

# Logaritmos

Antonio Carlos Brolezzi

[brolezzi@ime.usp.br](mailto:brolezzi@ime.usp.br)

O logaritmo é uma operação inversa da potenciação (ou exponenciação), mas não como a radiciação, que permite expressar a base da potência.

Logaritmos invertem a potenciação, expressando o expoente da potência.

Veja como o logaritmo se relaciona com a potenciação e a radiciação (atendidas as restrições para  $a$ ,  $b$  e  $c$  em cada caso):

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \Leftrightarrow a = \sqrt[c]{b}.$$

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Com números, temos

$$\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 3^2 = 9$$

**Logaritmo** de um número  $b$  o expoente  $a$  que outro número  $a$  deve ser elevado para obter  $b$ , sendo  $a$  e  $b$  reais positivos, e  $a$  diferente de 1.

Ou seja, se  $a^c = b$ , então  $c$  é o logaritmo de  $b$  na base  $a$  e se escreve  $\log_a b = c$ .

Logaritmo é isso:

O expoente de uma base positiva diferente de 1.

Por exemplo, para resolver a equação  $2^x=8$ , usamos logaritmos e encontramos  $x = \log_2 8 = 3$ .

Podemos encontrar logaritmos  
facilmente com cálculo mental:

$$\log_2 8 =$$

Podemos encontrar logaritmos  
facilmente com cálculo mental:

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_3 9 =$$

Podemos encontrar logaritmos  
facilmente com cálculo mental:

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_3 9 = 2$$

Podemos encontrar logaritmos  
facilmente com cálculo mental:

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_3 9 = 2$$

$$\log_5 125 =$$

Podemos encontrar logaritmos  
facilmente com cálculo mental:

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_3 9 = 2$$

$$\log_5 125 = 3$$

Podemos encontrar logaritmos  
facilmente com cálculo mental:

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_3 9 = 2$$

$$\log_5 125 = 3$$

$$\log 100 =$$

Podemos encontrar logaritmos  
facilmente com cálculo mental:

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_3 9 = 2$$

$$\log_5 125 = 3$$

$$\log 100 = 2$$

Podemos encontrar logaritmos  
facilmente com cálculo mental:

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_3 9 = 2$$

$$\log_5 125 = 3$$

$$\log 100 = 2$$

$$\log 0,1 =$$

Podemos encontrar logaritmos facilmente com cálculo mental:

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_3 9 = 2$$

$$\log_5 125 = 3$$

$$\log 100 = 2$$

$$\log 0,1 = -1$$

Podemos encontrar logaritmos facilmente com cálculo mental:

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_3 9 = 2$$

$$\log_5 125 = 3$$

$$\log 100 = 2$$

$$\log 0,1 = -1$$

$$\log_{\sqrt[4]{7}} 49 =$$

Podemos encontrar logaritmos facilmente com cálculo mental:

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_3 9 = 2$$

$$\log_5 125 = 3$$

$$\log 100 = 2$$

$$\log 0,1 = -1$$

$$\log_{\sqrt[4]{7}} 49 = 8$$

Logaritmo é isso.

Mas ele não nasceu assim, com  
essa finalidade.

Em matemática, é comum que conceitos e ideias criadas para determinados fins acabem servindo a outras aplicações muito diferentes das originais, às vezes séculos ou milênios depois da invenção de uma noção.

A história dos logaritmos é bastante significativa para mostrar essa característica da matemática, de que ideias criadas para resolver problemas em um contexto podem ser utilizadas para resolver problemas em outros contextos.

Os logaritmos surgiram há 500 anos em um contexto bem diferente de hoje em dia.

A ideia surgiu a partir da observação de padrões.

0 1 2 3 4 5 6 ...

Que padrão você percebe?

As progressões aritméticas são aquelas em que cada termo é obtido do anterior por meio da operação de adição.

0 1 2 3 4 5 6 ...

-5 -3 -1 1 3 5 7 ...

1 2 4 8 16 ...

Que padrão você percebe?

As progressões geométricas são aquelas em que cada termo é obtido do anterior por meio da operação de multiplicação.

1  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{4}$   $\frac{1}{8}$   $\frac{1}{16}$  ...

O que as PAs tem a ver com as PGs?

E onde os logaritmos entram nessa história?

Vamos lembrar a relação entre multiplicações e adições.

Na potenciação, existe uma propriedade fundamental:

Na multiplicação de potências de mesma base, conservam-se as bases e somam-se os expoentes.

Ou seja, para qualquer  $a$ ,  $m$  e  $n$  reais, temos:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

As operações de adição e multiplicação estão interligadas nessa propriedade da operação de potenciação.

Foi observando uma PA e uma PG, escritas termo a termo uma acima da outra, que Michael Stifel (1487—1567) percebeu um padrão.



Monge agostiniano, ordenado sacerdote aos 24 anos de idade, Stifel foi espulso aos 35 anos e tornou-se pastor luterano e estudioso da matemática.

Primo subtraho 10 de 8, & non inuenio numerum aliquem supra 0, id est, supra nihil, quem ponere possim iusta subtractionis lege. Nam si ille à quo debet fieri subtractio, esset maior eo qui subtrahitur ( ut si loco numeri 8 poneretur numerus 12 ) tum tandem haberem numerum ponendum uerum. Sic si ille numerus à quo fieri debet subtractio, esset æqualis ei qui subtrahitur ( ut si loco 8 poneretur 10 ) tunc relinqueretur 0, id est, nihil, ( quod mediatur inter numeros ueros & numeros absurdos ) iam uero cum numerus subtrahendus maior sit eo à quo fit subtractio, restat ut numerus infra 0, id est, infra nihil, ponatur uidelicet  $0 - 2$ . Sic simili ratione postea subtraho  $0 - 5$  de  $0 - 1$ , & inuenio  $0 + 4$ , id est, numerum supra nihil, seu numerum uerum.

Sic Cossa solet, pro immensa copia sua, res uti quæ sunt, & res quæ finguntur esse. Nam sicut supra unitatem ponuntur numeri integri, & infra unitatem finguntur minutæ unitatis, & sicut supra unam ponuntur integra, & infra unum ponuntur minuta seu fracta: sic supra 0 ponitur unitas cum numeris, & infra 0 fingitur unitas cum numeris. Id quod pulchre reperiri uidetur in progressionem numerorum naturali, dum serua progressionem.

Sed ostendenda est ista speculatio per exemplum.

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Possent hic fere nouus liber integer scribi de mirabilibus numerorum, sed oportet ut me hic subducã, & clausis oculis abeã. Repetam uero unum ex superioribus, ne frustra dicar fuisse in campo isto. Sed sententiã inuersã repetam quod mihi repetenda uidetur.

¶ Quæcumque facit progressio Geometrica multiplicando & diuidendo, talia facit progressio Arithmetica addendo & subtrahendo.

Exemplum.

Sicut  $\frac{1}{2}$  multiplicata in 64, facit 32. Sic  $-3$  additam ad 6, fa-

Comparação entre PA e da PG no livro *Aritmética Integra*, de Stifel (1544).

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Comparação entre PA e  
da PG no livro  
*Aritmética Integra*, de  
Stifel (1544).

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Stifel observou que somas na PA correspondem a produtos na PG.

Vamos vivenciar o que Stifel observou, encontrando na tabela as posições na PG correspondente a operação de multiplicação abaixo:

$$\frac{1}{8} \text{ vezes } 64$$

Os números  $\frac{1}{8}$  e 64 na PG correspondem aos números -3 com 6 na PA.

É fácil fazer a soma  $-3 + 6 = 3$ .

Esse resultado na PA corresponde ao resultado da multiplicação de  $\frac{1}{8}$  por 64 na PG.

Logo, localizando 3 na PA, encontramos o resultado da multiplicação na posição da PG correspondente, isto é, 8.

A explicação disso vem do fato de que

$$\left(\frac{1}{8}\right) = 2^{-3} \text{ e } 64=2^6.$$

Logo, temos

$$\frac{1}{8} \cdot 64 = 2^{-3} \cdot 2^6 = 2^{-3+6} = 2^3 = 8$$

É, em geral, mais fácil fazer a adição dos expoentes, do que fazer a multiplicação das potências de mesma base.

Vamos usar esse método genial?

4 vezes 8

64 dividido por 4

16 dividido por  $\frac{1}{2}$



# PA e PG de Stifel

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
0,0625	0,125	0,250	0,5	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	

**Responda usando a tabela e fazendo apenas subtrações ou adições:**

$$32768 \div 1024$$

$$0,125 \times 512$$

$$32 \times 256$$

$$8192 \div 0,250$$

Stifel percebeu que uma adição na PA corresponde a um produto na PG, e que uma subtração na PA corresponde a uma divisão na PG.

Stifel não tinha um símbolo ou um nome para logaritmos, mas a ideia estava ali presente.

Pois com logaritmos, transformam *maravilhosamente* produtos em somas, divisões em subtrações.

Usando a notação moderna de logaritmos, temos:

$$\log_b ac = \log_b a + \log_b c$$

e

$$\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c.$$

Assim, ao fazermos  $0,125 \times 512$  com a tabela, podemos encontrar a solução sem multiplicar usando a propriedade  $\log_b ac = \log_b a + \log_b c$ :

$$\log_2 0,125 \cdot 512 = \log_2 0,125 + \log_2 512 = -3 + 9 = 6$$

Assim, descobrimos que  $\log_2 0,125 \cdot 512 = 6$ .

Portanto,  $0,125 \cdot 512 = 2^6 = 64$ .



Para números grandes, transformar uma multiplicação em uma adição é algo muito valioso, na época em que não havia máquinas de calcular.

70 anos depois, a ideia original de Stifel foi colocada em termos práticos auxiliando em cálculo de números muito grandes pelo barão escocês John Napier (1550-1617), teólogo e astrônomo, que publicou em 1614, o livro *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descrição Maravilhosa da Regra dos Logaritmos).



Napier é o criador da palavra logaritmos que significa “números da razão”. Isso porque, em uma PG, a razão entre um termo e o sucessor é sempre a mesma (a razão da PG).

Napier usou PAs e PGs de razão muito pequena, da ordem de  $1-10^{-7}$ , ou seja, 0,99999999. E elaborou páginas e páginas com os termos de suas progressões.

Foram 20 anos de trabalho e ele escreveu cerca de 10 milhões de números.



Um suíço, construtor de relógios,  
**Jost Bürgi (1552-1632)**  
publicou também em 1620 suas  
tábuas de logaritmos, sem  
chamá-los assim. Ele usou  
progressões com razão  $1+10^{-4}$ ,  
isto é, 1,0001.

Aparentemente, nem ele nem  
Napier sabiam da existência um  
do outro.





Jobst Bürgi: Relógio de cristal de rocha, 1622/23

O astrônomo e matemático inglês Henry Briggs (1561–1630), em sua obra *Arithmetica Logarithmica*, de 1624, teve uma ideia prática interessante.



