Processos de ensino e de aprendizagem de matemática na escola básica: perspectivas teóricas da didática da matemática

Saddo Ag Almouloud –PUC/SP

saddoag@gmail.com e saddoag@pucsp.br

Transposição didática

Diversos quadros teóricos

T. Registros de Representação semiótica

Mudança de quadros

T. das concepções

T. das situações

dialética ferramenta-objeto

T. dos Campos Conceituais

T. Antropológica - Praxeologia

Referenciais teóricos

DUPLA ABORDAGEM

GÊNESE INSTRUMENTAL\ORQUESTRAÇÃO

GÊNESE DOCUMENTAL

TRANSPOSIÇÃO INFORMÁTICA

Perspectivas metodológicas

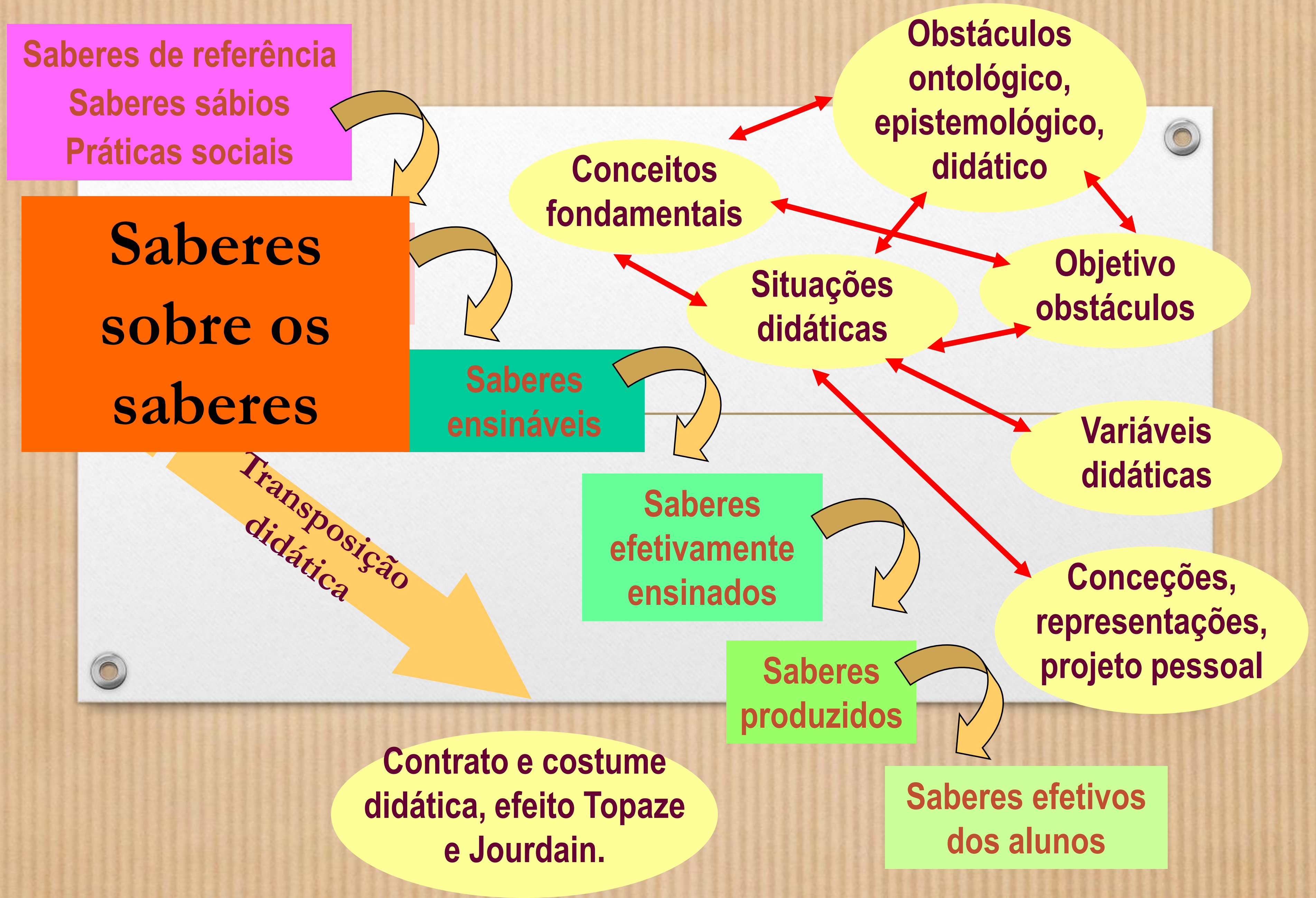
Engenharia didática de segunda geração

Engenharia didática do PER (PEP)

Engenharia de formação de professores

Engenharia didática de primeira geração

Não basta dominar muito bem sua disciplina para ensiná-la



TEORIA ANTROPOLOGICA DO DIDÁTICO

Chevallard (1999)

Preâmbulo: objetos primitivos

Os saberes são produto de construções humanas, seu lugar e sua função diferem segundo os lugares, as sociedades e no tempo.

Elementos primitivos

I : instituição

X : pessoa

R(I,O) : relação institucional à O

R(X,O) : relação pessoal de X à O

O existe para I = I conhece O
(conhecimento de O para I)

O existe para X = X conhece O
(conhecimento de O para X)

O : objeto

Saber e Conhecimento

Saber: dimensão social – categoria especifica de objetos, socialmente compartilhadas:

- Pode ser aprendido e ensinado
- Não pode ser conhecimento sem ser aprendido
- Pode ser utilizado
- Para existir, deve ser produzido

Conhecimento:

- dimensão individual, não compartilhada socialmente
- Pode ser uma relação com o saber

Saber e Instituições

1. Todo saber é saber de uma instituição
2. Um mesmo saber pode viver em instituições diferentes
3. Para que um saber viva em uma instituição, é preciso que ele se submeta a certas condições e restrições
4. Problemática ecológica: é um meio para questionar o real
   - **O que existe e por quê?**
   - **O que não existe e por quê?**
   - **O que poderia existir? Sob quais condições?**
   - Inversamente, sendo dado um conjunto de condições, que objetos são levados a viver, ou ao contrário, são impedidos de viver nessas condições?

