□ A Figura 5 mostra gráficos de sete membros da família do Exemplo 1. A equação diferencial mostra que se $y \approx \pm 1$, então $y' \approx 0$. Isso é mostrado visivelmente pelo achatamento dos gráficos próximo de $y = 1$ e $y = -1$.

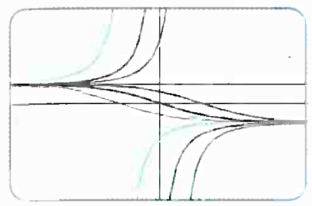

FIGURA 5

O lado direito da equação diferencial torna-se

$$\tfrac{1}{2}(y^2 - 1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(1 + ce^t)^2 - (1 - ce^t)^2}{(1 - ce^t)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{4ce^t}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

Portanto, para todo valor de c, a função dada é uma solução da equação diferencial. □

Quando aplicamos as equações diferenciais geralmente não estamos tão interessados em encontrar uma família de soluções (a *solução geral*) quanto em encontrar uma solução que satisfaça algumas condições adicionais. Em muitos problemas físicos precisamos encontrar uma solução particular que satisfaça uma condição do tipo $y(t_0) = y_0$. Esta é chamada de condição inicial, e o problema de achar uma solução da equação diferencial que satisfaça a **condição inicial** é chamado de **problema de valor inicial.**

Geometricamente, quando impomos uma condição inicial, olhamos para uma família de curvas solução e escolhemos uma que passa pelo ponto (t_0, y_0). Fisicamente isso corresponde à medida do estado de um sistema a um tempo t_0 e ao uso da solução do problema de valor inicial para prever o comportamento futuro do sistema.

EXEMPLO 2 □ Encontre uma solução da equação diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$.

SOLUÇÃO Substituindo os valores $t = 0$ e $y = 2$ na fórmula

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

do Exemplo 1 temos

$$2 = \frac{1 + ce^0}{1 - ce^0} = \frac{1 + c}{1 - c}$$

Resolvendo essa equação para c temos $2 - 2c = 1 + c$, o que fornece $c = \frac{1}{3}$. Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{1 + \frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{1}{3}e^t} = \frac{3 + e^t}{3 - e^t}$$ □

9.1 Exercícios

1. Mostre que $y = 2 + e^{-x^3}$ é uma solução da equação diferencial $y' + 3x^2y = 6x^2$.

2. Verifique que $y = (2 + \ln x)/x$ é uma solução para o problema de valor inicial

$$x^2y' + xy = 1 \qquad y(1) = 2$$

3. (a) Para quais valores não nulos de k a função $y = \operatorname{sen} kt$ satisfaz a equação diferencial $y'' + 9y = 0$?

(b) Para aqueles valores de k, verifique que todo membro da família de funções

$$y = A \operatorname{sen} kt + B \cos kt$$

é também uma solução.

4. Para quais valores de r a função $y = e^{rt}$ satisfaz a equação diferencial $y'' + y' - 6y = 0$?

5. Quais das seguintes funções são soluções da equação diferencial $y'' + 2y' + y = 0$?
(a) $y = e^t$ (b) $y = e^{-t}$
(c) $y = te^{-t}$ (d) $y = t^2e^{-t}$

6. (a) Mostre que cada membro da família de funções $y = Ce^{x^2/2}$ é uma solução para a equação diferencial $y' = xy$.
(b) Ilustre a parte (a) plotando vários membros da família de soluções na mesma tela.
(c) Encontre a solução da equação diferencial $y' = xy$ que satisfaça a condição inicial $y(0) = 5$.
(d) Encontre a solução da equação diferencial $y' = xy$ que satisfaça a condição inicial $y(1) = 2$.

7. (a) O que você pode dizer da solução da equação $y' = -y^2$ apenas olhando a equação diferencial?
(b) Verifique que todos os membros da família $y = 1/(x + C)$ são soluções da equação na parte (a).
(c) Você pode pensar em uma solução da equação diferencial $y' = -y^2$ que não seja membro da família na parte (b)?
(d) Encontre uma solução para o problema de valor inicial

$$y' = -y^2 \qquad y(0) = 0{,}5$$

8. (a) O que você pode dizer sobre o gráfico de uma solução da equação $y' = xy^3$ quando x está próximo de 0? E se x for grande?
(b) Verifique que todos os membros da família $y = (c - x^2)^{-1/2}$ são soluções da equação diferencial $y' = xy^3$.
(c) Plote vários membros da família de soluções na mesma tela. Os gráficos confirmam o que você predisse na parte (a)?
(d) Encontre uma solução para o problema de valor inicial

$$y' = xy^3 \qquad y(0) = 2$$

9. Uma população é modelada pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 1{,}2P\left(1 - \frac{P}{4200}\right)$$

(a) Para quais valores de P a população está aumentando?
(b) Para quais valores de P a população está diminuindo?
(c) Quais são as soluções de equilíbrio?