Briggs sugeriu uma simplificação importante no trabalho de Napier, que foi aceita por ele. Assim, foi introduzido o logaritmo muito usado hoje em dia, que é aquele que tem base 10. Logaritmos com base 10 são chamados logaritmos comuns ou decimais e não precisam ter a base explícita. Quando você encontrar um logaritmo escrito simplesmente assim  $\log 2$ , já sabe que ele é um logaritmo na base 10.

A partir daí, não era mais necessário produzir tábuas de PA e PG, mas sim tábuas de logaritmos para bases específicas.

# Tabua de logaritmos de 1 a 60 na base 10 de Briggs, 1626

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1	00000000	16	12041199 263289	31	14913616 137882	46	16627578 93400
2	03010299 1760912	17	12304489 248235	32	15051499 133639	47	16720978 91433
3	04771212 1249387	18	12552725 234810	33	15185139 129649	48	16812412 89548
4	06020599 969100	19	12787536 222763	34	15314789 125891	49	16901960 87739
5	06989700 791812	20	13010299 211892	35	15440680 122344	50	16989700 86001
6	07781512 669467	21	13222192 202033	36	15563025 118992	51	17075701 84331
7	08450980 579919	22	13424226 193051	37	15682017 115818	52	17160033 82725
8	09030899 511525	23	13617278 184834	38	15797835 112810	53	17242758 81178
9	09542425 457574	24	13802112 177287	39	15910646 109953	54	17323937 79689
10	10000000 413926	25	13979400 170333	40	16020599 107238	55	17403626 78253
11	10413926 377885	26	14149733 163904	41	16127838 104654	56	17481880 76868
12	10791812 347621	27	14313637 157942	42	16232492 102191	57	17558748 75531
13	11139433 321846	28	14471580 152399	43	16334684 99842	58	17634279 74240
14	11461280 299632	29	14623979 147232	44	16434526 97598	59	17708520 72992
15	11760912 280287	30	14771212 142404	45	16532125 95453	60	17781512 71785

A ij

# Confira na tabela as propriedades

$$\log ac = \log a + \log c \text{ e } \log \frac{a}{c} = \log a - \log c.$$

b	log(b)
1	0
2	0,301029996
3	0,477121255
4	0,602059991
5	0,698970004
6	0,77815125
7	0,84509804
8	0,903089987
9	0,954242509
10	1
11	1,041392685
12	1,079181246
13	1,113943352
14	1,146128036
15	1,176091259
16	1,204119983

# Confira na tabela a propriedade

$$\log ac = \log a + \log c$$

<b>b</b>	<b>log(b)</b>		
1	0		
2	0,301029996		0,477121255
3	0,477121255	3x4=12	0,602059991 +
4	0,602059991		1,079181246
5	0,698970004		
6	0,77815125		
7	0,84509804		
8	0,903089987		
9	0,954242509	log(3x4)=log3+log4	
10	1		
11	1,041392685		
12	1,079181246		
13	1,113943352		
14	1,146128036		

# Confira na tabela a propriedade

$$\log \frac{a}{c} = \log a - \log c$$

<b>b</b>	<b>log(b)</b>		
1	0		
2	0,301029996		1,146128036
3	0,477121255	14/7=2	0,84509804 -
4	0,602059991		0,301029996
5	0,698970004		
6	0,77815125		
7	0,84509804		
8	0,903089987		
9	0,954242509		
10	1		
11	1,041392685		
12	1,079181246	log(14/7)=log14+log7	
13	1,113943352		
14	1,146128036		

# Confira na tabela a propriedade

$$\log a^y = y \cdot \log a$$

<b>b</b>	<b>log(b)</b>			
1	0			
2	0,301029996			0,301029996
3	0,477121255	$2^3=8$		$3 \times$
4	0,602059991			0,903089987
5	0,698970004			
6	0,77815125			
7	0,84509804			
8	0,903089987			
9	0,954242509			
10	1			
11	1,041392685			
12	1,079181246	$\log(2^3)=3\log 2$		
13	1,113943352			
14	1,146128036			

As propriedades dos logaritmos permitem sua utilização ampla como forma de facilitar as operações.

$$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b \rightarrow a \neq 1 \rightarrow b > 0$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a b = \log_a c \rightarrow b = c$$

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

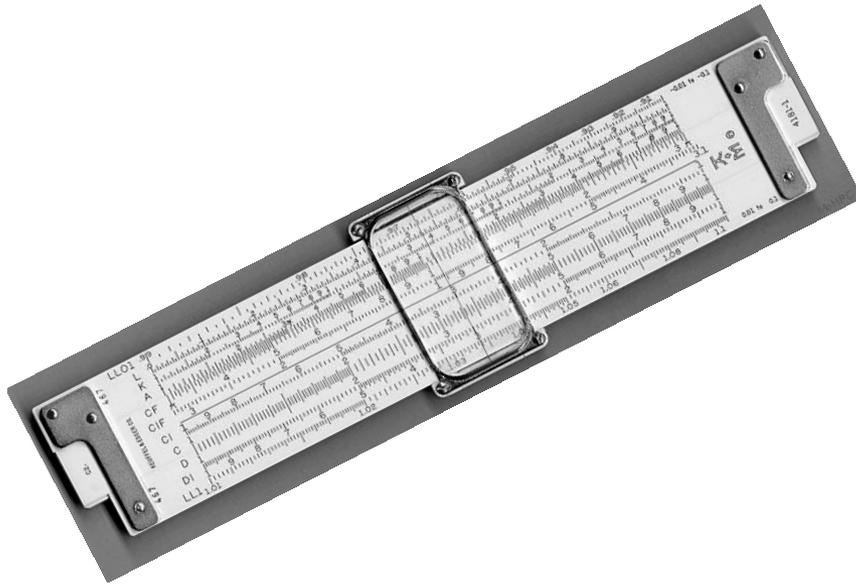
$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

Por 400 anos, as tábuas de logaritmos foram aperfeiçoadas por muitos outros astrônomos e matemáticos. Réguas de cálculo também foram criadas, baseadas nas relações entre operações viabilizadas pelo uso dos logaritmos.



Quando surgiram as calculadoras eletrônicas portáteis, na década de 1970, o uso de logaritmos para simplificar cálculos não fez mais sentido.



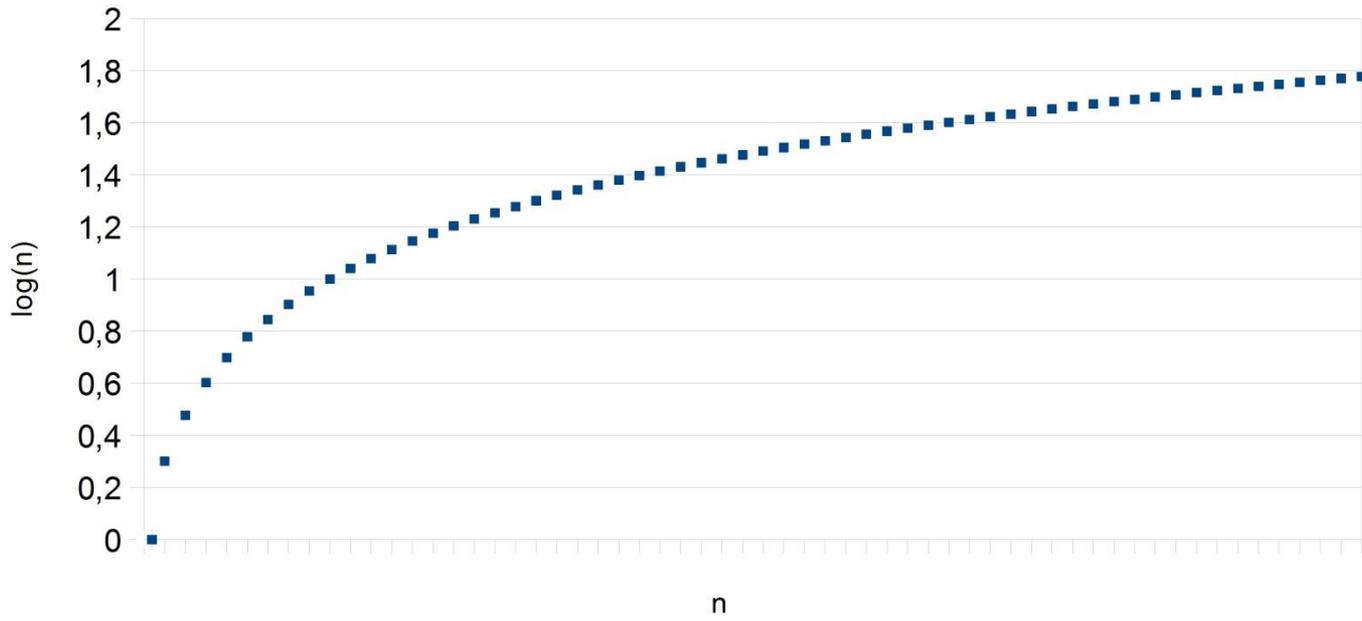
O desenvolvimento científico e tecnológico, entretanto, deu aos logaritmos outras funções sequer imaginadas pelos seus criadores. Muitas dessas aplicações dos logaritmos supõem o conhecimento da função logarítmica.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1	00000000	16	12041199 263289	31	14913616 137882	46	16627578 93400
2	03010299 1760912	17	12304489 248235	32	15051499 133639	47	16720978 91433
3	04771212 1249387	18	12552725 234810	33	15185139 129649	48	16812412 89548
4	06020599 969100	19	12787536 222763	34	15314789 125891	49	16901960 87739
5	06989700 791812	20	13010299 211892	35	15440680 122344	50	16989700 86001
6	07781512 669467	21	13222192 202033	36	15563025 118992	51	17075701 84331
7	08450980 579919	22	13424226 193051	37	15682017 115818	52	17160033 82725
8	09030899 511525	23	13617278 184814	38	15797835 112810	53	17242758 81178
9	09542425 457574	24	13802112 177287	39	15910646 109953	54	17323937 79689
10	10000000 413926	25	13979400 170333	40	16020599 107238	55	17403626 78253
11	10413926 377885	26	14149733 163904	41	16127838 104654	56	17481880 76868
12	10791812 347621	27	14313637 157942	42	16232492 102191	57	17558748 75531
13	11139433 321846	28	14471580 152399	43	16334684 99842	58	17634279 74240
14	11461280 299632	29	14623979 147232	44	16434526 97598	59	17708520 72992
15	11760912 280287	30	14771212 142404	45	16532125 95453	60	17781512 71785

