (a).

(c) Calcule os valores exatos dos limites na parte (a). Você obtém os mesmos valores ou valores diferentes para estes limites? [Em vista de sua resposta na parte (a), você pode ter de verificar seus cálculos para o segundo limite.]

49. Encontre uma fórmula para uma função f que satisfaça as seguintes condições:

$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty \quad f(2) = 0$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

50. Encontre uma fórmula para uma função que tenha por assíntotas verticais $x = 1$ e $x = 3$ e por assíntota horizontal $y = 1$.

51. Uma função f é a razão de funções quadráticas e possui uma assíntota vertical $x = 4$ e somente um intercepto com o eixo das abscissas em $x = 1$. Sabe-se que f possui uma descontinuidade removível em $x = -1$ e $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$. Calcule
(a) $f(0)$ (b) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

52–56 Encontre os limites quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$. Use essa informação, bem como as intersecções com os eixos, para fazer um esboço do gráfico, como no Exemplo 12.

52. $y = 2x^3 - x^4$ **53.** $y = x^4 - x^6$

54. $y = x^3(x + 2)^2(x - 1)$

55. $y = (3 - x)(1 + x)^2(1 - x)^4$

56. $y = x^2(x^2 - 1)^2(x + 2)$

---

57. (a) Use o Teorema do Confronto para determinar $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.
(b) Faça o gráfico de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$. Quantas vezes o gráfico cruza a assíntota?

58. Por *comportamento final* de uma função queremos indicar uma descrição do que acontece com seus valores quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$.
(a) Descreva e compare o comportamento final das funções

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

por meio do gráfico de ambas nas janelas retangulares $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ e $[-10, 10]$ por $[-10.000, 10.000]$.
(b) Dizemos que duas funções têm o *mesmo comportamento final* se sua razão tende a 1 quando $x \to \infty$. Mostre que P e Q têm o mesmo comportamento final.

59. Sejam P e Q polinômios. Encontre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se o grau de P for (a) menor que o grau de Q e (b) maior que o grau de Q.

60. Faça um esboço da curva $y = x^n$ (n inteiro) nos seguintes casos:
(i) $n = 0$ (ii) $n > 0$, n ímpar
(iii) $n > 0$, n par (iv) $n < 0$, n ímpar
(v) $n < 0$, n par
Então, use esses esboços para encontrar os seguintes limites:
(a) $\lim_{x\to 0^+} x^n$ (b) $\lim_{x\to 0^-} x^n$
(c) $\lim_{x\to\infty} x^n$ (d) $\lim_{x\to -\infty} x^n$

61. Encontre $\lim_{x\to\infty} f(x)$ se, para todo $x > 1$,

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x - 1}}$$

62. (a) Um tanque contém 5.000 litros de água pura. Água salgada contendo 30 g de sal por litro de água é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 25 L/min. Mostre que a concentração de sal depois de t minutos (em gramas por litro) é

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

(b) O que acontece com a concentração quando $t \to \infty$?

63. Seremos capazes de mostrar, no Capítulo 9 do Volume II, que, sob certas condições, a velocidade $v(t)$ de uma gota de chuva caindo no instante t é

$$v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*}),$$

onde g é a aceleração da gravidade e v^* é a *velocidade final* da gota.
(a) Encontre $\lim_{t\to\infty} v(t)$.
(b) Faça o gráfico de $v(t)$ se $v^* = 1$ m/s e $g = 9{,}8$ m/s^2 Quanto tempo levará para a velocidade da gota atingir 99% de sua velocidade final?

64. (a) Fazendo os gráficos de $y = e^{-x/10}$ e $y = 0{,}1$ na mesma tela, descubra quão grande você precisará tomar x para que $e^{-x/10} < 0{,}1$.
(b) A parte (a) pode ser resolvida sem usar uma ferramenta gráfica?

65. Use um gráfico para encontrar um número N tal que

$$\text{se} \quad x > N \quad \text{então} \quad \left| \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} - 1{,}5 \right| < 0{,}05$$

66. Para o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = 2$$

ilustre a Definição 7, encontrando os valores de N que correspondam a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

67. Para o limite

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = -2$$

ilustre a Definição 8, encontrando os valores de N correspondentes a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

68. Para o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

ilustre a Definição 9, encontrando um valor de N correspondente a $M = 100$.

69. (a) De que tamanho devemos tomar x para que $1/x^2 < 0{,}0001$?
(b) Tomando $r = 2$ no Teorema 5, temos a igualdade

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Demonstre isso diretamente usando a Definição 7.

70. (a) De que tamanho devemos tornar x para que $1/\sqrt{x} < 0.0001$?
(b) Tomando $r = \frac{1}{2}$ no Teorema 5, temos a igualdade

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Demonstre isso diretamente usando a Definição 7.

71. Use a Definição 8 para demonstrar que $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

72. Demonstre, usando a Definição 9, que $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$.

73. Use a Definição 9 para demonstrar que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

74. Formule precisamente a definição de

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

Então, use sua definição para demonstrar que

$$\lim_{x\to -\infty} (1 + x^3) = -\infty$$

75. Demonstre que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^+} f(1/t)$$

e

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^-} f(1/t)$$

se esses limites existirem.