Isso implica que ele se modifica para se manter em uma instituição diferente daquela na qual ele aparece: $R(I, O) \neq R(I', O)$

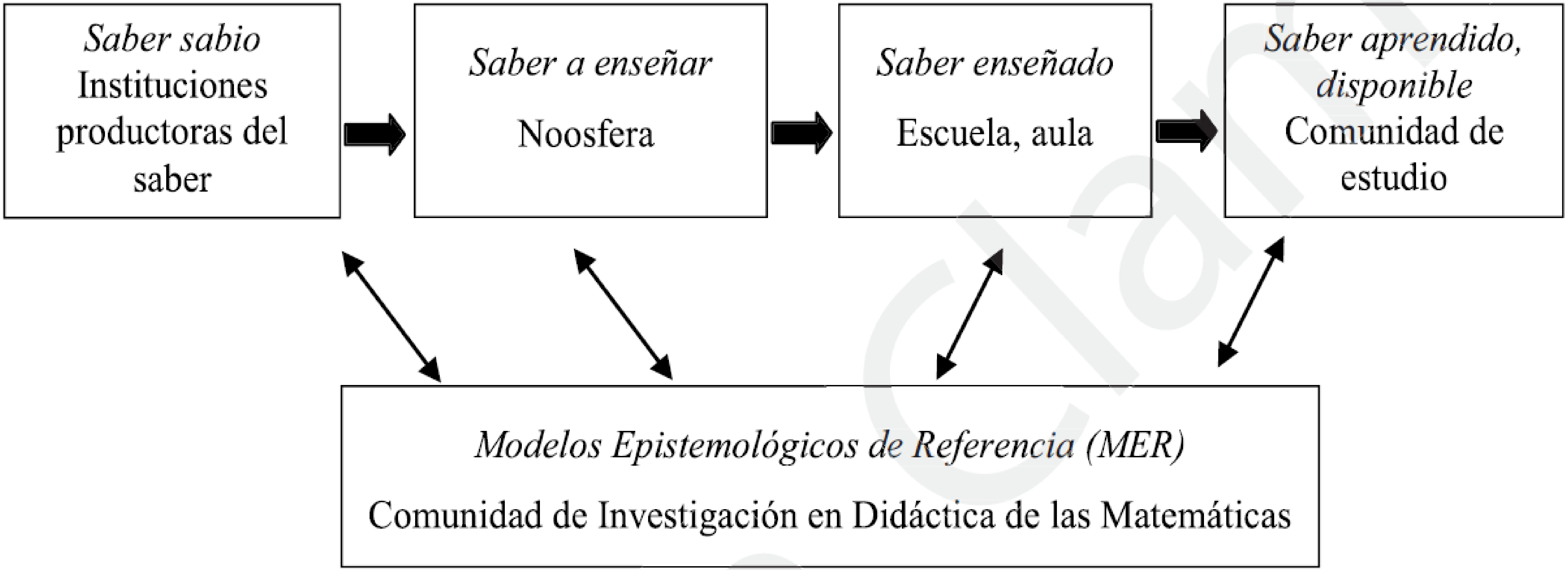


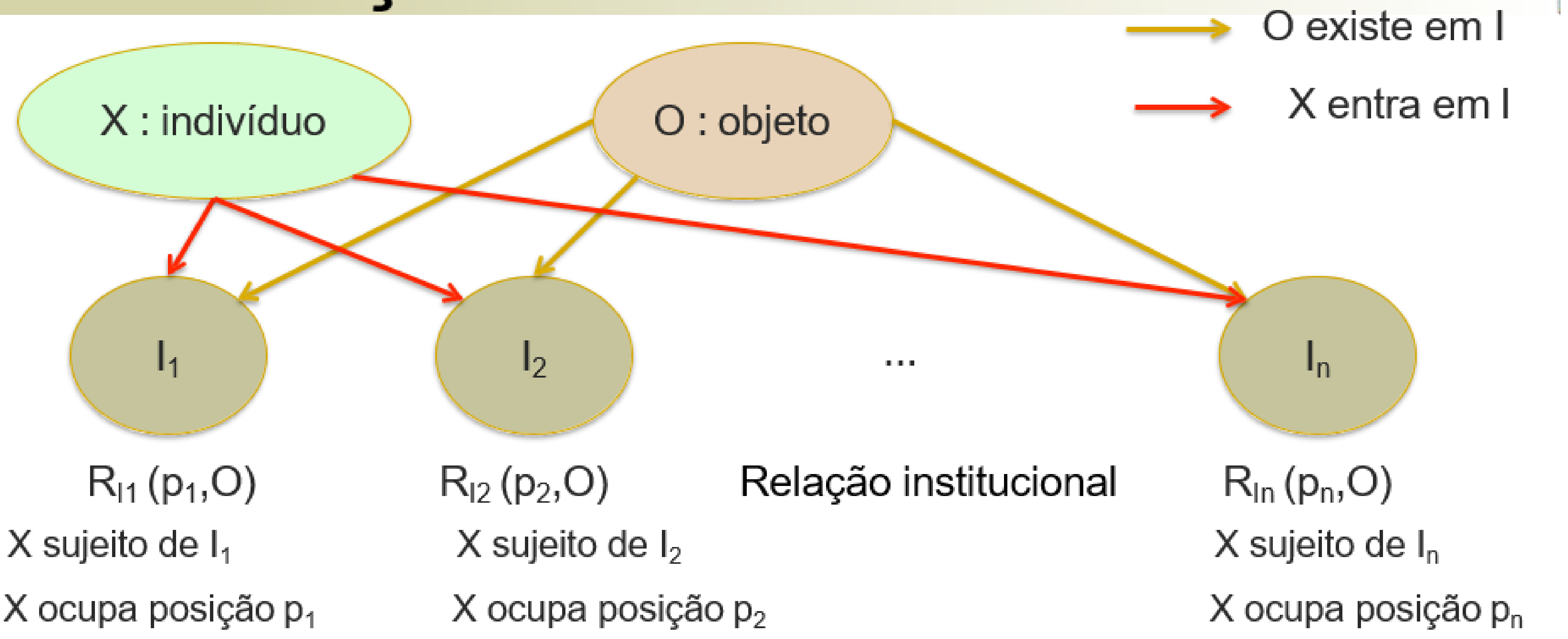
Figura 1. Etapas de la transposición didáctica.

Transposição didática

Questões que resultam desse processo

- Legitimação dos saberes ensinados
  - Quais são os saberes de referência que legitimam os saberes ensinados?
    - O que faz com que um saber exista nessa instituição?
- Distância entre saber ensinado e referências que o legitimam
  - Natureza da distância entre o saber ensinado e o saber de referência?
  - Restrições e condição explicativas dessa distância?