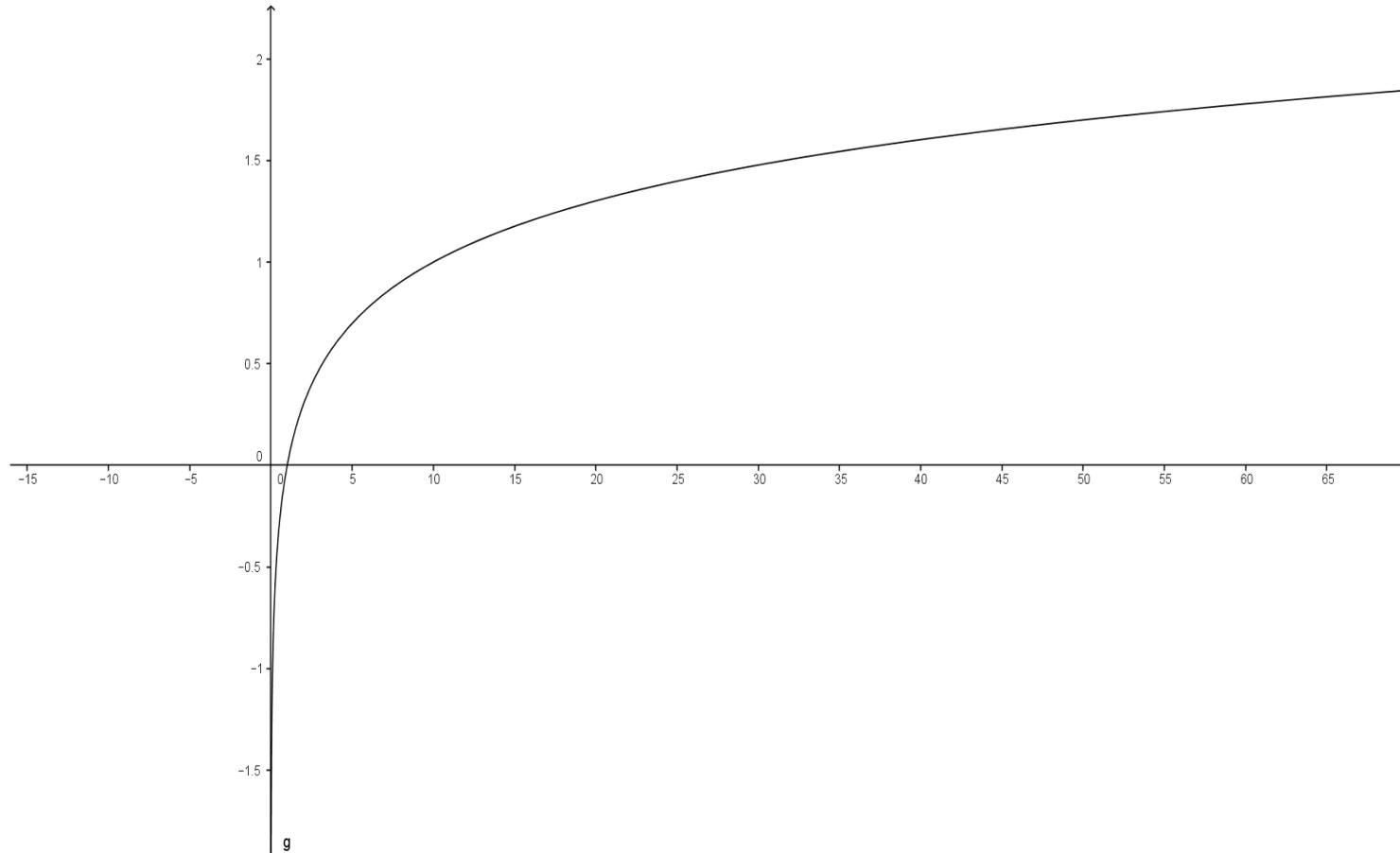
A ij

O desenvolvimento científico e tecnológico, entretanto, deu aos logaritmos outras funções sequer imaginadas pelos seus criadores. Muitas dessas aplicações dos logaritmos supõem o conhecimento da função logarítmica.

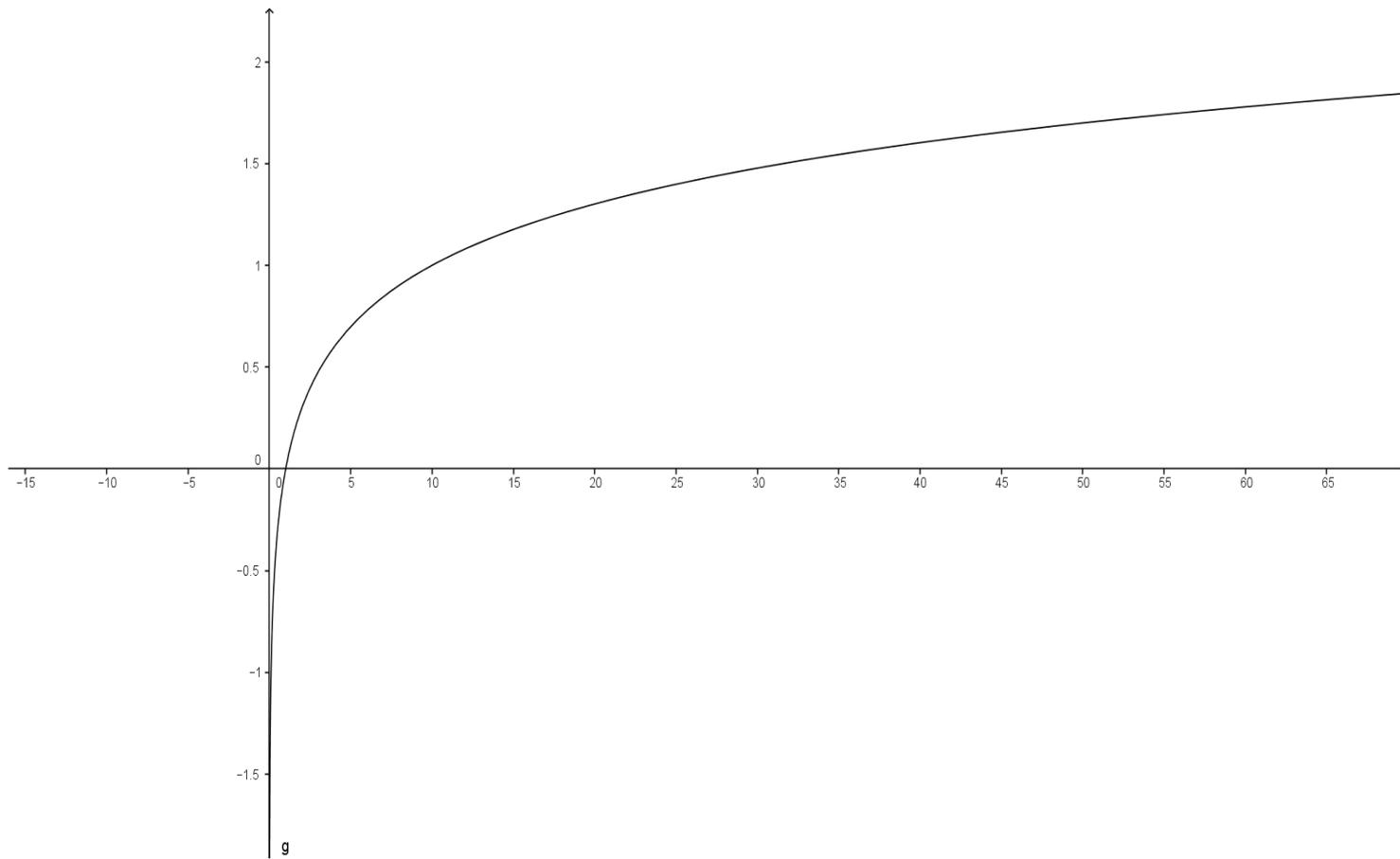
Tábua de Logaritmos Decimais de 1 a 60



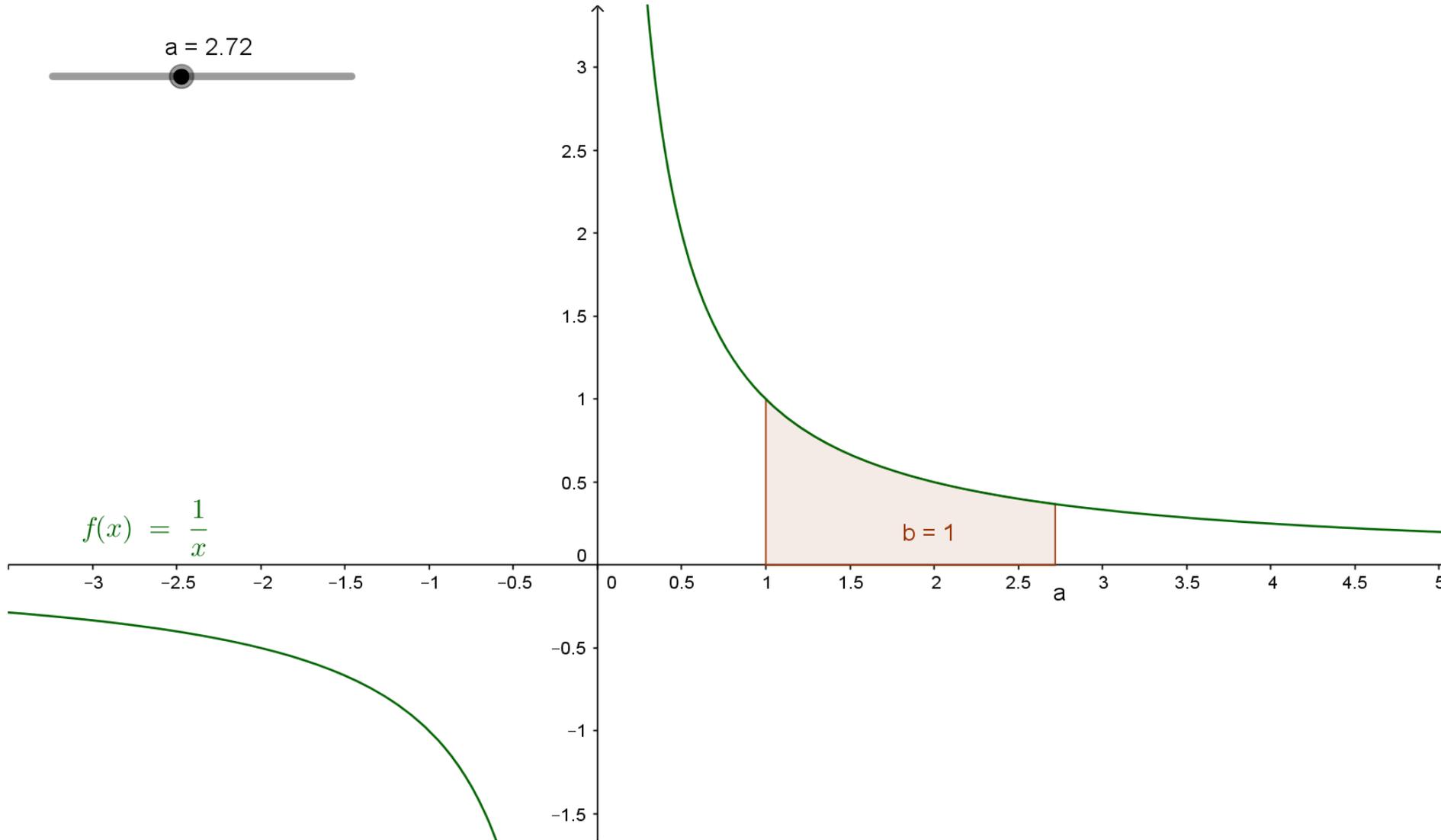
A função  $y=\log(x)$  é definida para  $x$  real positivo.



