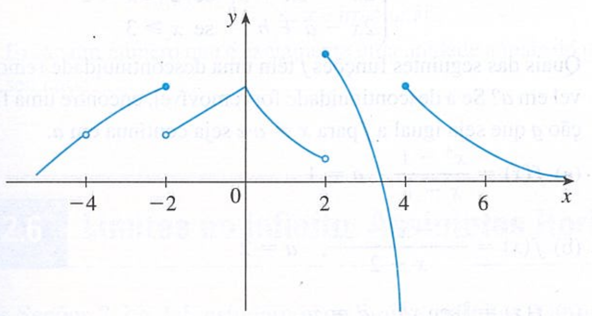
De fato, o Teorema do Valor Intermediário desempenha um papel na própria maneira de funcionar destas ferramentas gráficas. Um computador calcula um número finito de pontos sobre o gráfico e acende os pixels que contêm os pontos calculados. Ele pressupõe que a função é contínua e acende todos os valores intermediários entre dois pontos consecutivos. O computador, portanto, conecta os pixels acendendo os pixels intermediários.

2.5 Exercícios

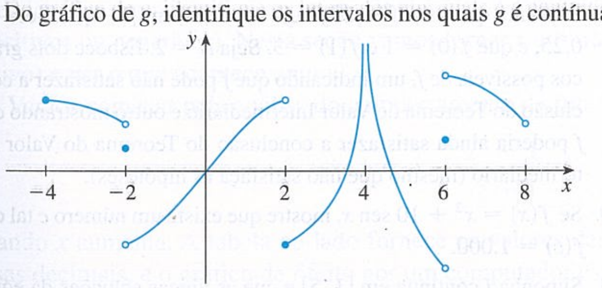
1. Escreva uma equação que expresse o fato de que uma função f é contínua no número 4.

2. Se f é contínua em $(-\infty, \infty)$, o que você pode dizer sobre seu gráfico?

3. (a) Do gráfico de f, identifique números nos quais f é descontínua e explique por quê.
(b) Para cada um dos números indicados na parte (a), determine se f é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum deles.



4. Do gráfico de g, identifique os intervalos nos quais g é contínua.



5–8 Esboce o gráfico de uma função que seja contínua exceto para a descontinuidade declarada.

5. Descontínua, porém contínua à direita, em 2

6. Descontinuidades em -1 e 4, porém contínua à esquerda em -1 e à direita em 4

7. Descontinuidade removível em 3, descontinuidade em salto em 5

8. Não é contínua à direita nem à esquerda em -2; contínua somente à esquerda em 2

9. A tarifa T cobrada para dirigir em um certo trecho de uma rodovia com pedágio é de \$ 5, exceto durante o horário de pico (entre 7 da manhã e 10 da manhã e entre 4 da tarde e 7 da noite), quando a tarifa é de \$ 7.
(a) Esboce um gráfico de T como função do tempo t, medido em horas após a meia-noite.
(b) Discuta as descontinuidades da função e seu significado para alguém que use a rodovia.

10. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
(a) A temperatura em um local específico como uma função do tempo.
(b) A temperatura em um tempo específico como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris.
(c) A altitude acima do nível do mar como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris.
(d) O custo de uma corrida de táxi como uma função da distância percorrida.
(e) A corrente no circuito para as luzes de uma sala como uma função do tempo.

11. Suponha que f e g sejam funções contínuas tal que $g(2) = 6$ e $\lim_{x \to 2} [3f(x) + f(x)g(x)] = 36$. Encontre $f(2)$.

12–14 Use a definição de continuidade e propriedades de limites para demonstrar que a função é contínua em um dado número a.

12. $f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x}, \quad a = 4.$

13. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1.$

14. $h(t) = \dfrac{2t - 3t^2}{1 + t^3}, \quad a = 1.$

15–16 Use a definição da continuidade e propriedades de limites para mostrar que a função é contínua no intervalo dado.

15. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 2}, \quad (2, \infty).$

16. $g(x) = 2\sqrt{3 - x}, \quad (-\infty, 3].$

17–22 Explique por que a função é descontínua no número dado a. Esboce o gráfico da função.

17. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2} \qquad a = -2$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2} & \text{se } x \neq -2 \\ 1 & \text{se } x = -2 \end{cases} \qquad a = -2$

19. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad a = 0$

20. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

21. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador   1. As Homeworks Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

22. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases}$ $\quad a = 3$

23–24 Como você "removeria a descontinuidade" de f? Em outras palavras, como você definiria $f(2)$ no intuito de fazer f contínua em 2?

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ **24.** $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

25–32 Explique, usando os Teoremas 4, 5, 7 e 9, por que a função é contínua em todo o número em seu domínio. Diga qual é o domínio.

25. $F(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 6}$ **26.** $G(x) = \sqrt[3]{x}\,(1 + x^3)$

27. $R(x) = x^2 + \sqrt{2x - 1}$ **28.** $h(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{x + 1}$

29. $A(t) = \text{arcsen}(1 + 2t)$ **30.** $B(x) = \dfrac{\text{tg}\, x}{\sqrt{4 - x^2}}$

31. $M(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$ **32.** $N(r) = \text{tg}^{-1}(1 + e^{-r^2})$

33–34 Localize as descontinuidades da função e ilustre com um gráfico.

33. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ **34.** $y = \ln(\text{tg}^2 x)$

35–38 Use a continuidade para calcular o limite.

35. $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$ **36.** $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \text{sen}(x + \text{sen}\, x)$

37. $\displaystyle\lim_{x \to 1} e^{x^2 - x}$ **38.** $\displaystyle\lim_{x \to 2} \text{arctg}\left(\frac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}\right)$

39–40 Mostre que f é contínua em $(-\infty, \infty)$.

39. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} \text{sen}\, x & \text{se } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{se } x \geqslant \pi/4 \end{cases}$

41–43 Encontre os pontos nos quais f é descontínua. Em quais desses pontos f é contínua à direita, à esquerda ou em nenhum deles? Esboce o gráfico de f.

41. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2 - x & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 1/x & \text{se } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

44. A força gravitacional exercida pela Terra sobre uma unidade de massa a uma distância r do centro do planeta é

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{se } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{se } r \geqslant R \end{cases}$$

onde M é a massa da Terra; R é seu raio; e G é a constante gravitacional. F é uma função contínua de r?

45. Para quais valores da constante c a função f é contínua em $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{se } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

46. Encontre os valores de a e b que tornam f contínua em toda parte.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{se } 2 \leqslant x < 3 \\ 2x - a + b & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

47. Quais das seguintes funções f têm uma descontinuidade removível em a? Se a descontinuidade for removível, encontre uma função g que seja igual a f para $x \neq a$ e seja contínua em a.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$, $\quad a = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}$, $\quad a = 2$

(c) $f(x) = [\![\text{sen}\, x]\!]$, $\quad a = \pi$

48. Suponha que uma função f seja contínua em $[0, 1]$, exceto em 0,25, e que $f(0) = 1$ e $f(1) = 3$. Seja $N = 2$. Esboce dois gráficos possíveis de f, um indicando que f pode não satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário e outro mostrando que f poderia ainda satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário (mesmo que não satisfaça as hipóteses).

49. Se $f(x) = x^2 + 10\,\text{sen}\, x$, mostre que existe um número c tal que $f(c) = 1.000$.

50. Suponha f contínua em $[1, 5]$ e que as únicas soluções da equação $f(x) = 6$ sejam $x = 1$ e $x = 4$. Se $f(2) = 8$, explique por que $f(3) > 6$.

51–54 Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

51. $x^4 + x - 3 = 0$, $\quad (1, 2)$ **52.** $\sqrt[3]{x} = 1 - x$, $\quad (0, 1)$

53. $e^x = 3 - 2x$, $\quad (0, 1)$ **54.** $\text{sen}\, x = x^2 - x$, $\quad (1, 2)$

55–56 (a) Demonstre que a equação tem pelo menos uma raiz real.
(b) Use sua calculadora para encontrar um intervalo de comprimento 0,01 que contenha uma raiz.