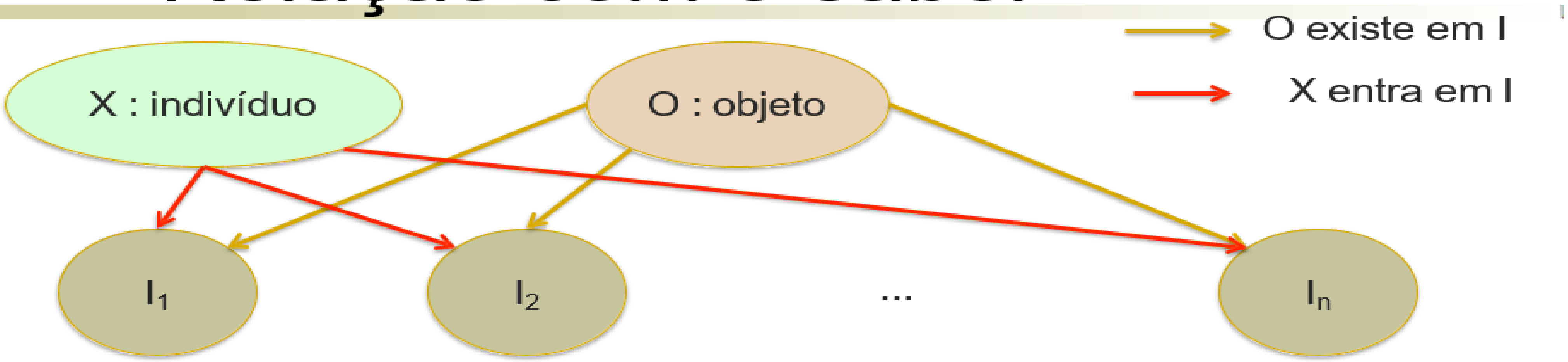
Relação com o saber



Relação pessoal de um indivíduo X a um objeto O : R(X, O)

É o sistema de todas as interações, sem exceção, que *X* pode ter com o objeto *O* que *X*

Relação com o saber



R_{I1} (p_1,O) R_{I2} (p_2,O) Relação institucional R_{In} (p_n,O)

X sujeito de I_1 X sujeito de I_2 X sujeito de I_n

X ocupa posição p_1 X ocupa posição p_2 X ocupa posição p_n

Relação pessoal de um indivíduo X a un objeto O : R(X, O)

Em cada instituição I onde X encontra O em posição p :

-R(X, O) se forma ou modifica sob a restrição da relação institucional R_I (p,O)

-R(X,O) tendera a parecer com R_I (p,O) –> X bom sujeito de I

R(X, O) emerge de uma pluralidade de relações institucionais R_{I1} (p_1,O), R_{I2} (p_2,O) ...

Questão metodológica

Como descrever a relação institucional?

O estudo da relação institucional pode ser realizado pela análise praxeológica. (Bosch e Chevallard, 1999)

Abordagem praxeológica

- Tipo de tarefas T é definido por um verbo (ação) e complementos:
  - T : Desenvolver uma expressão algébrica
  - Uma tarefa é um elemento de T. Por exemplo: desenvolver 3(x+1)
- Uma técnica relativa à T define uma maneira de cumprir, realizar as tarefas t.
  - τ : multiplicar um fator por cada termo da soma...
- Uma tecnologia permite justificar, compreender, adaptar, explicar (até produzir) uma técnica.
  - θ : a regra da distributividade da multiplicação em relação à adição
- Toda tecnologia tem necessidade, por sua vez, de uma justificação, o que é chamado de Teoria Θ : álgebra elementar

T1

- Fatorar (x+xy)

T2

- Seja ABC um triângulo retângulo em A tal que AB=2, AC=5. Calcular BC

T3

- Resolver x+1=0

T5

- Resover (x +1)(x-2)=0

- Resolver (x +1)(x-2)+(x+1)(x+2)=0

- Fatorar (x^2+2x+1)

T4

- Seja ABC um triângulo tal que AB=3, AC=4 e BC=5. Mostrar que ABC é retângulo em A

- Seja ABC um triângulo retângulo em A tal que AB=3, BC=9. Calcular AC

T3

- Resolver $(x+1)(x-2)+x+1=0$
- Resolver $(x+1)(x-2)+(x+1)(x+2)=0$

τ_{31} : fatoramos e aplicamos a regra do produto nulo

τ_{32} : desenvolvemos e aplicamos a fórmula

$[T_3, \tau_{31}, \theta_1, \Theta]$

$[T_3, \tau_{32}, \theta_2, \Theta]$

Um tipo de tarefa pode ser resolvido por diversas técnicas

$T2 \rightarrow \tau_2$

- Seja ABC um triângulo retângulo em tal que AB=2, AC=5. Calcular BC

- Seja ABC um triângulo retângulo em A tal que
AB=3, BC=9. Calcular AC

$T5 \rightarrow \tau_5$

- Seja ABC um triângulo tal que AB=3, AC=4 e BC=5. Mostrar que ABC é retângulo em A

Mesma Tecnologia θ

Teorema de Pitágoras

$[T_2,\tau_2,\theta,\Theta]$

$[T_2,\tau_5,\theta,\Theta]$

Uma tecnologia pode justificar várias técnicas

A formação pela pesquisa

Professor questionando para verificar empiricamente uma hipótese, uma proposta concreta pessoal ou um **modelo estratégico inspirado por leituras** e uma transposição pessoal,

↓

Este professor participa de uma atitude, de um questionamento **das lógicas pedagógicas e didáticas**,

↓

Esta atitude pode ser formadora para ele, se o projeto parte de um problema que é realmente dele.

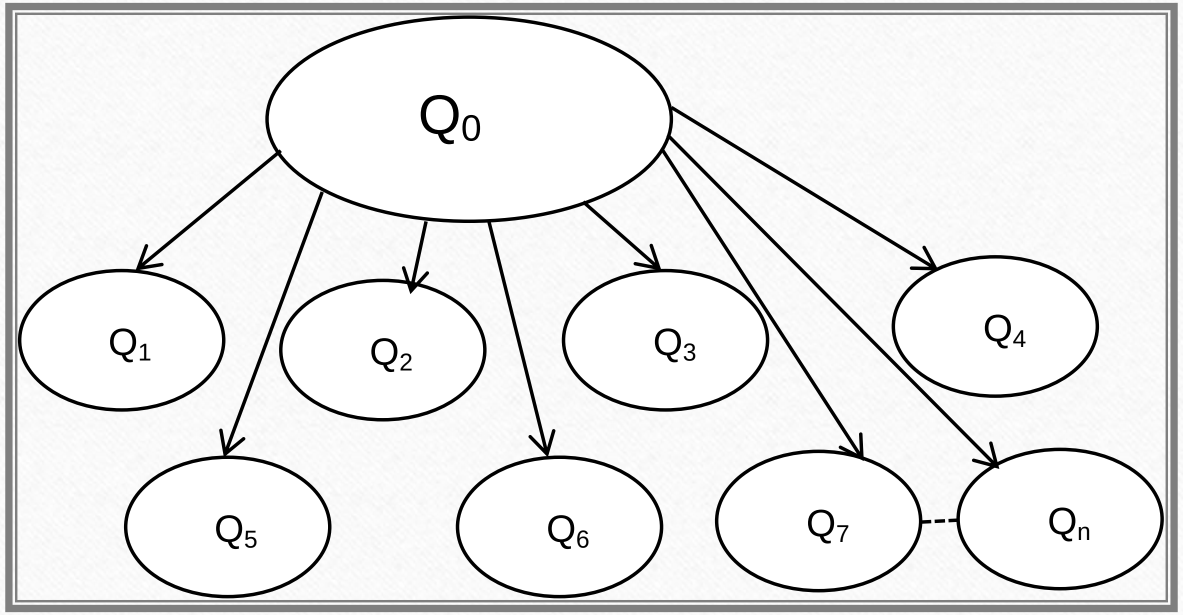
Formação pela pesquisa: O Percurso de Estudo e Pesquisa (PER)