# Como foi criada a função logarítmica?



A função logarítmica foi definida como a medida da área sob o gráfico de uma função chamada hipérbole.

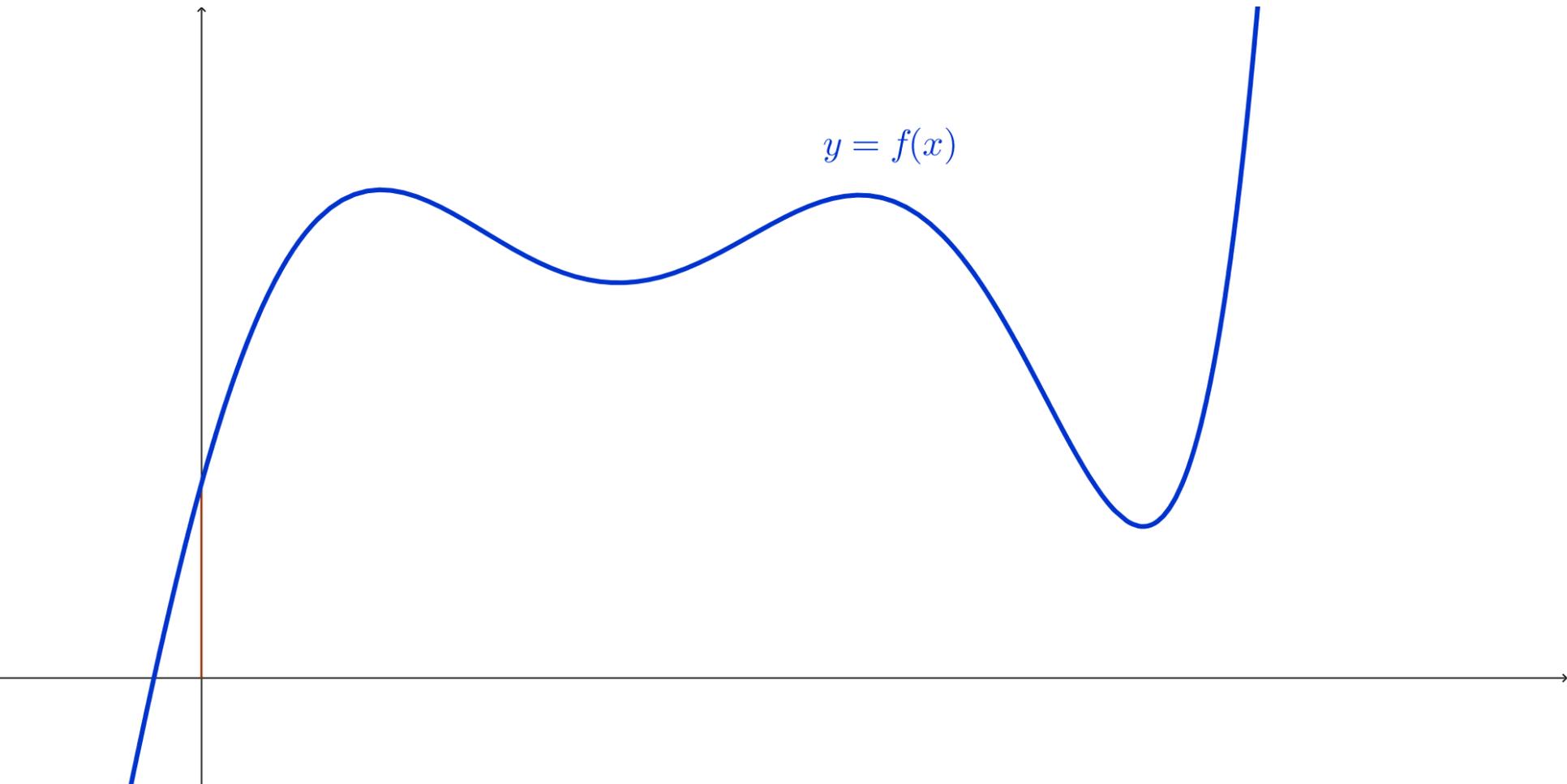


Área sob o gráfico de uma função?

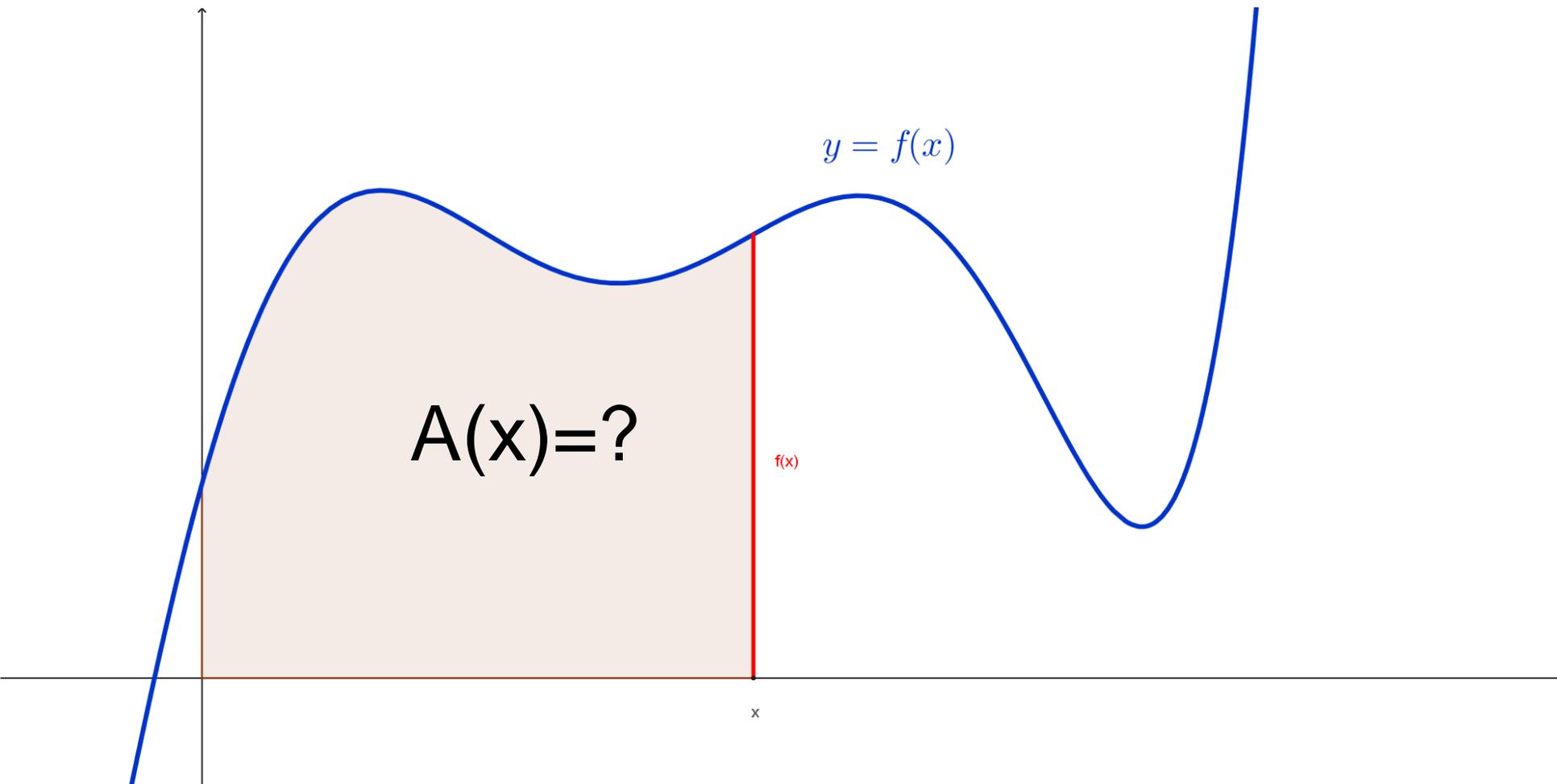
Mas isso não é uma integral?



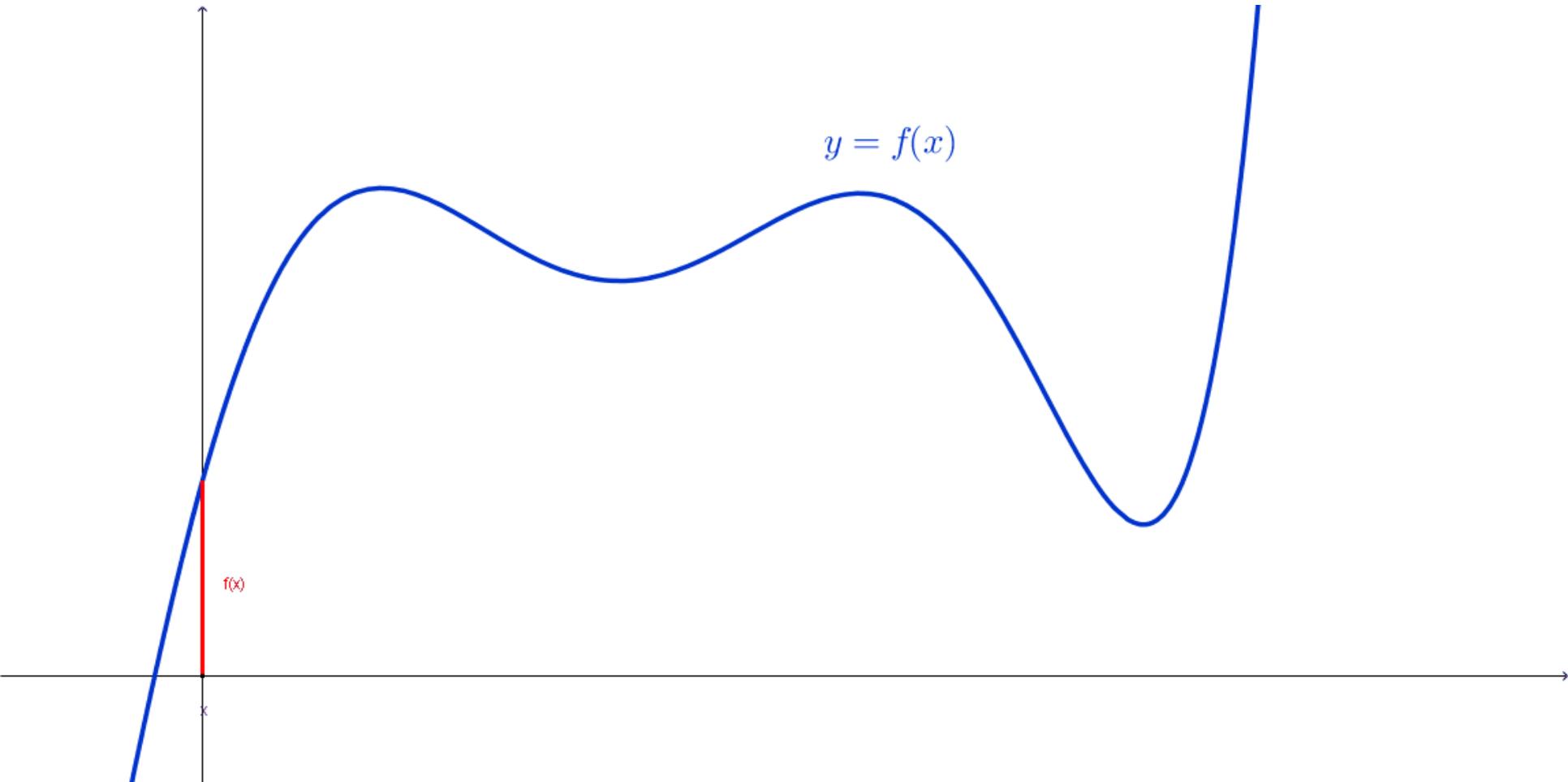
Como varia a área definida sob o gráfico de uma função?