10. A função $y(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^4 - 6y^3 + 5y^2$$

(a) Quais são as soluções constantes da equação?
(b) Para quais valores de y a função está aumentando?
(c) Para quais valores de y a função está diminuindo?

11. Psicólogos interessados em teoria do aprendizado estudam **curvas de aprendizado**. Uma curva de aprendizado é o gráfico de uma função $P(t)$, o desempenho de alguém aprendendo uma habilidade como uma função do tempo de treinamento t. A derivada dP/dt representa a taxa na qual o desempenho melhora.
(a) Quando você acha que P aumenta mais rapidamente? O que acontece a dP/dt quando t aumenta? Explique.
(b) Se M é o nível máximo de desempenho do qual o aprendiz é capaz, explique a razão pela qual a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P) \qquad k \text{ uma constante positiva}$$

é um modelo razoável para o aprendizado.
(c) Faça um esboço de uma possível solução para a equação diferencial.

12. Suponha que você acabou de servir uma xícara de café recém-passado com uma temperatura de 95 °C em uma sala onde a temperatura é 20 °C.
(a) Quando você acha que o café esfria mais rapidamente? O que acontece com a taxa de resfriamento com o passar do tempo? Explique.
(b) A Lei de Newton do Resfriamento estabelece que a taxa de resfriamento de um objeto é proporcional à diferença de temperatura entre o objeto e sua vizinhança, desde que essa diferença não seja muito grande. Escreva uma equação diferencial para expressar a Lei de Newton do Resfriamento nessa situação particular. Qual a condição inicial? Tendo em vista sua resposta na parte (a), você acha que essa equação diferencial é um modelo apropriado para o resfriamento?
(c) Faça um esboço para o gráfico da solução do problema de valor inicial na parte (b).

9.2 Campos de Direção e o Método de Euler

Infelizmente é impossível resolver a maioria das equações diferenciais no sentido de obter uma fórmula explícita para a solução. Nesta seção mostramos que, mesmo sem uma solução explícita, podemos ainda aprender muito sobre uma solução através de uma abordagem gráfica (campos de direção) ou de uma abordagem numérica (método de Euler).

Campos de Direção

Suponha que peçam para esboçarmos o gráfico da solução do problema de valor inicial

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

Portanto $\qquad |150 - y| = 130e^{-t/200}$

Como $y(t)$ é contínua, $y(0) = 20$ e o lado direito nunca é zero, deduzimos que $150 - y(t)$ é sempre positiva. Então, $|150 - y| = 150 - y$ e assim

$$y(t) = 150 - 130e^{-t/200}$$

A quantidade de sal depois de 30 minutos é

$$y(30) = 150 - 130e^{-30/200} \approx 38{,}1 \text{ kg}$$

9.3 Exercícios

1–8 □ Resolva a equação diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} = y^2$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2x}}{4y^3}$

3. $yy' = x$

4. $y' = xy$

5. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{te^t}{y\sqrt{1 + y^2}}$

6. $y' = \dfrac{xy}{2 \ln y}$

7. $\dfrac{du}{dt} = 2 + 2u + t + tu$

8. $\dfrac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$

9–14 □ Encontre a solução da equação diferencial que satisfaz a condição inicial dada.

9. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 1, \quad y(1) = 0$

10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + x}{xy}, \quad x > 0, \quad y(1) = -4$

11. $xe^{-t}\dfrac{dx}{dt} = t, \quad x(0) = 1$

12. $x + 2y\sqrt{x^2 + 1}\,\dfrac{dy}{dx} = 0, \quad y(0) = 1$

13. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2t + \sec^2 t}{2u}, \quad u(0) = -5$

14. $\dfrac{dy}{dt} = te^y, \quad y(1) = 0$

15. Encontre uma equação da curva que satisfaz $dy/dx = 4x^3y$ e cujo intercepto y é 7.

16. Encontre uma equação da curva que passa pelo ponto $(1, 1)$ e cuja inclinação em (x, y) é y^2/x^3.

17. Resolva o problema de valor inicial $y' = y \operatorname{sen} x$, $y(0) = 1$, e plote a solução.

18. Resolva a equação $e^{-y}y' + \cos x = 0$ e plote vários membros da família de soluções. Como a curva solução muda quando a constante C varia?