O Percurso de Estudo e Pesquisa, com sigla no original PER (CHEVALLARD, 2004, 2006, 2009a, 2009b, 2009c) é definido:

- **pela formulação de uma questão geratriz Q_0** com capacidade de gerar outras questões problemáticas Q_1, Q_2, Q_3 etc.,
- sob **as condições e restrições pedagógicas e específicas do saber em jogo**,
- que resultam em um conjunto de respostas que virão a se constituir em **uma sucessão de Organizações Matemáticas (OM) articuladas entre si**.

Esquema de um PER

- Q_0 com capacidade de gerar outras questões problemáticas Q_1, Q_2, Q_3 etc., sob as condições e restrições pedagógicas e específicas do saber em jogo,



PER e Formação do professor

Q_0 refere-se à capacidade de propiciar o desencadeamento de outras questões com respostas (R) acessíveis à comunidade de estudos **por meio de atividades matemáticas** desenvolvidas pelo grupo de professores em formação.

Essas atividades **são construídas por meio de estudos e pesquisas na infraestrutura didático/matemática disponível** que revela as possíveis respostas à questão.

PER e Formação de professor

O estudo de Q_0 e de suas questões derivadas **conduz à construção de um número expressivo de saberes que delimitarão o mapa dos percursos e seus limites.**

O PER pode ser um Percurso de Formação de Professores, pois

- **vem constituir processos de estudos para** o enfrentamento do problema praxeológico da instituição docente,
- **questões que emanam das e nas práticas docentes.**

PER e Formação de professor

Os Equipamentos Praxeológicos (**EP)** disponíveis

passam a ser objetos questionáveis, a partir das necessidades praxeológicas que se criam no exercício da profissão,

constituindo-se no estudo de questões, problemas ou necessidades, **que estão na origem do processo de formação**, que por sua vez levarão a reformulações desses **EP** disponíveis

Exemplo de PER: construir um calculador

- A pergunta Q a estudar é "Como construir um "calculador"?
- Q deve provocar o encontro com praxeologias geométricas a estudar no Ensino Fundamental II.
- Exemplo: Como construir a raiz quadrada de um numero inteiro?
- Resposta: Obter-se-ia uma resposta por meio do teorema de Pitágoras: $5 = 1 + 4 = 1^2 + 2^2$, obtém-se $\sqrt{5}$, medindo a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos que medem 2 e 2 u.m.
- Como $5 = 9 - 4 = 3^2 - 2^2$, obtém-se de novo $\sqrt{5}$ como a medida do segundo cateto de um triangulo retângulo cujo primeiro cateto mede 2 e a hipotenusa mede 3.

Exemplo de PER: construir um calculador

Para quais inteiros essas técnicas "funcionam"?

Quais são os inteiros que se escrevem como uma soma ou como uma diferença de dois quadrados?

A resposta da segunda questão: são os inteiros ímpares, pois, $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$, bem como os múltiplos de 4, pois $4k = (k + 1)^2 - (k - 1)^2$).

Exemplo de PER: construir um calculador

Para primeira questão os sujeitos em formação **deverão eventualmente procurar a solução em documentos mais avançados para descobrir e compreender (parcialmente)**

a afirmação segundo a qual um inteiro é soma de dois quadrados se e apenas se "cada um dos seus fatores primos da forma 4k + 3 intervém à uma potência par" (Wikipédia, artigo "Teorema dos dois quadrados de Fermat").

Exemplo de PER

Naturalmente, como num trabalho científico colaborativo, os participantes em dificuldades poderão investigar outras pistas com a mediação do formador.

Mas também, o formador poderá perguntar sobre **como estender as técnicas encontradas** ao caso dos números decimais não inteiros por exemplo.

Uma pergunta geradora de um PER pode assim ser retomada para prolongar o inquérito.

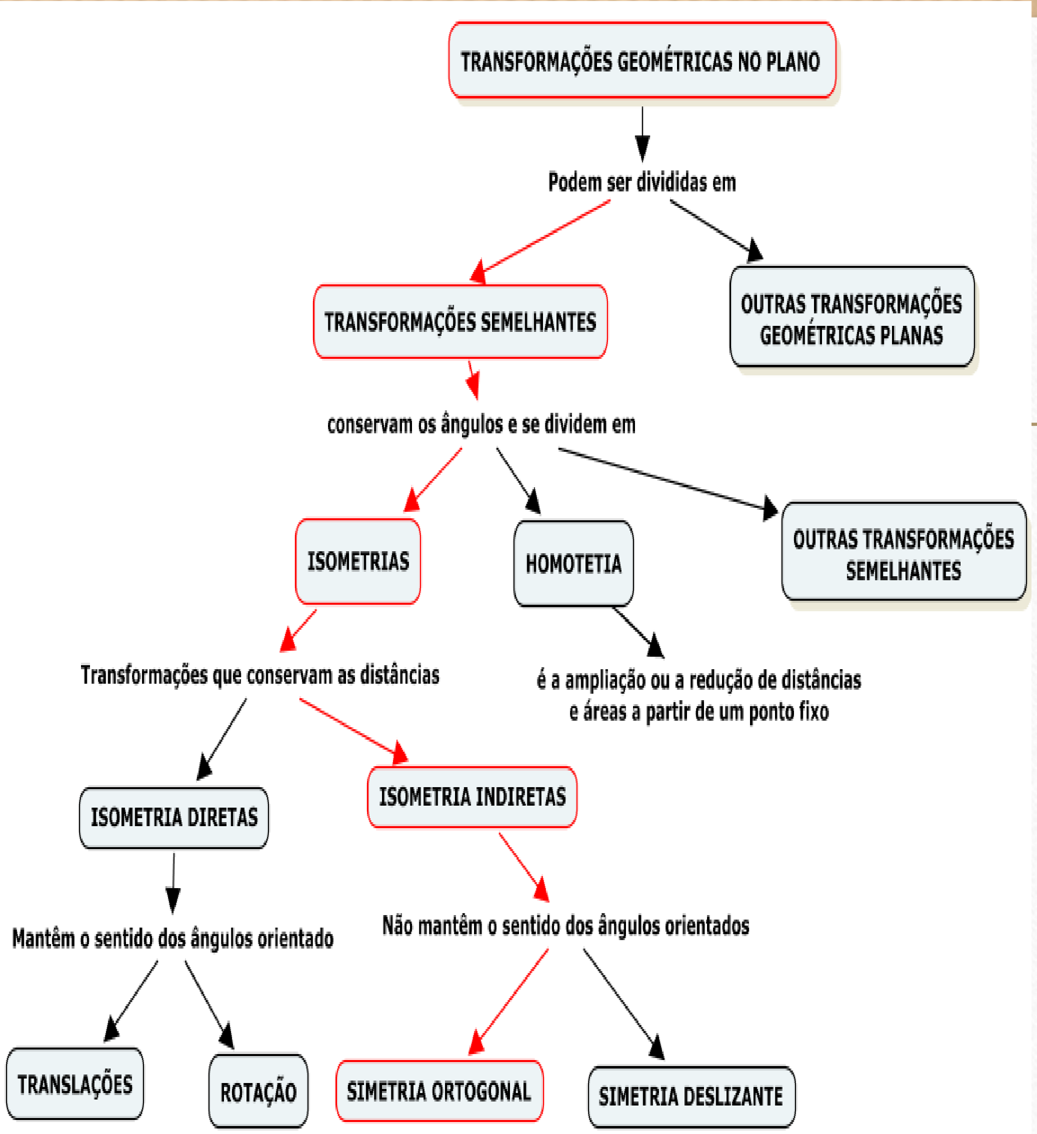
Exemplo: A prática docente e sua influência na construção de conceitos geométricos: um estudo sobre o ensino e a aprendizagem da Simetria Ortogonal