Como varia a área de definida sob o gráfico de uma função?



A variação instantânea da área  $A(x)$  é  
 $A'(x)=f(x)$ .



Por volta de 1640, Pierre de Fermat (1601-1665) estabeleceu que a área sob a curva  $y = x^n$ , entre  $x = 0$  e  $x = a$ , é dada por

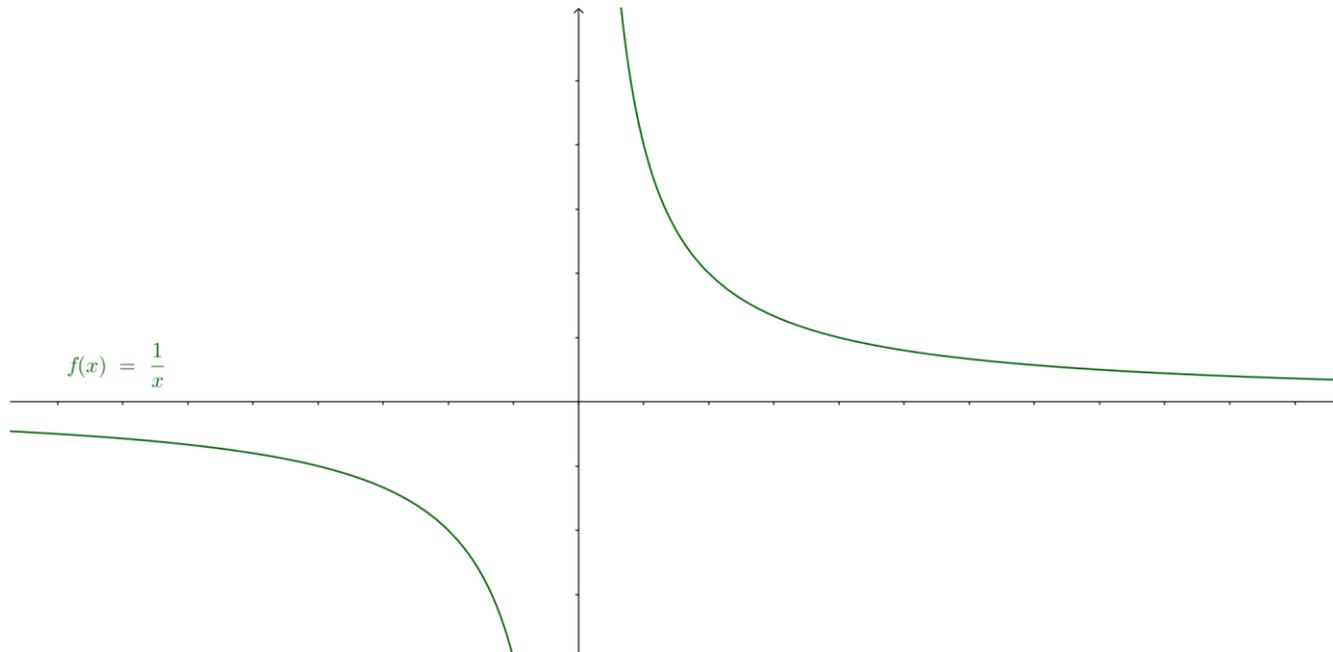
$$A = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Ou seja, se  $y = x^2$ , então a função  $y = \frac{x^3}{3}$  fornece a área sob a curva entre 0 e  $x$ .



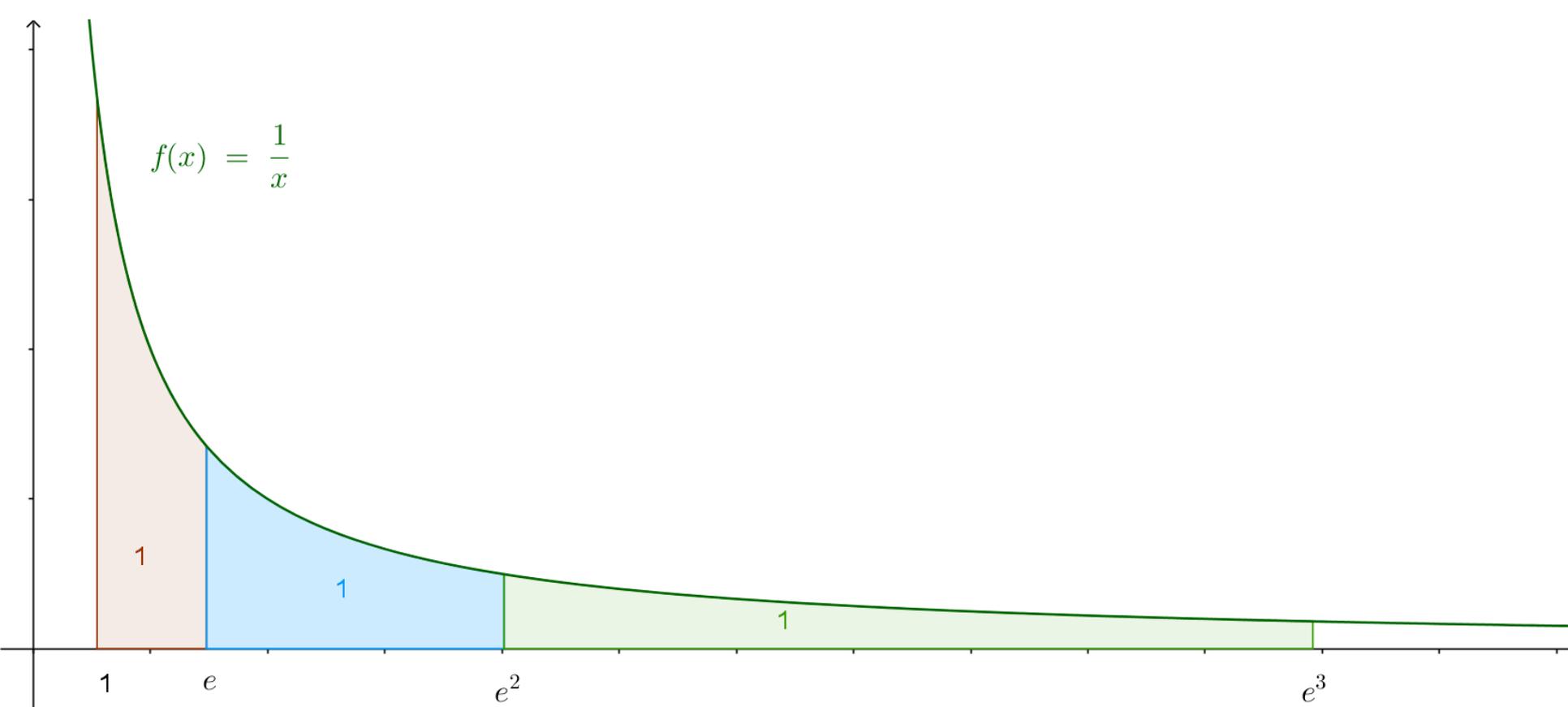
Mas, e se  $n = - 1$ ?

A curva  $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ , tem como gráfico uma hipérbole. Se fizermos  $A = \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{a^0}{0}$  temos uma indeterminação.

