Para termos uma idéia de quantos termos precisamos usar em nossa aproximação, vamos escrever os primeiros termos da série

$$s = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

$$= 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} - \tfrac{1}{5040} + \cdots$$

Note que

$$b_7 = \tfrac{1}{5040} < \tfrac{1}{5000} = 0{,}0002$$

e

$$s_6 = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} \approx 0{,}368056$$

Pelo Teorema da Estimativa da Série Alternada sabemos que

$$|s - s_6| \leqslant b_7 < 0{,}0002$$

Esse erro menor do que 0,0002 não afeta a terceira casa decimal. Assim temos

$$s \approx 0{,}368$$

com precisão de três casas decimais.

Na Seção 11.10 provaremos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ para todo x; assim, o que obtivemos nesse exemplo é realmente uma aproximação para o número e^{-1}. □

NOTA □ A regra de que o erro (ao usar s_n para aproximar s) é menor do que o primeiro termo negligenciado é, em geral, válida apenas para séries alternadas que satisfazem as condições do Teorema da Estimativa da Série Alternada. A regra não se aplica a outros tipos de séries.

11.5 Exercícios

1. (a) O que é uma série alternada?
   (b) Sob que condições uma série alternada converge?
   (c) Se essas condições forem satisfeitas, o que você pode dizer sobre o resto depois de n termos?

2–20 □ Teste a série para convergência ou divergência.

2. $-\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{3}{5} + \frac{4}{6} - \frac{5}{7} + \cdots$

3. $\frac{4}{7} - \frac{4}{8} + \frac{4}{9} - \frac{4}{10} + \frac{4}{11} - \cdots$

4. $\dfrac{1}{\ln 2} - \dfrac{1}{\ln 3} + \dfrac{1}{\ln 4} - \dfrac{1}{\ln 5} + \dfrac{1}{\ln 6} - \cdots$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{4n+1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{4n^2+1}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2+1}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n^2}{4n^2+1}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+4}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^{3/4}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n!}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{\ln n}}$

21–22 □ Calcule as 10 primeiras somas parciais da série e plote a seqüência de termos e a seqüência das somas parciais na mesma tela. Estime o erro ao usar a décima soma parcial para aproximar a soma total.

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$

23–26 □ Quantos termos da série precisamos adicionar para encontrar a soma parcial com a precisão indicada?

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ (erro $< 0{,}01$)

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ (erro $< 0{,}001$)

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$ (erro $< 0{,}01$)

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}$ (erro $< 0{,}002$)

27–30 □ Aproxime a soma da série com a precisão indicada.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$ (quatro casas decimais)

28. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ (quatro casas decimais)

29. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$ (quatro casas decimais)

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^6}$ (cinco casas decimais)

31. A qüinquagésima soma parcial s_{50} da série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$ é uma estimativa por cima ou uma estimativa por baixo da soma total? Explique.

32–34 □ Para quais valores de p cada série é convergente?

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^p}{n}$

35. Mostre que a série $\Sigma\,(-1)^{n-1} b_n$, onde $b_n = 1/n$ se n for ímpar e $b_n = 1/n^2$ se n for par, é divergente. Por que o Teste da Série Alternada não se aplica?

36. Use as seguintes etapas para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Seja h_n e s_n as somas parciais das séries harmônica e alternada harmônica.

(a) Mostre que $s_{2n} = h_{2n} - h_n$.

(b) Do Exercício 38 da Seção 11.3 temos

$$h_n - \ln n \to \gamma \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

e portanto

$$h_{2n} - \ln(2n) \to \gamma \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

Use esses fatos junto com a parte (a) para mostrar que $s_{2n} \to \ln 2$ quando $n \to \infty$.

11.6 Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz

Dada qualquer série $\Sigma\, a_n$, podemos considerar a série correspondente

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cujos termos são os valores absolutos dos termos da série original.

□ Temos testes de convergência para séries com termos positivos e para séries alternadas. Mas o que acontece se os sinais dos termos ficam trocando irregularmente? Veremos no Exemplo 3 que a idéia de convergência absoluta algumas vezes ajuda em tais casos.

> **1 Definição** Uma série $\Sigma\, a_n$ é chamada de **absolutamente convergente** se a série de valores absolutos $\Sigma\, |a_n|$ for convergente.

Note que se $\Sigma\, a_n$ for uma série com termos positivos, então $|a_n| = a_n$, e assim a convergência absoluta é a mesma coisa que convergência nesse caso.