CAS **19.** Resolva o problema de valor inicial $y' = (\operatorname{sen} x)/\operatorname{sen} y$, $y(0) = \pi/2$, e plote a solução (se seu CAS fizer gráficos implícitos).

CAS **20.** Resolva a equação $y' = x\sqrt{x^2 + 1}/(ye^y)$ e plote vários membros da família de soluções (se seu CAS fizer gráficos implícitos). Como muda a curva solução quando a constante C varia?

CAS **21–22** □

(a) Use um sistema algébrico computacional para desenhar um campo de direções para a equação diferencial. Imprima-o e esboce algumas curvas solução sem resolver a equação diferencial.

(b) Resolva a equação diferencial.

(c) Use o CAS para desenhar vários membros da família de soluções obtida na parte (b). Compare com as curvas da parte (a).

21. $y' = 1/y$

22. $y' = x^2/y$

23–26 □ Encontre as trajetórias ortogonais da família de curvas. Usando uma calculadora (ou computador) desenhe vários membros de cada família na mesma tela.

23. $y = kx^2$

24. $x^2 - y^2 = k$

25. $y = (x + k)^{-1}$

26. $y = ke^{-x}$

27. Resolva o problema de valor inicial no Exercício 27 na Seção 9.2 para encontrar uma expressão para a carga no tempo t. Encontre o valor limite da carga.

28. No Exercício 28 na Seção 9.2 discutimos uma equação diferencial que modela a temperatura de uma xícara de café a 95 °C em uma sala a 20 °C. Resolva a equação diferencial para encontrar uma expressão para a temperatura do café no tempo t.

29. No Exercício 11 na Seção 9.1 formulamos um modelo para o aprendizado na forma da equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)$$

onde $P(t)$ mede o desempenho de alguém aprendendo uma habilidade depois de um tempo de treinamento t, M é o nível máximo de desempenho e k é uma constante positiva. Resolva essa equação diferencial para encontrar uma expressão para $P(t)$. Qual é o limite dessa expressão?

30. Em uma reação química elementar, moléculas únicas de dois reagentes A e B formam a molécula do produto C: $\mathrm{A} + \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C}$. A lei de ação das massas estabelece que a taxa de reação é proporcional ao produto das concentrações de A e B:

$$\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = k[\mathrm{A}][\mathrm{B}]$$

(Veja o Exemplo 4 na Seção 3.3. no Volume I) Então, se as concentrações iniciais forem $[\mathrm{A}] = a$ mols/l e $[\mathrm{B}] = b$ mols/l e escrevermos $x = [\mathrm{C}]$, então teremos

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

CAS (a) Assumindo que $a \neq b$, encontre x como uma função de t. Use um sistema algébrico computacional para fazer a integração.
(b) Encontre $x(t)$ assumindo que $a = b$. Como essa expressão para $x(t)$ é simplificada se soubermos que $[\mathrm{C}] = a/2$ depois de 20 segundos?

31. Uma solução de glicose é administrada por via intravenosa na corrente sangüínea a uma taxa constante r. À medida que a glicose é adicionada ela é convertida em outras substâncias e removida da corrente sangüínea a uma taxa que é proporcional à concentração naquele instante. Então um modelo para a concentração $C = C(t)$ da solução de glicose na corrente sangüínea é

$$\frac{dC}{dt} = r - kC$$

onde k é uma constante positiva.
(a) Suponha que a concentração no tempo $t = 0$ é C_0. Determine a concentração em um tempo qualquer t resolvendo a equação diferencial.
(b) Assumindo que $C_0 < r/k$, calcule $\lim_{t\to\infty} C(t)$ e interprete sua resposta.