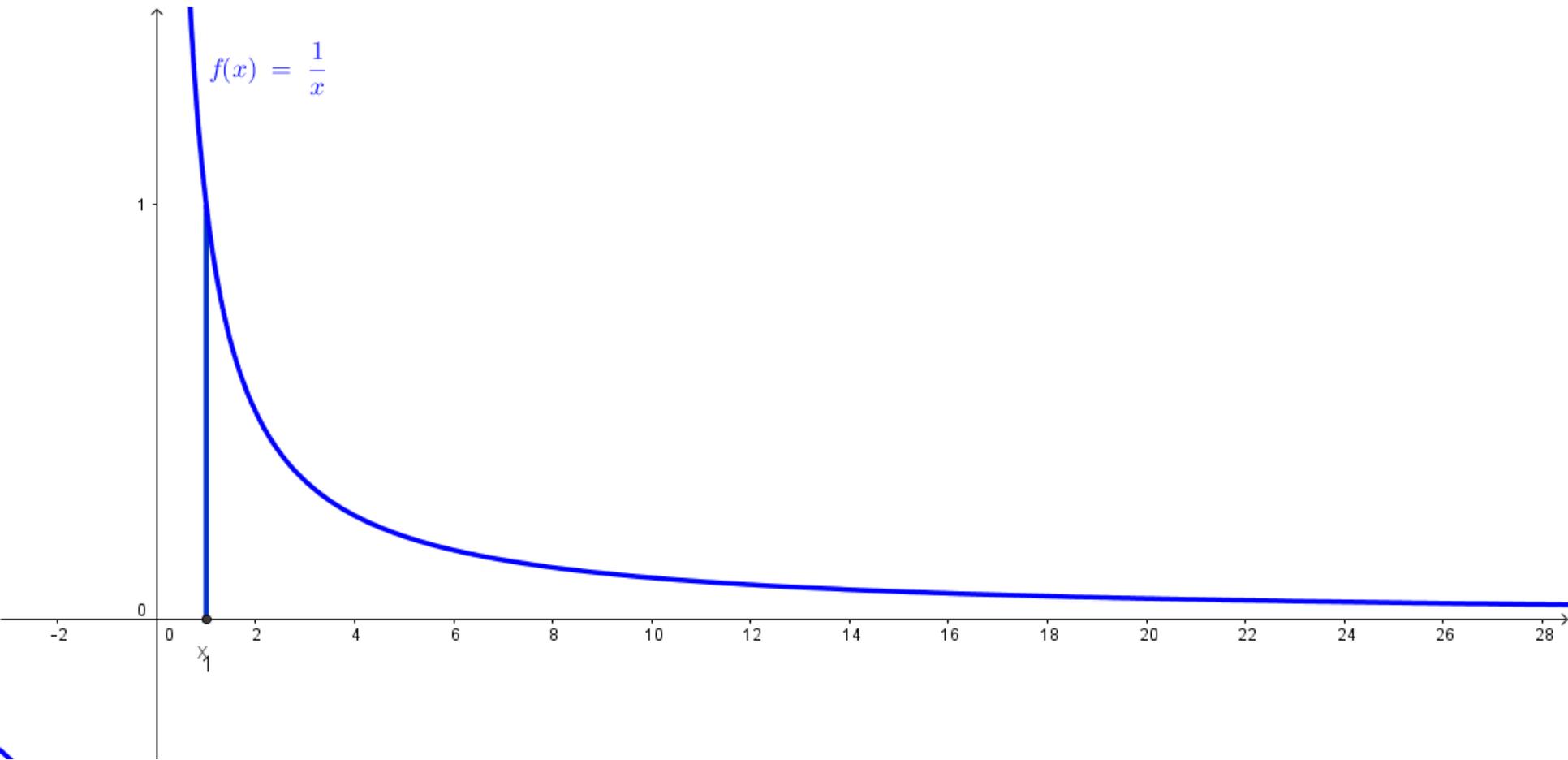


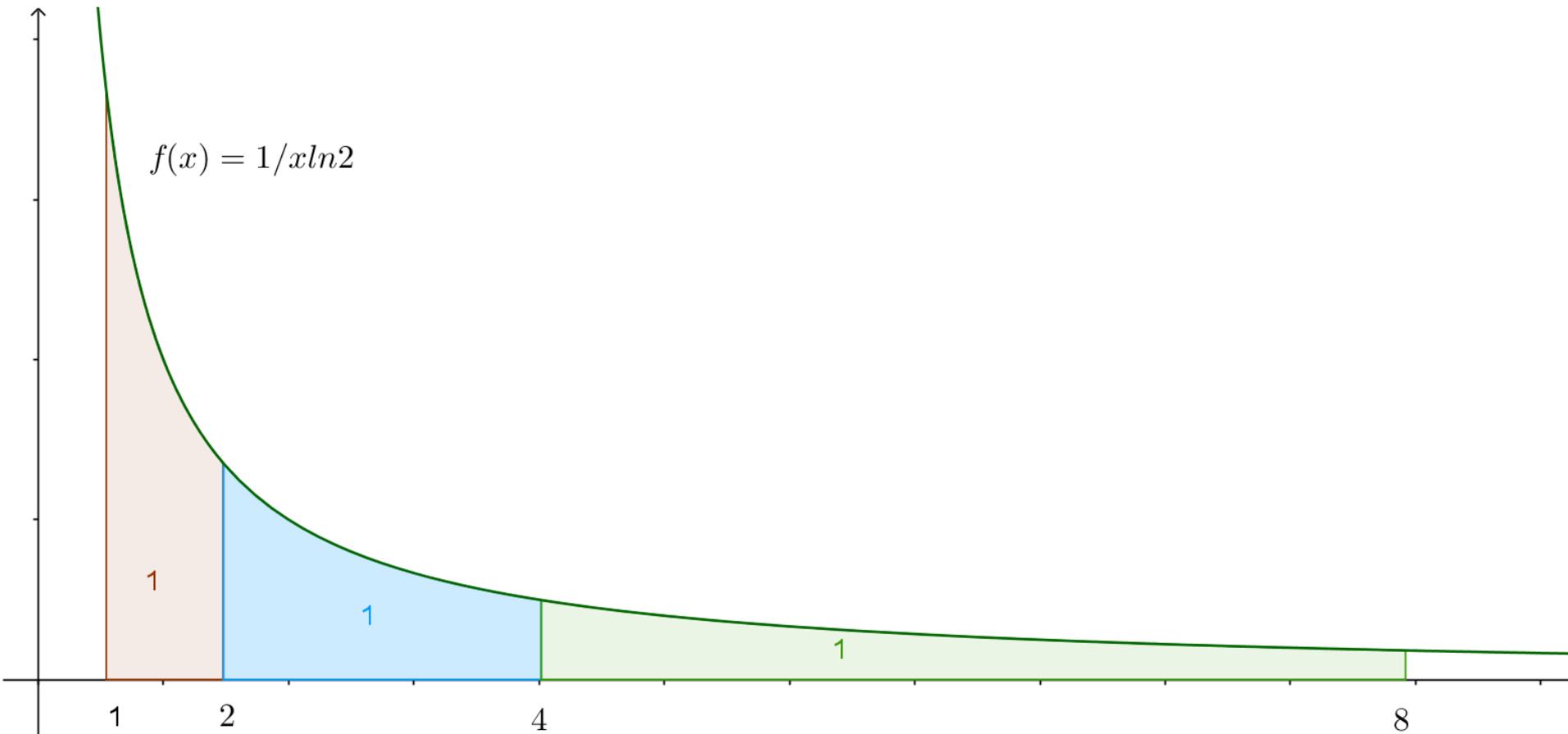
Em 1647, o jesuíta belga  
Gregorius de Saint  
Vicent (1584-1667),  
notou que áreas  
correspondentes a  
abscissas que formam  
uma PG, formam uma  
PA.



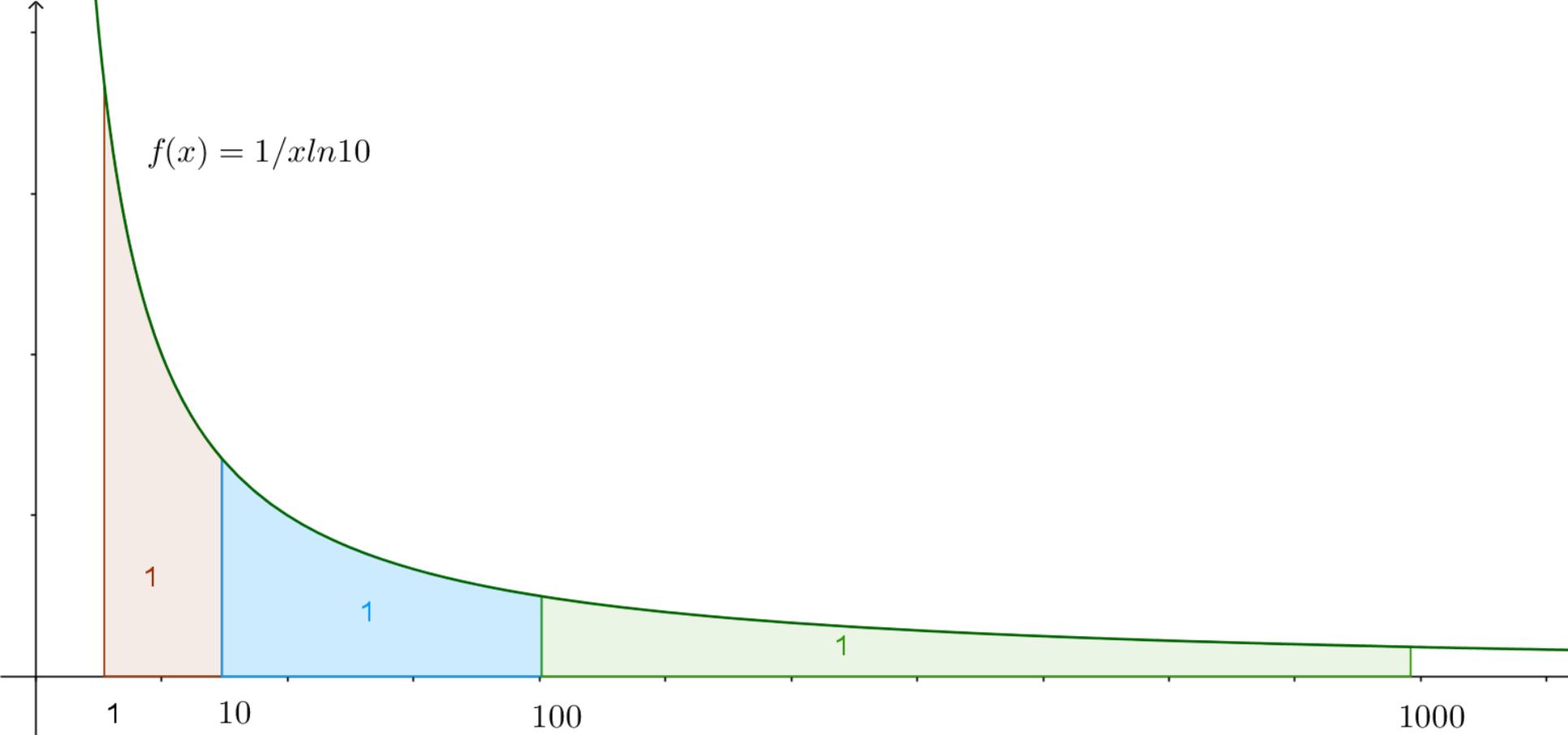


(gráfico fora de escala)