Tese de doutorado de Cleusiane Vieira Silva (2015)

⇨

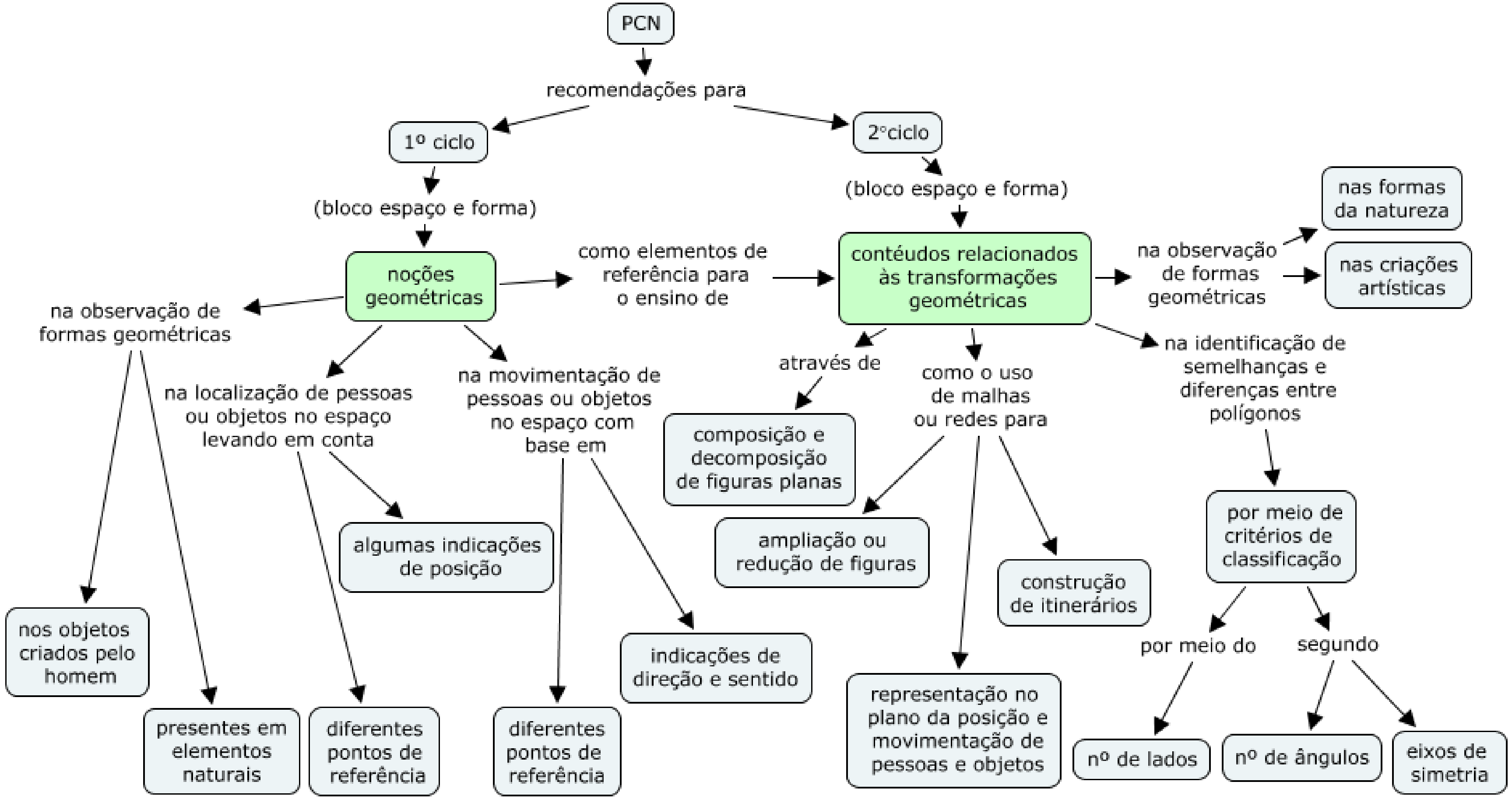
Objetivo: investigar como um ambiente de ação e reflexão, que envolve a pré-análise, reflexões sobre a pré-análise, experimentação com alunos do Ensino Fundamental II, pós-análise e reflexões sobre a pós-análise relacionadas a uma sequência didática sobre a simetria ortogonal, interfere nos saberes docentes de professores de Matemática desse mesmo nível de ensino