32. Um pequeno país tem \$ 10 bilhões em papel-moeda em circulação e a cada dia \$ 50 milhões chegam nos bancos do país. O governo decide introduzir uma nova moeda, fazendo com que os bancos troquem notas velhas por novas sempre que a moeda antiga entrar nos bancos. Denote por $x = x(t)$ a quantidade de moeda nova em circulação no tempo t, com $x(0) = 0$.
(a) Formule um modelo matemático na forma de um problema de valor inicial que represente o "fluxo" da nova moeda em circulação.
(b) Resolva o problema de valor inicial encontrado na parte (a).
(c) Quanto tempo levará para a nova moeda representar 90% da moeda em circulação?

33. Um tanque contém 1000 l de água salgada com 15 kg de sal dissolvido. Água pura entra no tanque a uma taxa de 10 l/min. A solução é mantida bem misturada e sai do tanque na mesma taxa. Quanto sal permanece no tanque (a) depois de t minutos e (b) depois de 20 minutos?

34. Um tanque contém 1000 l de água pura. Água salgada com 0,05 kg de sal por litro de água entra no tanque a uma taxa de 5 l/min. Água salgada com 0,04 kg de sal por litro de água entra no tanque a uma taxa de 10 l/min. A solução é mantida completamente misturada e sai do tanque a uma taxa de 15 l/min. Quanto sal está no tanque (a) depois de t minutos e (b) depois de 1 hora?

35. Quando uma gota de chuva cai, ela aumenta de tamanho; assim, sua massa em um tempo t é uma função de t, $m(t)$. A taxa do aumento da massa é $km(t)$ para alguma constante positiva k. Quando aplicamos a Lei de Newton do Movimento à gota de chuva, obtemos $(mv)' = gm$, onde v é a velocidade da gota de chuva (dirigida para baixo) e g é a aceleração da gravidade. A velocidade terminal da gota de chuva é $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Encontre uma expressão para a velocidade terminal em termos de g e k.

36. Um objeto de massa m está se movendo horizontalmente através de um meio que resiste ao movimento com uma força que é uma função da velocidade; isto é,

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = f(v)$$

onde $v = v(t)$ e $s = s(t)$ representam a velocidade e a posição do objeto no tempo t, respectivamente. Por exemplo, pense em um barco se movendo através da água.
(a) Suponha que a força de resistência seja proporcional à velocidade, isto é, $f(v) = -kv$, k uma constante positiva. Seja $v(0) = v_0$ e $s(0) = s_0$ os valores iniciais de v e s. Determine v e s em um tempo qualquer t. Qual é a distância total que o objeto percorre a partir do tempo $t = 0$?
(b) Suponha que a força de resistência seja proporcional ao quadrado da velocidade, isto é, $f(v) = -kv^2$, $k > 0$. Sejam v_0 e s_0 os valores iniciais de v e s. Determine v e s em um tempo qualquer t. Qual é a distância total que o objeto percorre nesse caso?

37. Seja $A(t)$ a área de uma cultura de tecido em um tempo t e seja M a área final do tecido quando o crescimento é completo. A maioria das divisões celulares ocorre na periferia do tecido, e o número de células na periferia é proporcional a $\sqrt{A(t)}$. Assim, um modelo razoável para o crescimento de tecido é obtido assumindo-se que a taxa de crescimento da área seja proporcional a $\sqrt{A(t)}$ em conjunto com $M - A(t)$.
(a) Formule uma equação diferencial e use-a para mostrar que o tecido cresce mais rápido quando $A(t) = M/3$.
CAS (b) Resolva a equação diferencial para encontrar uma expressão para $A(t)$. Use um sistema algébrico computacional para fazer a integração.

38. De acordo com a Lei de Newton da Gravitação Universal, a força gravitacional de um objeto de massa m que tenha sido lançado verticalmente para cima da superfície da Terra é

$$F = \frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

onde $x = x(t)$ é a distância do objeto acima da superfície no tempo t, R é o raio da Terra e g é a aceleração da gravidade. Também, pela Segunda Lei de Newton, $F = ma = m(dv/dt)$ e assim

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2}$$

(a) Suponha que um foguete seja lançado verticalmente para cima com uma velocidade inicial v_0. Seja h a altura máxima acima da superfície alcançada pelo objeto. Mostre que

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}$$

[*Dica:* Pela Regra da Cadeia, $m\,(dv/dt) = mv\,(dv/dx)$.]

(b) Calcule $v_e = \lim_{h\to\infty} v_0$. Esse limite é chamado de *velocidade de escape* da Terra.