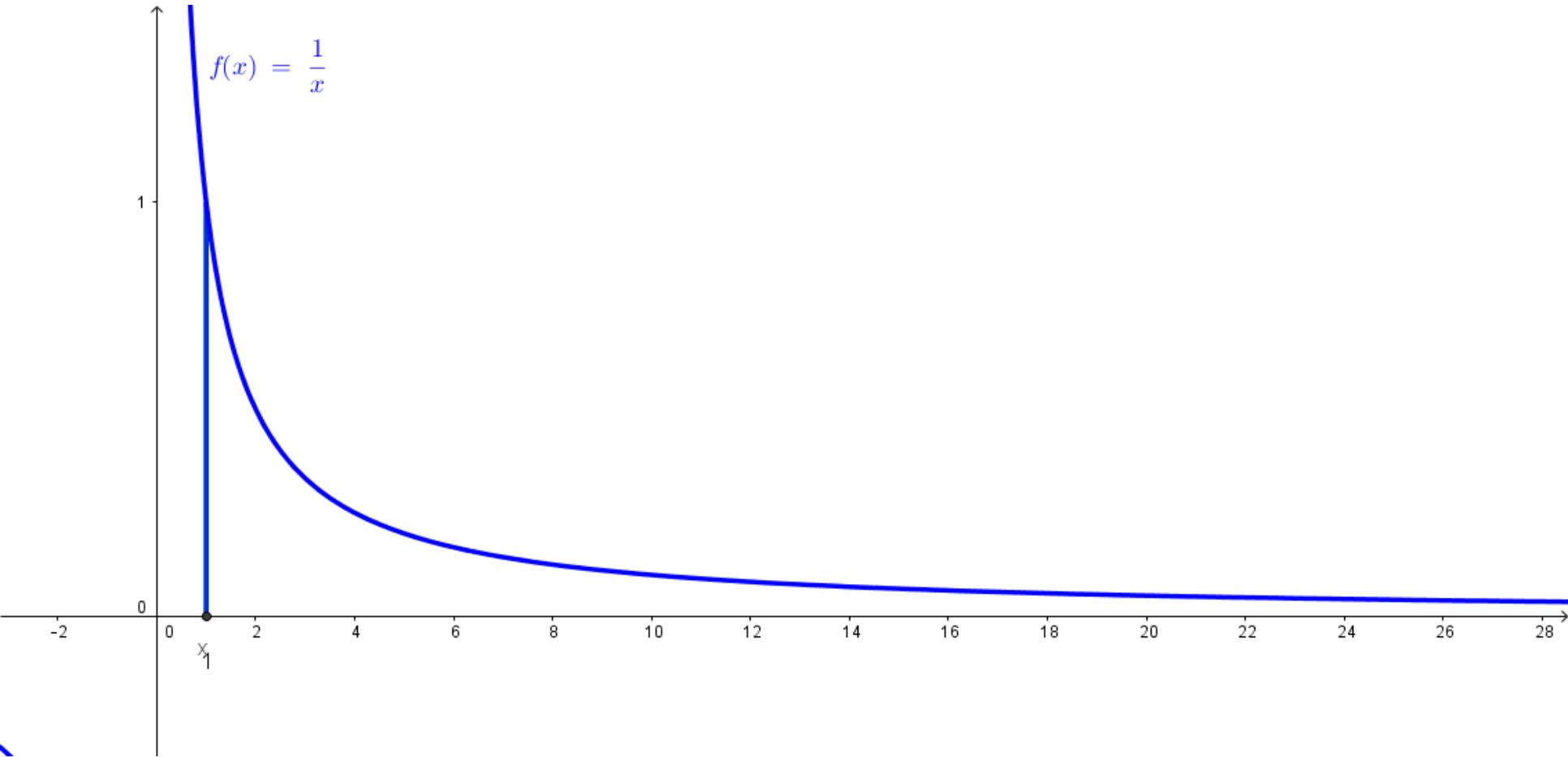
(gráfico fora de escala)



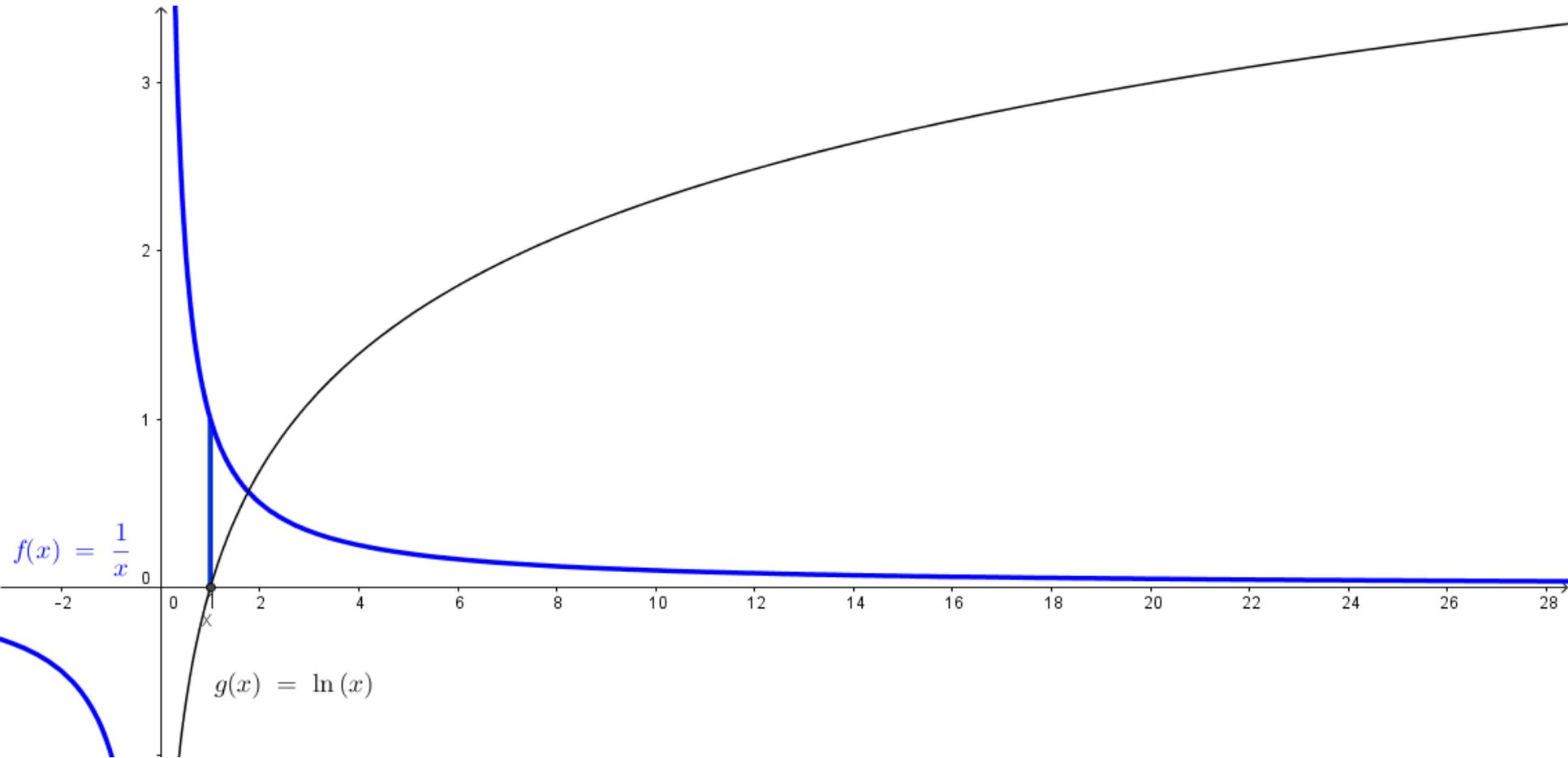
(gráfico fora de escala)

Quem percebeu que havia logaritmos nessa história foi o aluno de Saint Vicent, chamado Alphonse Antonio de Sarasa (1618-1667).

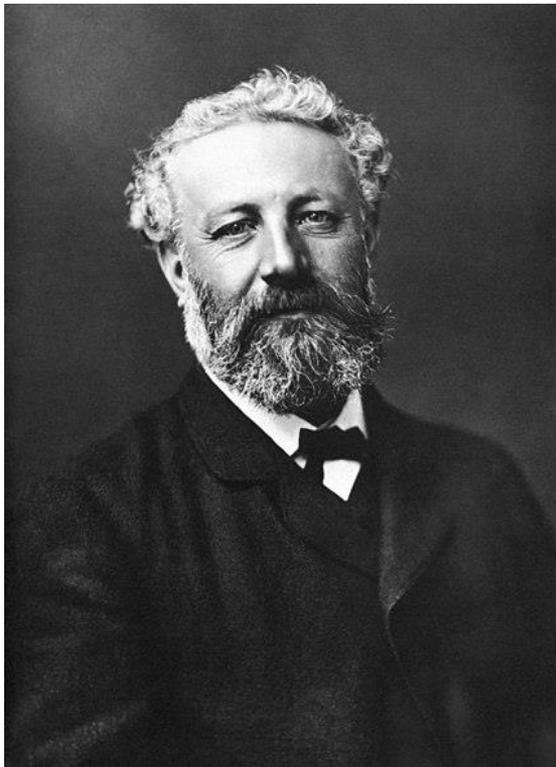
Que função expressa a área sob  $f(x)=1/x$ ,  
de 1 a  $x$ ?



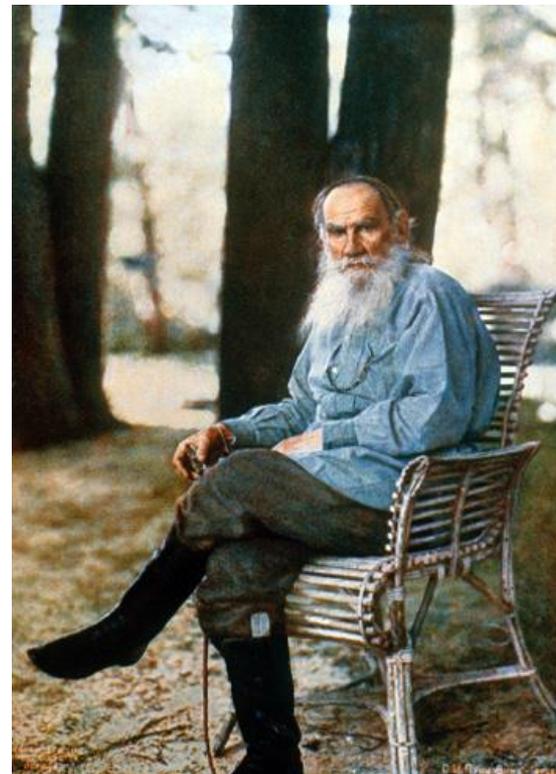
A função área é  $A(x)=\ln x$  (logaritmo natural, base  $e$ )