EXEMPLO 1 □ A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é absolutamente convergente porque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é uma série p convergente ($p = 2$). □

EXEMPLO 2 □ Sabemos que a série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

é convergente (veja o Exemplo 1 da Seção 11.5), mas não é absolutamente convergente, porque a série de valores absolutos correspondente é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

que é a série harmônica (série p com $p = 1$) e é portanto divergente. □

2 Definição Uma série $\Sigma\, a_n$ é chamada **condicionalmente convergente** se ela for convergente mas não for absolutamente convergente.

O Exemplo 2 mostra que a série harmônica alternada é condicionalmente convergente. Então, é possível para uma série ser convergente mas não absolutamente convergente. Contudo, o próximo teorema mostra que a convergência absoluta implica convergência.

3 Teorema Se uma série $\Sigma\, a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

Prova Observe que a desigualdade

$$0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|$$

é verdadeira porque $|a_n|$ é a_n ou $-a_n$. Se $\Sigma\, a_n$ for absolutamente convergente, então $\Sigma\, |a_n|$ é convergente, assim $\Sigma\, 2|a_n|$ é convergente. Portanto, pelo Teste da Comparação, $\Sigma\, (a_n + |a_n|)$ é convergente. Então

$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$

é a diferença de duas séries convergentes e é portanto convergente. □

□ A Figura 1 mostra os gráficos dos termos a_n e das somas parciais s_n da série no Exemplo 3. Note que a série não é alternada mas tem termos positivos e negativos.

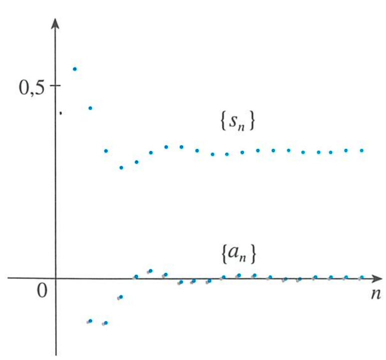

FIGURA 1

EXEMPLO 3 □ Determine se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

é convergente ou divergente.

SOLUÇÃO Essa série tem termos positivos e negativos, mas não é alternada. (O primeiro termo é positivo, os próximos três são negativos e os três seguintes são positivos. Os sinais trocam irregularmente.) Podemos aplicar o Teste da Comparação à série de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$$

Como $|\cos n| \leqslant 1$ para todo n, temos

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Sabemos que $\Sigma\, 1/n^2$ é convergente (série p com $p = 2$) e portanto $\Sigma\, |\cos n|/n^2$ é convergente pelo Teste da Comparação. Então a série dada $\Sigma\, (\cos n)/n^2$ é absolutamente convergente e portanto convergente pelo Teorema 3. □

O teste a seguir é muito útil para determinar se uma série dada é absolutamente convergente.

O Teste da Razão

(i) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e portanto convergente).

(ii) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Prova

(i) A idéia é comparar a série dada com uma série geométrica convergente. Como $L < 1$, podemos escolher um número r tal que $L < r < 1$. Como

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \qquad \text{e} \qquad L < r$$

o quociente $|a_{n+1}/a_n|$ finalmente será menor do que r; isto é, existe um inteiro N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \quad \text{sempre que} \quad n \geqslant N$$

ou, equivalentemente,

$$\boxed{4} \qquad |a_{n+1}| < |a_n|\, r \quad \text{sempre que} \quad n \geqslant N$$

Colocando n sucessivamente igual a N, $N + 1$, $N + 2$, . . . em (4) obtemos

$$|a_{N+1}| < |a_N|\, r$$

$$|a_{N+2}| < |a_{N+1}|\, r < |a_N|\, r^2$$

$$|a_{N+3}| < |a_{N+2}|\, r < |a_N|\, r^3$$

e, em geral,

$$\boxed{5} \qquad |a_{N+k}| < |a_N|\, r^k \qquad \text{para todo } k \geqslant 1$$

Agora a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_N|\, r^k = |a_N|\, r + |a_N|\, r^2 + |a_N|\, r^3 + \cdots$$

é convergente porque é uma série geométrica com $0 < r < 1$. Assim a desigualdade (5), junto com o Teste da Comparação, mostra que a série

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| = |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots$$

é convergente também. Segue-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente. (Lembre-se de que um número finito de termos não afeta a convergência.) Portanto, $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

(ii) Se $|a_{n+1}/a_n| \to L > 1$ ou $|a_{n+1}/a_n| \to \infty$, então o quociente $|a_{n+1}/a_n|$ será eventualmente maior do que 1; isto é, existe um inteiro N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \qquad \text{sempre que } n \geqslant N$$

Isso significa que $|a_{n+1}| > |a_n|$ quando $n \geqslant N$, e assim

$$\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$$

Portanto, $\sum a_n$ diverge pelo Teste da Divergência. □

NOTA □ Se $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, o Teste da Razão não dá nenhuma informação. Por exemplo, para a série convergente $\sum 1/n^2$ temos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2} \to 1 \qquad \text{quando } n \to \infty$$

enquanto para a série divergente $\sum 1/n$ temos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} \to 1 \qquad \text{quando } n \to \infty$$

Portanto, se $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, a série $\sum a_n$ pode convergir ou divergir. Nesse caso o Teste da Razão falha e devemos usar algum outro teste.