(c) Use $R = 3960$ milhas e $g = 32$ pés/s^2 para calcular v_e em pés por segundo e em milhas por segundo.

39. Seja $y(t)$ e $V(t)$ a altura e o volume de água em um tanque no tempo t. Se a água vaza através de um furo com uma área a no fundo do tanque, então a Lei de Torricelli diz que

$$\frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$

onde g é a aceleração da gravidade.

(a) Suponha que o tanque seja cilíndrico com altura de 6 pés e raio de 2 pés e que o furo seja circular com raio de 1 pol. Se tomarmos $g = 32$ pés/s^2, mostre que y satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{72}\sqrt{y}$$

(b) Resolva essa equação para encontrar a altura de água no tempo t, assumindo que o tanque está cheio no tempo $t = 0$.

(c) Quanto tempo levará para a água ser drenada completamente?

40. Suponha que o tanque no Exercício 39 não seja cilíndrico, mas tenha área de seção transversal $A(y)$ na altura y. Então o volume de água até a altura y é $V = \int_0^y A(u)\,du$, e assim o Teorema Fundamental do Cálculo fornece $dV/dy = A(y)$. Segue-se que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} = A(y)\frac{dy}{dt}$$

e assim a Lei de Torricelli torna-se

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$

(a) Suponha que o tanque tenha o formato de uma esfera de raio 2 m e esteja inicialmente cheia de água. Se o raio do furo circular é 1 cm e tomarmos $g = 10$ m/s^2, mostre que y satisfaz a equação diferencial

$$(4y - y^2)\frac{dy}{dt} = -0{,}0001\sqrt{20y}$$

(b) Quanto tempo levará para a água drenar completamente?

Projeto Aplicado

O Que É Mais Rápido: Subir ou Descer?

Suponha que você jogue uma bola no ar. Você acha que ela leva mais tempo para alcançar sua altura máxima ou para cair de volta para a Terra de sua altura máxima? Resolveremos esse problema neste projeto, mas, antes de começar, pense sobre a situação e dê um palpite baseado em sua intuição física.

□ Experimentos têm mostrado que, para velocidades até 100 m/s, a força devido à resistência do ar é aproximadamente proporcional à velocidade.

1. Uma bola de massa m é lançada verticalmente para cima a partir da superfície da Terra com uma velocidade inicial positiva v_0. Assumimos que as forças agindo na bola são a força da gravidade e a força de resistência do ar com sentido oposto ao sentido do movimento e com magnitude $P\,|v(t)|$ onde p é uma constante positiva e $v(t)$ é a velocidade da bola no tempo t. Na subida e na descida a força total agindo na bola é $-pv - mg$. (Durante a subida, $v(t)$ é positiva, e a resistência age para baixo; durante a descida, $v(t)$ é negativa, e a resistência age para cima.) Assim, pela Segunda Lei de Newton, a equação de movimento é

$$mv' = -pv - mg$$

Resolva essa equação diferencial para mostrar que a velocidade é

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)e^{-pt/m} - \frac{mg}{p}$$

2. Mostre que a altura da bola, até ela atingir o chão, é

$$y(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)\frac{m}{p}(1 - e^{-pt/m}) - \frac{mgt}{p}$$

9.4 Exercícios

1. Uma população de protozoários se desenvolve com uma taxa de crescimento relativo constante de 0,7944 por membro por dia. No dia zero a população consiste em dois membros. Calcule o tamanho da população depois de seis dias.

2. Um habitante comum do intestino humano é a bactéria *Escherichia coli*. Uma célula dessa bactéria em um meio nutriente se divide em duas células a cada 20 minutos. A população inicial da cultura é de 60 células.
   (a) Encontre a taxa de crescimento relativo.
   (b) Encontre uma expressão para o número de células depois de t horas.
   (c) Calcule o número de células depois de 8 horas.
   (d) Calcule a taxa de crescimento depois de 8 horas.
   (e) Quando a população alcançará 20.000 células?

3. Uma cultura de bactérias começa com 500 bactérias e cresce a uma taxa proporcional a seu tamanho. Depois de 3 horas existem 8000 bactérias.
   (a) Encontre uma expressão para o número de bactérias depois de t horas.
   (b) Calcule o número de bactérias depois de 4 horas.
   (c) Calcule a taxa de crescimento depois de 4 horas.
   (d) Quando essa população alcançará 30.000?