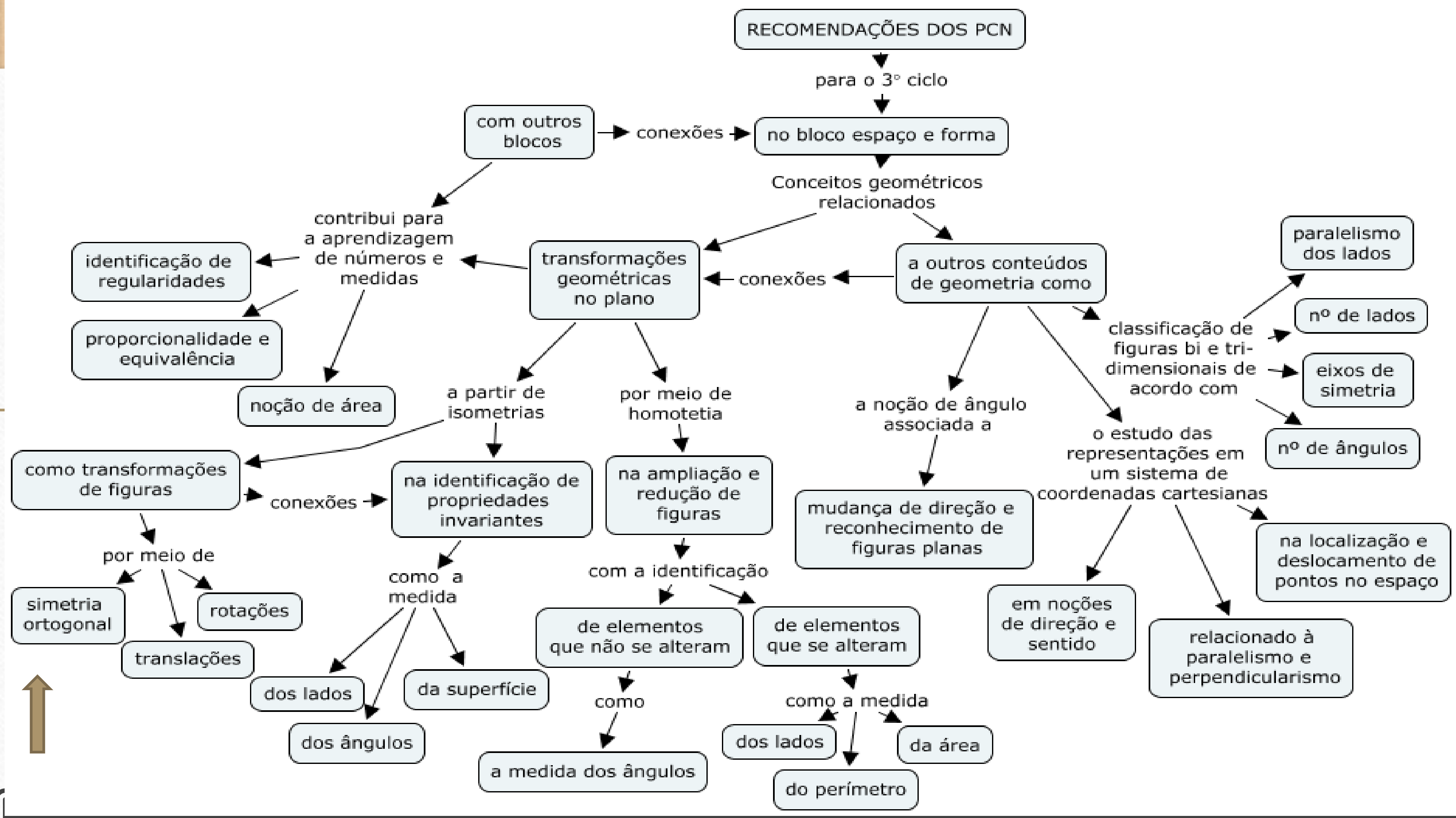
Simetria ortogonal nas transformações geométricas planas



Cleusiane Vieira Silva (2015, p.52

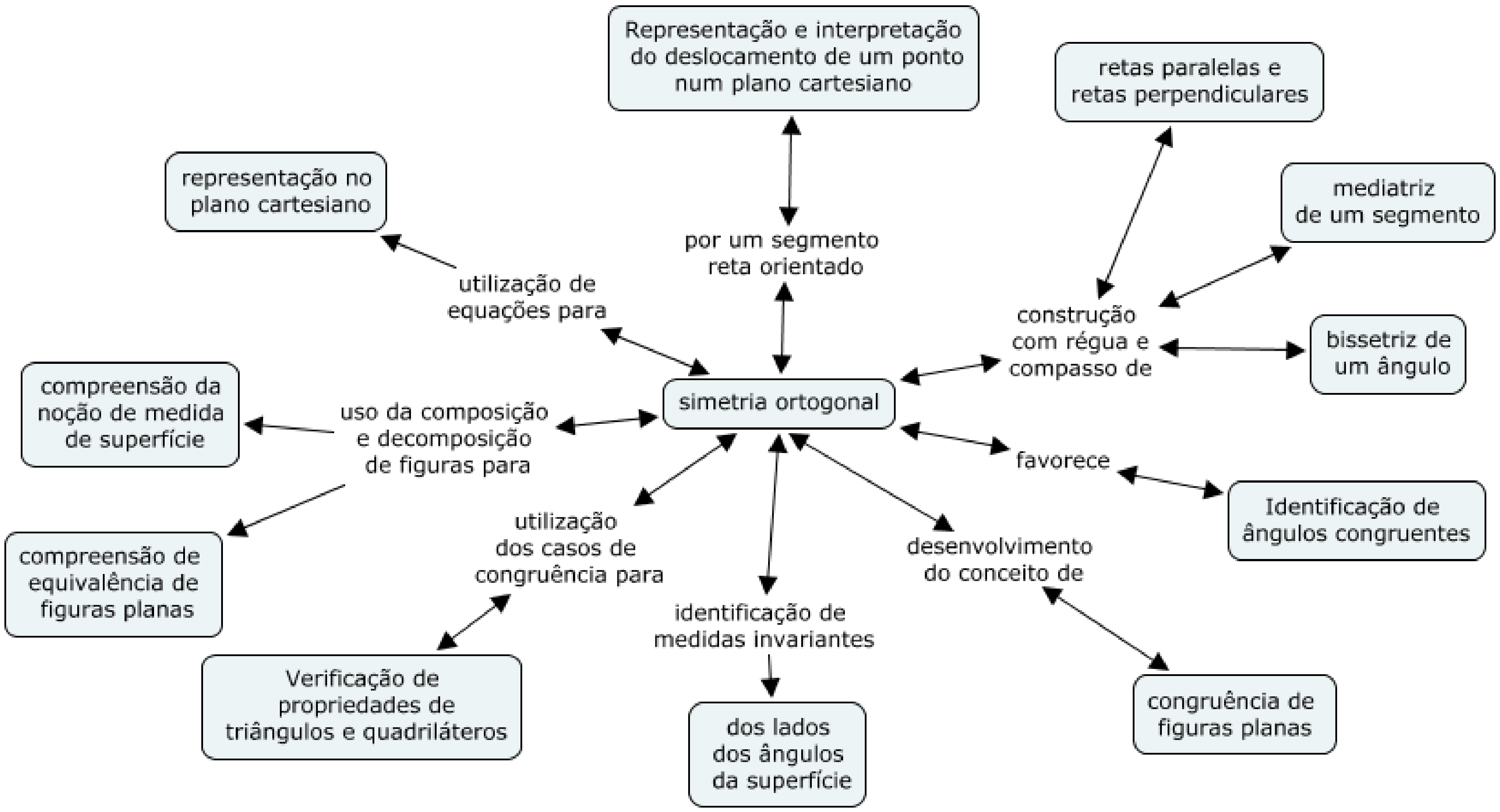
Integração entre os objetos envolvidos no desenvolvimento do pensamento geométrico para o 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental



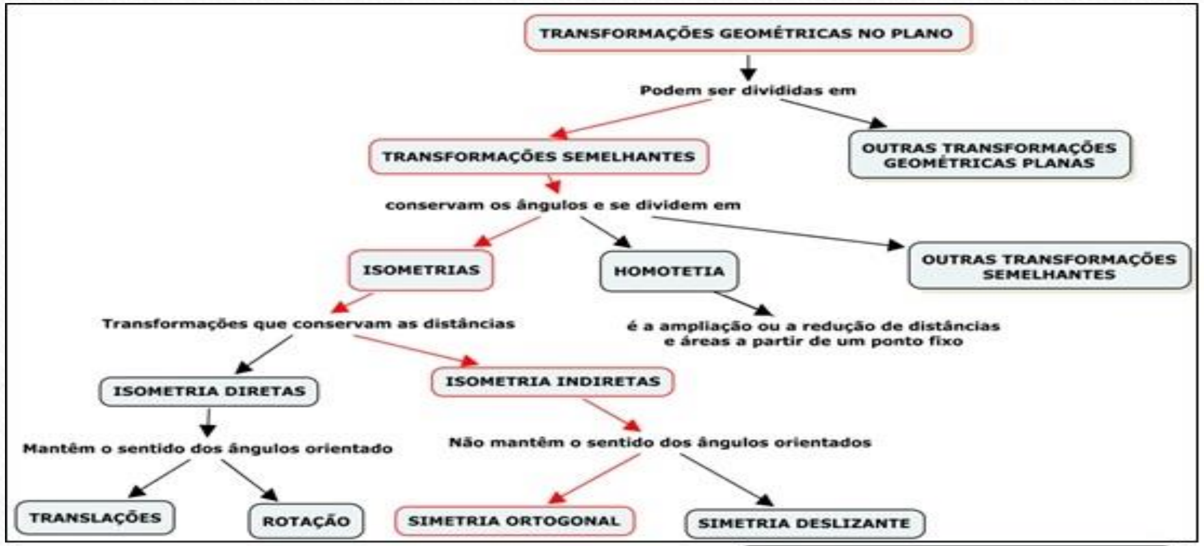


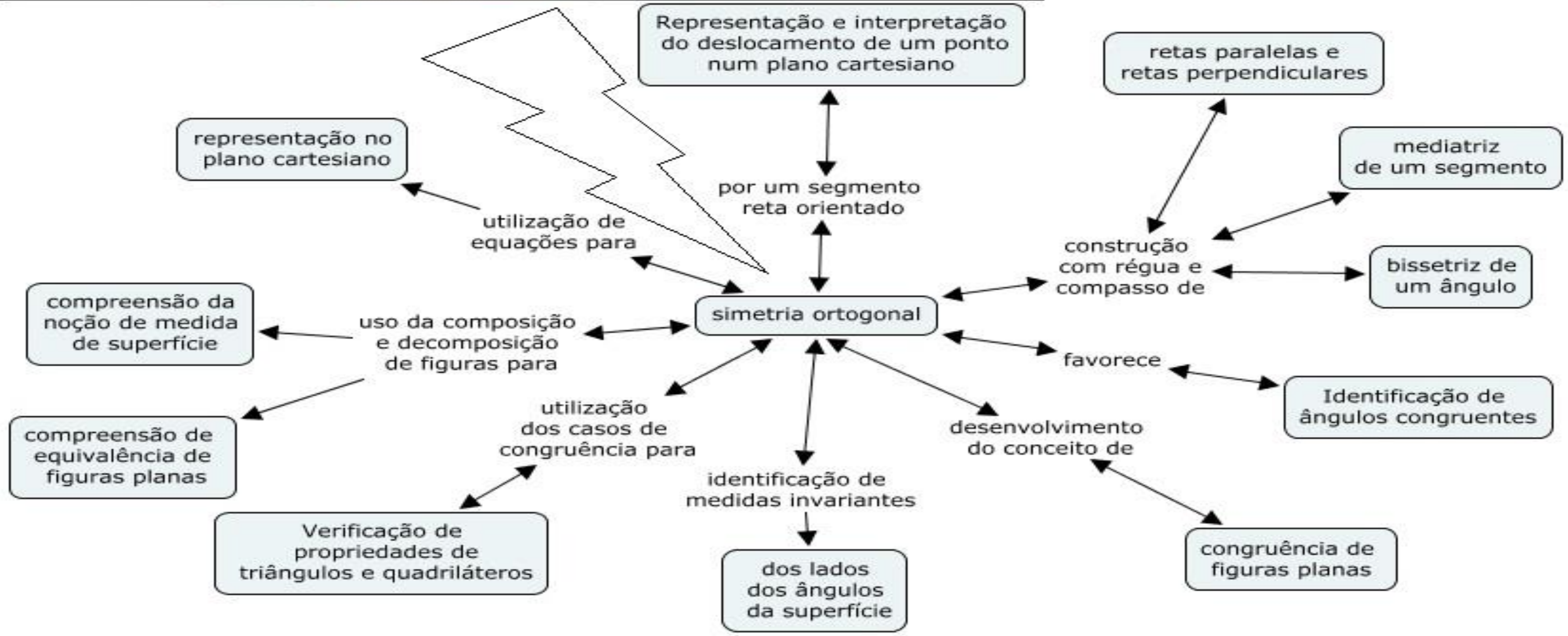
A relação entre os conteúdos que envolvem a simetria ortogonal no 3º ciclo do Ensino Fundamental

Rede de objetos matemáticos em torno da simetria ortogonal



MER


TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO
Podem ser divididas em
TRANSFORMAÇÕES SEMELHANTES
OUTRAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS PLANAS
conservam os ângulos e se dividem em
ISOMETRIAS
HOMOTETIA
OUTRAS TRANSFORMAÇÕES SEMELHANTES
Transformações que conservam as distâncias
é a ampliação ou a redução de distâncias e áreas a partir de um ponto fixo
ISOMETRIA DIRETAS
ISOMETRIA INDIRETAS
Mantêm o sentido dos ângulos orientado
Não mantêm o sentido dos ângulos orientados
TRANSLAÇÕES
ROTAÇÃO
SIMETRIA ORTOGONAL
SIMETRIA DESLIZANTE


Representação e interpretação do deslocamento de um ponto num plano cartesiano
retas paralelas e retas perpendiculares
representação no plano cartesiano
mediatriz de um segmento
por um segmento reta orientado
utilização de equações para
construção com régua e compasso de
bissetriz de um ângulo
compreensão da noção de medida de superfície
uso da composição e decomposição de figuras para
simetria ortogonal
favorece
Identificação de ângulos congruentes
utilização dos casos de congruência para
desenvolvimento do conceito de
compreensão de equivalência de figuras planas
identificação de medidas invariantes
Verificação de propriedades de triângulos e quadriláteros
dos lados dos ângulos da superfície
congruência de figuras planas

Modelo dominante

Presença da simetria ortogonal nas recomendações curriculares para a Educação Básica, tanto em contexto nacional, quanto estadual.