EXEMPLO 4 □ Teste a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ para convergência absoluta.

SOLUÇÃO Usamos o Teste a Razão com $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1$$

Então, pelo Teste da Razão, a série dada é absolutamente convergente e portanto convergente. □

□ **Estimando somas**

Temos usado vários métodos para estimar a soma de uma série – o método depende de qual teste era usado para provar a convergência. O que acontece com a série para a qual o Teste da Razão funciona? Existem duas possibilidades: se a série for uma série alternada, como no Exemplo 4, então é melhor usar os métodos da Seção 11.5. Se os termos forem todos positivos, então use os métodos especiais explicados no Exercício 36.

EXEMPLO 5 □ Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

SOLUÇÃO Como os termos $a_n = n^n/n!$ são positivos, não precisamos dos símbolos de valor absoluto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \quad \text{quando } n \to \infty$$

(Veja a Equação 3.8.6 no Volume I.) Como $e > 1$, a série dada é divergente pelo Teste da Razão. □

NOTA □ Embora o Teste da Razão funcione no Exemplo 5, um método mais simples é usar o Teste para Divergência. Como

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \geqslant n$$

segue-se que a_n não se aproxima de 0 quando $n \to \infty$. Portanto a série dada é divergente pelo Teste para Divergência.

O teste a seguir é conveniente para ser aplicado quando potências de n ocorrem. Sua prova é similar à prova do Teste da Razão e é deixada para o Exercício 40.

O Teste da Raiz

(i) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e portanto convergente).

(ii) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, então o Teste da Raiz não dá informação. A série $\Sigma\, a_n$ pode convergir ou divergir. (Se $L = 1$ no Teste da Razão, não tente o Teste da Raiz, porque L será novamente 1.)

EXEMPLO 6 □ Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

SOLUÇÃO

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2 + \dfrac{3}{n}}{3 + \dfrac{2}{n}} \to \frac{2}{3} < 1$$

Então, a série dada converge pelo Teste da Raiz. □

Rearranjos

A questão de uma série dada ser absolutamente convergente ou condicionalmente convergente tem importância na questão sobre se somas infinitas se comportam ou não como somas finitas.

Se rearranjarmos a ordem dos termos em uma soma finita, então é claro que o valor da soma permanecerá inalterado. Mas esse não é sempre o caso para uma série infinita. Por um **rearranjo** de uma série infinita $\Sigma\, a_n$ queremos dizer uma série obtida simplesmente mudando a ordem dos termos. Por exemplo, um rearranjo de $\Sigma\, a_n$ poderia começar como a seguir:

$$a_1 + a_2 + a_5 + a_3 + a_4 + a_{15} + a_6 + a_7 + a_{20} + \cdots$$

Segue-se que

se $\Sigma\, a_n$ for uma série absolutamente convergente com soma s, então qualquer rearranjo de $\Sigma\, a_n$ tem a mesma soma s.

Contudo, qualquer série condicionalmente convergente pode ser rearranjada para dar uma soma diferente. Para ilustrar esse fato vamos considerar a série harmônica alternada

$$\boxed{6} \qquad 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \ln 2$$

(Veja o Exercício 36 da Seção 11.5.) Se multiplicarmos essa série por $\frac{1}{2}$, obteremos

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Inserindo zeros entre os termos dessa série teremos

□ A soma desses zeros não afeta a soma da série; cada termo na seqüência de somas parciais é repetido, mas o limite é o mesmo.

$$\boxed{7} \qquad 0 + \tfrac{1}{2} + 0 - \tfrac{1}{4} + 0 + \tfrac{1}{6} + 0 - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Agora adicionamos as séries nas Equações 6 e 7 usando o Teorema 11.2.8:

$$\boxed{8} \qquad 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \cdots = \tfrac{3}{2}\ln 2$$

Note que a série em (8) contém os mesmos termos que em (6), mas rearranjados de tal modo que um termo negativo ocorre depois de cada par de termos positivos. As somas dessas séries, contudo, são diferentes. De fato, Riemann provou que

se $\Sigma\, a_n$ for uma série condicionalmente convergente e r for qualquer número real, então existe um rearranjo de $\Sigma\, a_n$ que tem uma soma igual a r.