4. Uma cultura de bactérias cresce com uma taxa de crescimento relativo constante. A contagem era 400 depois de 2 horas e 25.600 depois de 6 horas.
   (a) Qual a população inicial da cultura?
   (b) Encontre uma expressão para a população depois de t horas.
   (c) Em que período de tempo a população duplica?
   (d) Quando a população alcançará 100.000?

5. A tabela fornece estimativas da população mundial, em milhões, por dois séculos:

Ano	População	Ano	População
1750	728	1900	1608
1800	906	1950	2517
1850	1171		

   (a) Use o modelo exponencial e os números da população em 1750 e 1800 para prever a população mundial em 1900 e 1950. Compare com os dados reais.
   (b) Use o modelo exponencial e os dados populacionais para 1850 e 1900 para prever a população mundial em 1950. Compare com a população real.
   (c) Use o modelo exponencial e os dados populacionais para 1900 e 1950 para prever a população mundial em 1992. Compare com a população real de 5,4 bilhões em 1992 e tente explicar a discrepância.

6. A tabela fornece a população dos Estados Unidos, em milhões, para os anos 1900-1990.

Ano	População	Ano	População
1900	76	1950	150
1910	92	1960	179
1920	106	1970	203
1930	123	1980	227
1940	131	1990	250

   (a) Use o modelo exponencial e os dados do censo para 1900 e 1910 para prever a população em 1990. Compare com os dados reais e tente explicar a discrepância.
   (b) Use o modelo exponencial e os dados do censo para 1970 e 1980 para prever a população em 1990. Compare com a população real. Então use esse modelo para prever a população nos anos 2000 e 2010.
   (c) Desenhe um gráfico mostrando ambas as funções exponenciais das partes (a) e (b) juntas com o gráfico da população real. Esses modelos são razoáveis?

7. Experimentos mostram que se a reação química

$$N_2O_5 \longrightarrow 2NO_2 + \tfrac{1}{2}O_2$$

for realizada a 45 °C, a taxa de reação do pentóxido de nitrogênio é proporcional a sua concentração, como a seguir

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = 0{,}0005[N_2O_5]$$

(Veja o Exemplo 4 na Seção 3.3 no Volume I).
   (a) Encontre uma expressão para a concentração de $[N_2O_5]$ depois de t segundos se a concentração inicial é C.
   (b) Quanto tempo de reação levará para reduzir a concentração do N_2O_5 para 90% de seu valor original?

8. O polônio-210 tem uma meia-vida de 140 dias.
   (a) Se uma amostra tem uma massa de 200 mg, encontre uma fórmula para a massa que resta depois de t dias.
   (b) Calcule a massa depois de 100 dias.
   (c) Quando a massa será reduzida para 10 mg?
   (d) Esboce o gráfico da função massa.

9. O polônio-214 tem uma meia-vida muito curta, de $1{,}4 \times 10^{-4}$ s.
   (a) Se uma amostra tem uma massa de 50 mg, encontre uma fórmula para a massa que resta após t segundos.
   (b) Calcule a massa que resta após um centésimo de segundo.
   (c) Quanto tempo levará para a massa decair para 40 mg?

10. Depois de 3 dias uma amostra de radônio-222 decaiu para 58% de sua quantidade original.
   (a) Qual a meia-vida do radônio-222?

(b) Quanto tempo levará para a amostra decair para 10% de sua quantidade original?

11. Os cientistas podem determinar a idade de um objeto antigo por um método chamado *datação de carbono-14*. O bombardeamento da atmosfera superior por raios cósmicos converte o nitrogênio em um isótopo radioativo de carbono, ^{14}C, com uma meia-vida de cerca de 5730 anos. A vegetação absorve o dióxido de carbono através da atmosfera, e os animais assimilam o ^{14}C através das cadeias alimentares. Quando uma planta ou animal morre, ele pára de repor seu carbono, e a quantidade de ^{14}C diminui através do decaimento radioativo. Portanto o nível de radioatividade também deve decair exponencialmente. Um pedaço de tecido foi descoberto tendo cerca de 74% de ^{14}C radioativo em relação às plantas terrestres nos dias de hoje. Estime a idade do pedaço de tecido.

12. Uma curva passa pelo ponto (0, 5) e tem a propriedade de que a inclinação da curva a cada ponto P é duas vezes a coordenada y de P. Qual é a equação da curva?