55. $\cos x = x^3$ **56.** $\ln x = 3 - 2x$

57–58 (a) Demonstre que a equação tem pelo menos uma raiz real.
(b) Use sua ferramenta gráfica para encontrar a raiz correta até a terceira casa decimal.

57. $100e^{-x/100} = 0{,}01x^2$ **58.** $\text{arctg}\, x = 1 - x$

59. Demonstre que f é contínua em a se, e somente se,

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a).$$

60. Para demonstrar que seno é contínuo, precisamos mostrar que $\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ para todo número real a. Pelo Exercício 59, uma afirmação equivalente é que

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen} a.$$

Use $\boxed{6}$ para mostrar que isso é verdadeiro.

61. Demonstre que o cosseno é uma função contínua.

62. (a) Demonstre a parte 3 do Teorema 4.
(b) Demonstre a parte 5 do Teorema 4.

63. Para que valores de x a função f é contínua?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

64. Para que valores de x a função g é contínua?

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ x & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

65. Existe um número que é exatamente uma unidade a mais do que seu cubo?

66. Se a e b são números positivos, prove que a equação

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

possui no mínimo uma solução no intervalo $(-1, 1)$.

67. Demonstre que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $(-\infty, \infty)$.

68. (a) Mostre que a função valor absoluto $F(x) = |x|$ é contínua em toda parte.
(b) Demonstre que se f for uma função contínua em um intervalo, então também o é $|f|$.
(c) A recíproca da afirmação da parte (b) também é verdadeira? Em outras palavras, se $|f|$ for contínua, segue que f também o é? Se for assim, demonstre isso. Caso contrário, encontre um contraexemplo.

69. Um monge tibetano deixa o monastério às 7 horas da manhã e segue sua caminhada usual para o topo da montanha, chegando lá às 7 horas da noite. Na manhã seguinte, ele parte do topo às 7 horas da manhã, pega o mesmo caminho de volta e chega ao monastério às 7 horas noite. Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe um ponto no caminho que o monge vai cruzar exatamente na mesma hora do dia em ambas as caminhadas.

2.6 Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais

Nas Seções 2.2 e 2.4, estudamos os limites infinitos e as assíntotas verticais. Lá tomávamos x tendendo a um número e, como resultado, os valores de y ficavam arbitrariamente grandes (positivos ou negativos). Nesta seção vamos tornar x arbitrariamente grande (positivo ou negativo) e ver o que acontece com y.

Vamos começar pela análise do comportamento da função f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

quando x aumenta. A tabela ao lado fornece os valores dessa função, com precisão de seis casas decimais, e o gráfico de f feito por um computador está na Figura 1.

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0,600000
± 3	0,800000
± 4	0,882353
± 5	0,923077
± 10	0,980198
± 50	0,999200
± 100	0,999800
± 1000	0,999998

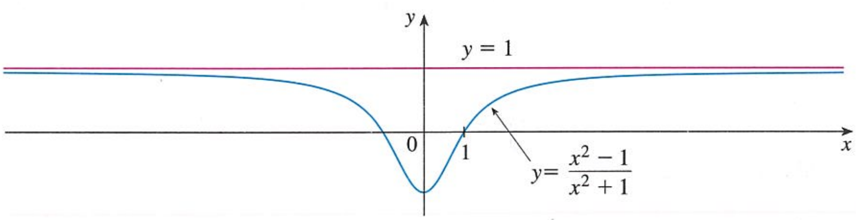


FIGURA 1

Quanto maior o x, mais próximos de 1 ficam os valores de $f(x)$. De fato, temos a impressão de que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 1 quanto quisermos se tornarmos um x suficientemente grande. Essa situação é expressa simbolicamente escrevendo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Em geral, usamos a notação

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$