No contexto nacional: **estabelecer conexões entre seu conteúdo e outras áreas do conhecimento, tanto internas quanto externas à Matemática**.

No contexto estadual: **sugestões de ensinar a simetria em figuras planas, sem a preocupação com as propriedades específicas do objeto**.

Razão de ser: **o estudo da simetria no objeto**: determinação do eixo simetria de uma figura **do que o estudo do objeto "simetria ortogonal" (definição e suas propriedades)**.

Razão de ser: No livro didático utilizado pela escola no período de 2011 a 2013: **aplicação nas artes e sua utilização cotidiana na produção de mosaicos para revestimentos de superfície**.

Modelo dominante

Razão de ser: Nas 10 coleções de livros didáticos aprovadas no PNLD 2014-2016, observamos, por meio do conteúdo programático disponibilizado no guia do PNLD, **que as transformações geométricas são apresentadas relacionadas a outros conteúdos de geometria**

Na análise institucional: Não há **apresentação da simetria ortogonal como objeto matemático**, isto é, **de forma que outros objetos sirvam de "alimento" para a simetria ortogonal, ela não apenas "sobreviva" no sistema de ensino, mas possa "viver" de forma estável, para alimentar também outros conceitos para que eles também possam sobreviver**

Modelo de referência alternativo

1. **Ponto médio de segmento – perpendicularismo de retas - Mediatriz de segmentos – Propriedade da mediatriz de segmento**
2. **Descobrindo a simetria ortogonal (ou axial) – dobradura – espelhamento (Definição formal)**
3. **Identificando o simétrico de um segmento em relação a uma reta - Propriedades do eixo de simetria**
4. **Construção de simétricos de um ponto, segmento em função das posições relativas dos elementos que compõem a figura objeto e o eixo de simetria**
5. **Construindo eixos de simetria de figuras**
6. **Construindo os simétricos de figuras mais complexas**
7. aplicação nas artes e sua utilização cotidiana na produção de mosaicos para revestimentos de superfícies etc.
8. **Problemas de reconhecimento de figuras que têm eixo de simetria e construção de eixos de simetria**
9. Problemas envolvendo provas e demonstrações – articulação com outros conteúdos de geometria plana

QUESTÃO GERADORA DO PER

Q: Quais elementos dos equipamentos praxeológicos de professores de matemática do Ensino Fundamental II, são mobilizados (ou reconstruídos) na construção, análise e implementação de uma organização didática (apoiada no MDA) sobre a simetria ortogonal?

Q1: Quais praxeologias didáticas poderiam ser consideradas úteis para a realização do projeto em questão?

Q2: O que explica as dificuldades encontradas na apropriação e utilização dessas praxeologias didáticas dos professores?

Referências bibliográficas

ALMOULOUD, Ag S. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba-PR: Editora UFPR, 2010.

ARTAUD, Michèle. ***Introduction à l'approche écologique du didactique*** – *L'écologie des organisations mathématiques et didactiques.* Actes de la *IXième* École d'été de Didactique des Mathématiques. Caen: ARDM&IUFM, 1998. pp. 101-139.

BARQUERO, B., BOSCH, M. e GASCÓN, J. ***Ecología de la modelización matemática:*** *Restricciones transpositivas en las instituciones universitárias.* communication au 2e congrès TAD, Uzès 2007.

BARQUERO, B., BOSCH, M. e GASCÓN, J. ***Ecología de la Modelización Matemática:*** *los Recorridos de Estudio e Investigación* - III International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic, 2010.

BARQUERO, B., BOSCH, M. e GASCÓN, J. ***Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática.*** Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.15, n.1, pp.1-28, 2013

BOSCH, Marianna; GASCON, Josep. *Las prácticas docentes del profesor de matemáticas. XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques.* Agosto de 2001

BOSCH, Marianna. CHEVALLARD, Yves e GASCÓN, Josep. ***Science or magic?*** *The use of models and theories in didactics of mathematics. Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* 2006.

BOSCH, Marianna. *Un Punto de Vista Antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática.* Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. pp. 15-28. Espanha, 2001.

Referências bibliográficas

CHEVALLARD, Y. ***Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques:*** *L´approche antropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 19, nº 2, pp. 221-266. Grenoble, France: La Pensée Sauvage, 1999.

CHEVALLARD, Y. ***Le développement actuel de la TAD:*** *pistes et jalons.* IIe congrès international sur la TAD qui se tiendra à Uzès du 31 octobre au 3 novembre 2007.

CHEVALLARD, Y. ***La TAD face au professeur de mathématiques.*** UMR ADEF. Toulouse - França, 2009.

CHEVALLARD, Y. ***La Transposición didáctica:*** *Del saber sábio al saber enseñado.* Terceira Edição. Buenos Aires: Editora Aique Educación, 2013.

FONSECA BON, Cecílio. ***Discontinuidades Matemáticas Y Didácticas entre la Enseñanza Secundaria Y la Enseñanza Universitária***. Tesis Doctoral Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Vigo, Espanha, 2004.

GASCÓN, Josep. ***Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes***. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 4(2), 129-159, 2001.

GASCÓN, Josep. ***Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico:*** *El caso del álgebra elemental. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, pp. 203-231, 2011

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica

LUCAS, C. O., FONSECA BON, C. GASCÓN, J. CASAS, J. M. **Aspetos da rigidez e atomização da matemática escolar nos sistemas de ensino de Portugal e da Espanha: análise de um questionário1** *São Paulo, v.16, n.1, pp.1-24, 2014.*

MIGUEL, M. I. R. Ensino e aprendizagem do Modelo de Poisson: uma experiência com modelagem. Tese de doutorado em Educação Matemática – PUC/SP, 2005.

SILVA, M. J. F. da. Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série. Tese de doutorado em Educação Matemática – PUC/SP, 2005.

MIRANDA,W. DOS SANTOS. Estudando o Obstáculo Didático sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. Tese de doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas, no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, no Instituto de Educação Matemática e Científica – IEMCI da Universidade Federal do Pará – UFPA, 2016.