13. A Lei de Newton do Resfriamento estabelece que a taxa de resfriamento de um objeto é proporcional à diferença de temperatura entre o objeto e sua vizinhança. Suponha que um peru assado é tirado do forno quando sua temperatura alcança 185 °F e é colocado em uma mesa em uma sala onde a temperatura é 75 °F. Se $u(t)$ for a temperatura do peru depois de t minutos, então a Lei de Newton do Resfriamento implica que

$$\frac{du}{dt} = k(u - 75)$$

Esta pode ser resolvida como uma equação diferencial separável. Um outro método é fazer a mudança de variável $y = u - 75$.

(a) Qual problema de valor inicial a nova função y satisfaz? Qual é a solução?
(b) Se a temperatura do peru for 150 °F depois de meia hora, qual será a temperatura depois de 45 minutos?
(c) Quando o peru esfriará a 100 °F?

14. Um termômetro é levado de um cômodo onde a temperatura é 20 °C para o lado de fora onde a temperatura é 5 °C. Depois de 1 minuto a leitura do termômetro é 12 °C. Use a Lei de Newton do Resfriamento para responder às seguintes questões.

(a) Qual será a leitura do termômetro depois de mais 1 minuto?
(b) Quando a leitura do termômetro será 6 °C?

15. A taxa de mudança da pressão atmosférica P em relação à altitude h é proporcional a P, desde que a temperatura seja constante. A 15 °C a pressão é 101,3 kPa ao nível do mar e 87,14 kPa a $h = 1000$ m.

(a) Qual é a pressão a uma altitude de 3000 m?
(b) Qual é a pressão no topo do monte McKinley, a uma altitude de 6187 m?

16. (a) Se \$ 500 são emprestados a 14% de juros, calcule as quantidades devidas no final de 2 anos se os juros forem compostos (i) anualmente, (ii) trimestralmente, (iii) mensalmente, (iv) diariamente, (v) por hora e (vi) continuamente.

(b) Suponha que \$ 500 são emprestados e os juros são compostos continuamente. Se $A(t)$ for a quantidade devida depois de t anos, onde $0 \leq t \leq 2$, plote $A(t)$ para cada uma das taxas de juros 14%, 10% e 6% na mesma tela.

17. (a) Se \$ 3000 são investidos a uma taxa de juros de 5%, calcule o valor do investimento no final de 5 anos se os juros forem compostos (i) anualmente, (ii) semestralmente, (iii) mensalmente, (iv) semanalmente, (v) diariamente e (vi) continuamente.

(b) Se $A(t)$ for a quantidade de investimento no tempo t para o caso de composição contínua, escreva uma equação diferencial e uma condição inicial satisfeita por $A(t)$.

18. Quanto tempo levará um investimento para dobrar seu valor se a taxa de juros for 6% composta continuamente?

19. Considere uma população $P = P(t)$ com taxas de natalidade e mortalidade relativas constantes α e β, respectivamente, e uma taxa de emigração constante m, onde α, β e m são constantes positivas. Assuma que $\alpha > \beta$. Então a taxa de variação da população em um tempo t é modelada pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP - m \qquad \text{onde} \quad k = \alpha - \beta$$

(a) Encontre a solução dessa equação que satisfaz a condição inicial $P(0) = P_0$.
(b) Qual condição sobre m levará a uma expansão exponencial da população?
(c) Qual condição sobre m levará a uma população constante? E ao declínio da população?
(d) Em 1847, a população da Irlanda era cerca de 8 milhões, e a diferença entre as taxas relativas de natalidade e mortalidade era 1,6% da população. Por causa da fome da batata nas décadas de 1840 e 1850, cerca de 210.000 habitantes por ano emigraram da Irlanda. A população estava crescendo ou diminuindo naquela época?

20. Seja c um número positivo. A equação diferencial do tipo

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+c}$$

onde k é uma constante positiva, é chamada de uma *equação do juízo final*, porque o expoente na expressão ky^{1+c} é maior do que aquele para o crescimento natural (isto é, ky).

(a) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(0) = y_0$.
(b) Mostre que existe um tempo finito $t = T$ tal que $\lim_{t \to T^-} y(t) = \infty$.
(c) Uma raça especialmente prolífica de coelhos tem o termo de crescimento $ky^{1,01}$. Se dois desses coelhos cruzam inicialmente e a coelha tem 16 coelhos depois de três meses, quando será o juízo final?