Uma prova desse fato é ilustrada no Exercício 42.

11.6 Exercícios

1. O que você pode dizer sobre a série $\Sigma\, a_n$ em cada um dos seguintes casos?

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 8$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0{,}8$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

2–30 □ Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3}$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5+n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5+n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} n!$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n}{n^2}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} n}{n^3}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{4^{n-1}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 2^n}{n!}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/6)}{n\sqrt{n}}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-10)^n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$

22. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+3n}}$

24. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\operatorname{arctg} n)^n}$

27. $$1 - \frac{2!}{1 \cdot 3} + \frac{3!}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{4!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)} + \cdots$$

28. $$\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \cdots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n+1)} + \cdots$$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{n!}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (3n+2)}$

31. Os termos de uma série são definidos recursivamente pelas equações

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3} a_n$$

Determine se $\Sigma\, a_n$ converge ou diverge.

32. Uma série $\Sigma\, a_n$ é definida pelas equações

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}} a_n$$

Determine se $\Sigma\, a_n$ converge ou diverge.

33. Para quais das seguintes séries o Teste da Razão não é conclusivo (isto é, ele não dá uma resposta definida)?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$

34. Para quais inteiros positivos k a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

é convergente?

35. (a) Mostre que $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ converge para todo x.
(b) Deduza que $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ para todo x.

36. Seja $\Sigma\, a_n$ uma série com termos positivos e seja $r_n = a_{n+1}/a_n$. Suponha que $\lim_{n\to\infty} r_n = L < 1$, assim $\Sigma\, a_n$ converge pelo Teste da Razão. Como habitualmente, faça R_n o resto depois de n termos, isto é,

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

(a) Se $\{r_n\}$ for uma seqüência decrescente e $r_{n+1} < 1$, mostre, pela soma de uma série geométrica, que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - r_{n+1}}$$

(b) Se $\{r_n\}$ for uma seqüência crescente, mostre que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - L}$$

37. (a) Calcule a soma parcial s_5 da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

Use o Exercício 36 para estimar o erro ao usar s_5 como uma aproximação da soma da série.
(b) Calcule um valor de n de tal maneira que s_n aproxima a soma com precisão 0,00005. Use esse valor de n para aproximar a soma da série.

38. Use a soma dos primeiros 10 termos para aproximar a soma da série $\Sigma_{n=1}^{\infty} n/2^n$. Use o Exercício 36 para estimar o erro.

39. Prove que se $\Sigma\, a_n$ for absolutamente convergente, então

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

40. Prove o Teste da Raiz. [*Dica para a parte (i)*: Tome qualquer número r tal que $L < r < 1$ e use o fato de que existe um inteiro N tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < r$ quando $n \geqslant N$.]

41. Dada uma série qualquer $\Sigma\, a_n$ definimos uma série $\Sigma\, a_n^+$ cujos termos são todos termos positivos de $\Sigma\, a_n$ e uma série $\Sigma\, a_n^-$ cujos termos são todos termos negativos de $\Sigma\, a_n$. Para ser específico, seja

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \qquad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$$

Note que se $a_n > 0$, então $a_n^+ = a_n$ e $a_n^- = 0$, ao passo que se $a_n < 0$, então $a_n^- = a_n$ e $a_n^+ = 0$.
(a) Se $\Sigma\, a_n$ for absolutamente convergente, mostre que ambas as séries $\Sigma\, a_n^+$ e $\Sigma\, a_n^-$ são convergentes.
(b) Se $\Sigma\, a_n$ for condicionalmente convergente, mostre que ambas as séries $\Sigma\, a_n^+$ e $\Sigma\, a_n^-$ são divergentes.

42. Prove que se $\Sigma\, a_n$ for uma série condicionalmente convergente e r for qualquer número real, então existe um rearranjo de $\Sigma\, a_n$ cuja soma é r. [*Dicas*: Use a notação do Exercício 41. Tome um número apenas suficiente de termos positivos $\Sigma\, a_n^+$ de modo que sua soma seja maior do que r. Então adicione um número apenas suficiente de termos negativos $\Sigma\, a_n^-$ de tal modo que a soma cumulativa seja menor do que r. Continue dessa maneira e use o Teorema 11.2.6.]

11.7 Estratégia para Testar Séries

Agora temos várias maneiras de testar a convergência ou divergência de uma série; o problema é decidir qual teste usar em que série. Nesse aspecto testar séries é similar a integrar funções. De novo não há regras certeiras e rápidas para qual teste aplicar a uma série dada, mas você pode achar os conselhos a seguir de alguma utilidade.

Não é sábio aplicar uma lista de testes em uma ordem específica até um finalmente funcionar. Isso seria uma perda de tempo e esforço. Em vez disso, como na integração, a principal estratégia é classificar a série de acordo com sua *forma*.

1. Se a série for da forma $\Sigma\, 1/n^p$, ela é uma série p, que sabemos ser convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leqslant 1$.
2. Se a série tiver a forma $\Sigma\, ar^{n-1}$ ou $\Sigma\, ar^n$, ela é uma série geométrica, que converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geqslant 1$. Algumas manipulações algébricas podem ser necessárias para deixar a série dessa forma.
3. Se a série tiver uma forma que é similar a uma série p ou a uma série geométrica, então um dos testes de comparação deve ser considerado. Em particular, se a_n for uma função racional ou uma função algébrica de n (envolvendo raízes de polinômios), então a série deve ser comparada com uma série p. Note que a maioria das séries nos Exercícios 11.4 tem essa forma. (O valor de p deve ser escolhido como na Seção 11.4, deixando apenas as potências n mais altas no numerador e denominador.) Os testes de comparação se aplicam apenas a séries com termos positivos, mas se $\Sigma\, a_n$ tiver alguns termos negativos, então poderemos aplicar o Teste da Comparação a $\Sigma\, |a_n|$ e testar a convergência absoluta.
4. Se você vir que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, então o Teste para Divergência deve ser usado.
5. Se a série for da forma $\Sigma\, (-1)^{n-1}b_n$ ou $\Sigma\, (-1)^n b_n$, então o Teste da Série Alternada é uma possibilidade óbvia.
6. Séries que envolvem fatoriais ou outros produtos (incluindo uma constante elevada à n-ésima potência) são com freqüência testadas convenientemente usando-se o Teste da Razão. Tenha em mente que $|a_{n+1}/a_n| \to 1$ quando $n \to \infty$ para todas as séries p, e portanto todas as funções racionais ou algébricas de n. Então, o Teste da Razão não deve ser usado para tais séries.
7. Se a_n for da forma $(b_n)^n$, então o Teste da Raiz pode ser útil.
8. Se $a_n = f(n)$, onde $\int_1^\infty f(x)\, dx$ é facilmente avaliada, então o Teste da Integral é eficaz (assumindo a hipótese de esse teste ser satisfeito).

Nos próximos exemplos não trabalhamos todos os detalhes, mas simplesmente indicamos quais testes devem ser usados.

EXEMPLO 1 □ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$

Como $a_n \to \frac{1}{2} \neq 0$ quando $n \to \infty$, devemos usar o Teste para Divergência. □

EXEMPLO 2 □ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{3n^3+4n^2+2}$

Como a_n é uma função algébrica de n, comparamos a série dada com uma série p.

A série de comparação é $\Sigma\, b_n$, onde

$$b_n = \frac{\sqrt{n^3}}{3n^3} = \frac{n^{3/2}}{3n^3} = \frac{1}{3n^{3/2}}$$

EXEMPLO 3 □ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Como a integral $\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx$ é facilmente avaliada, usamos o Teste da Integral. O Teste da Razão também funciona.

EXEMPLO 4 □ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4+1}$

Como a série é alternada, usamos o Teste da Série Alternada.

EXEMPLO 5 □ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

Como a série envolve $n!$, usamos o Teste da Razão.

EXEMPLO 6 □ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$

Como a série está intimamente relacionada à série geométrica $\Sigma\, 1/3^n$, usamos o Teste da Comparação.

11.7 Exercícios

1–38 □ Teste a convergência ou divergência das séries.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n-1}{n^2+n}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{2^{3n}}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{1+8n}\right)^n$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1,7}$
8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2e^{-n^3}$
11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\ln n}$
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n$
13. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(\ln n)^3}$
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$
15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$
16. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}-1}$
17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n+n}$
18. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+5}{5^k}$
19. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n+2)}$
20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)(n+2)}$
21. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i(i+1)}}$
22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^3+2n^2+5}$
23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{1/n}$
24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n/2)}{n^2+4n}$
25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$
26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}(1/n)}{n}$
27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{n^n}$
28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}$
29. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\ln k}{(k+1)^3}$
30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$
31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!}$
32. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\sqrt{j}}{j+5}$
33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^{-1} n}{n\sqrt{n}}$
34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n^{2n}}$
35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
36. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$
37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)^n$
38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)$