$e \cong 2,7\ 1828\ 1828\ 4590\ 4523$



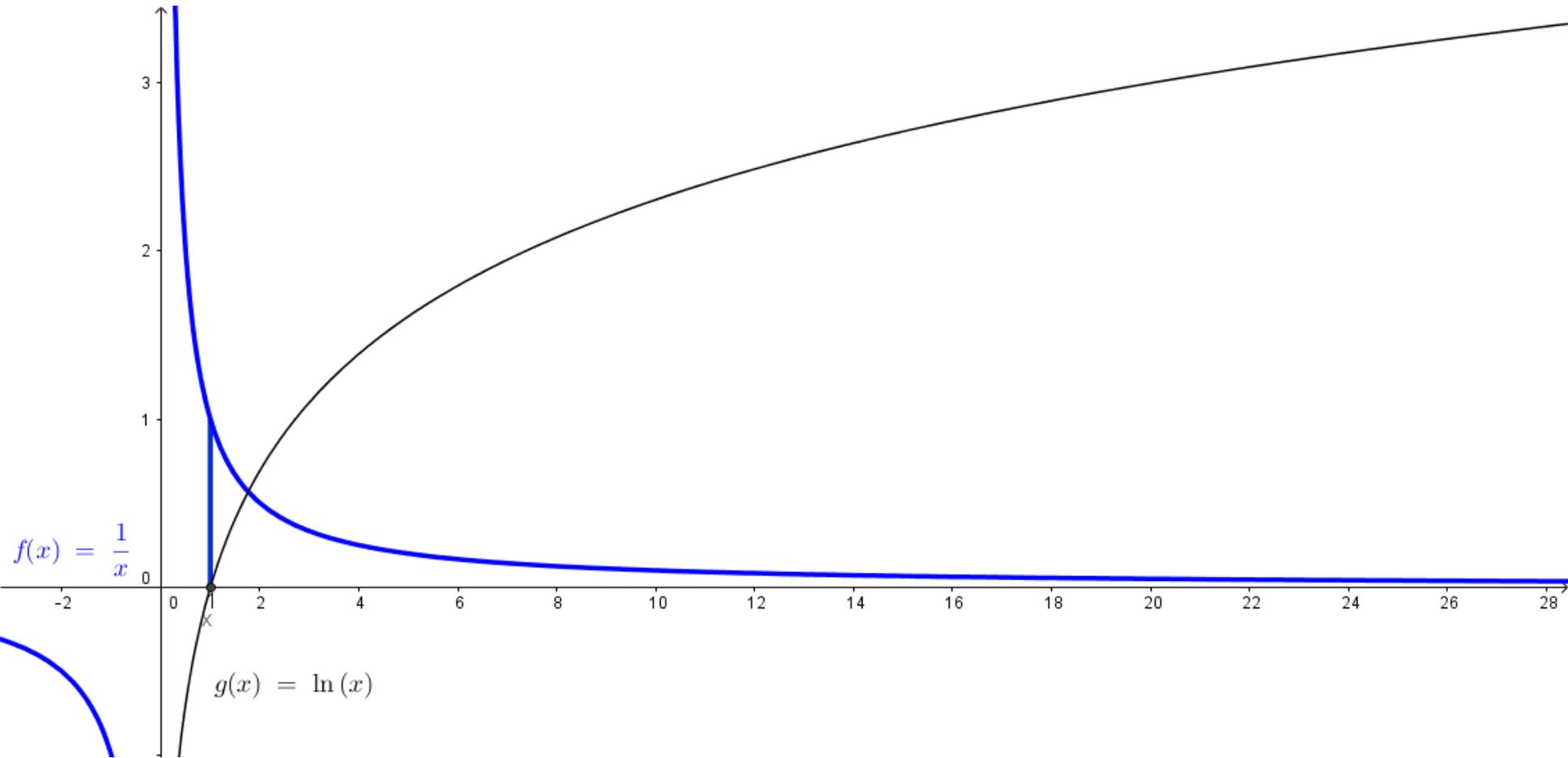
Júlio Verne (1828-1905)



León Tolstoi (1828-1910)

$e \cong 2,7$  1828 1828 4590 4523

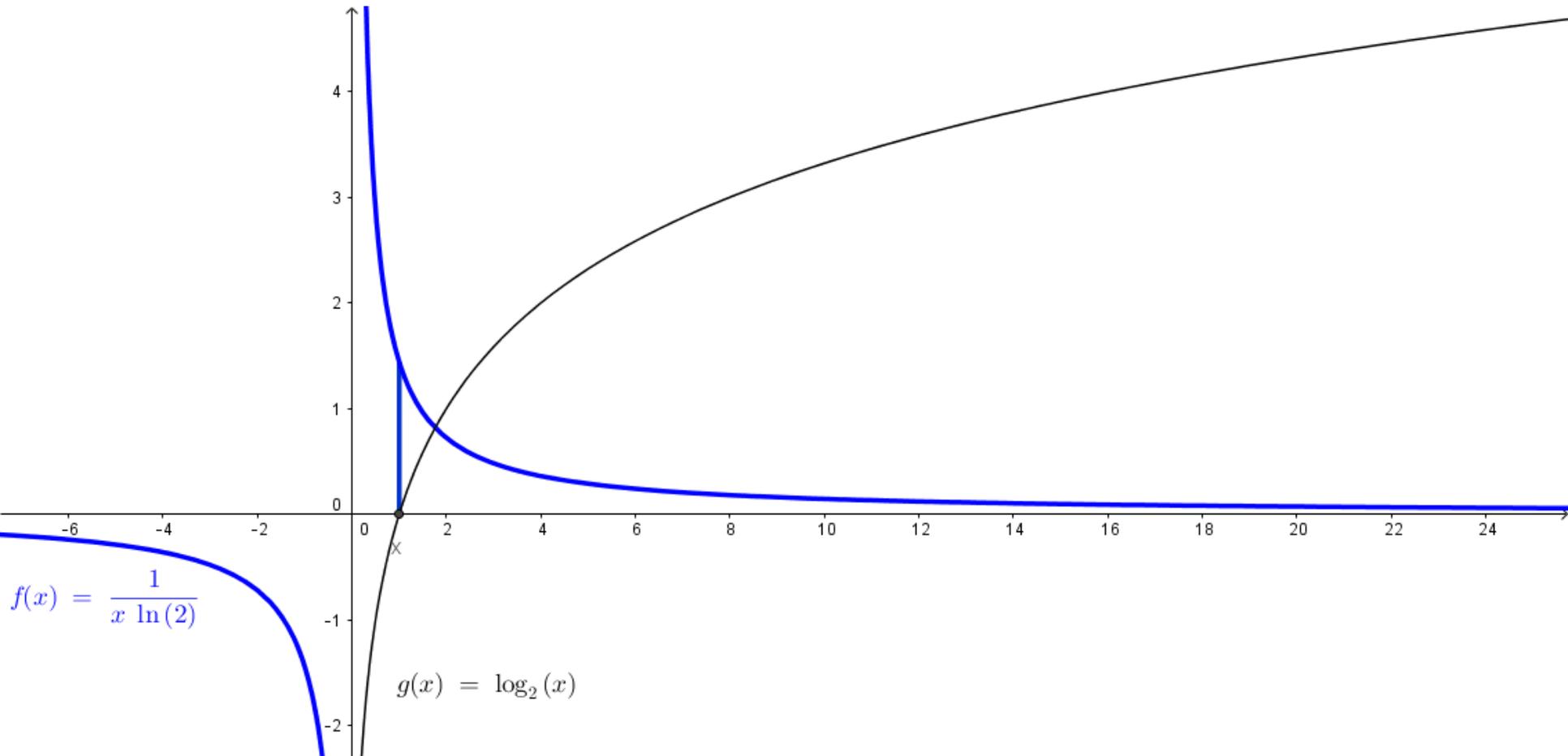
A função área é  $A(x)=\ln x$  (logaritmo natural, base e)



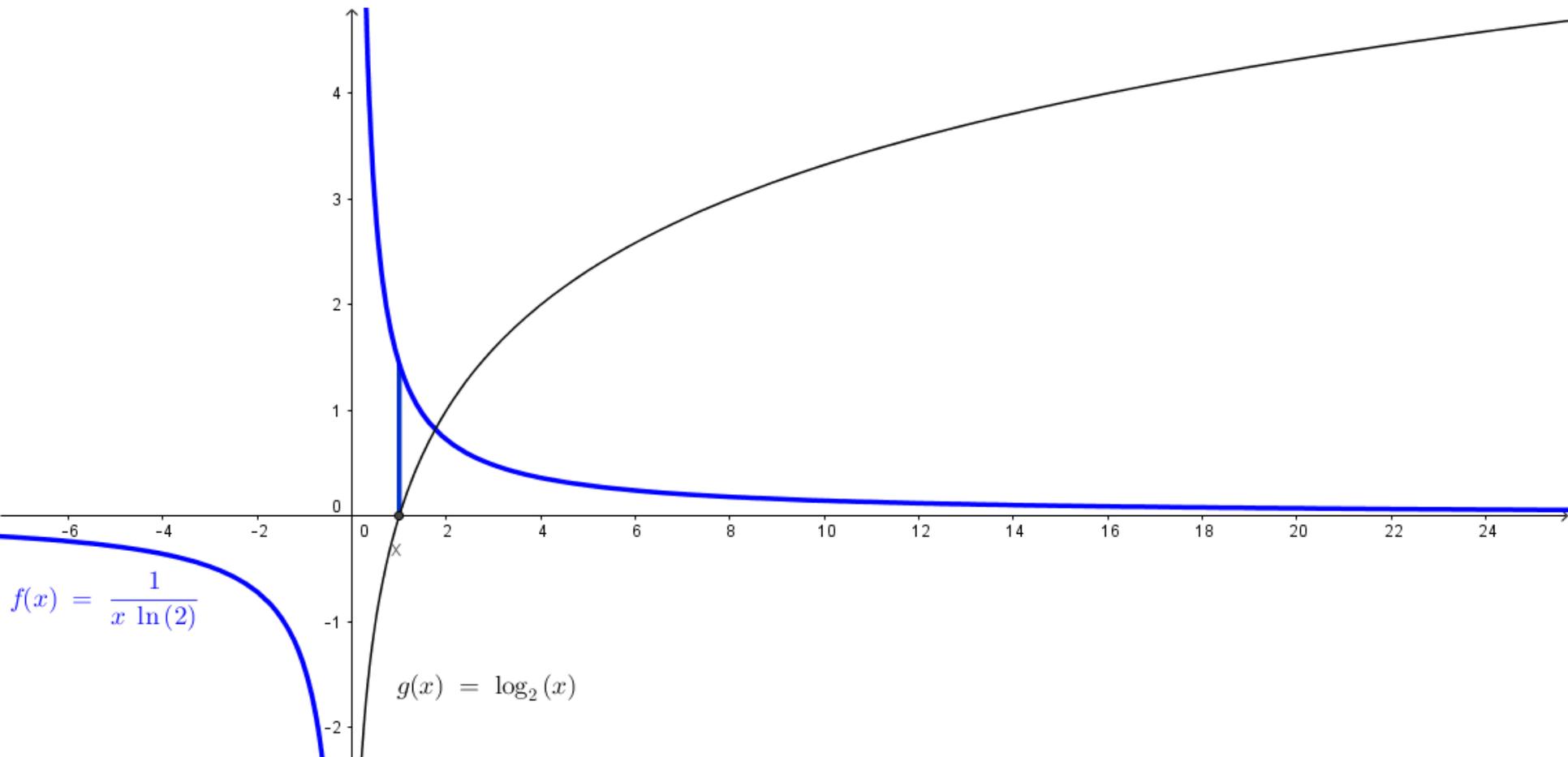
$e \cong 2,7\ 1828\ 1828\ 4590\ 4523$

Que função expressa a área sob

$$f(x) = \frac{1}{x \ln 2}, \text{ de } 1 \text{ a } x?$$

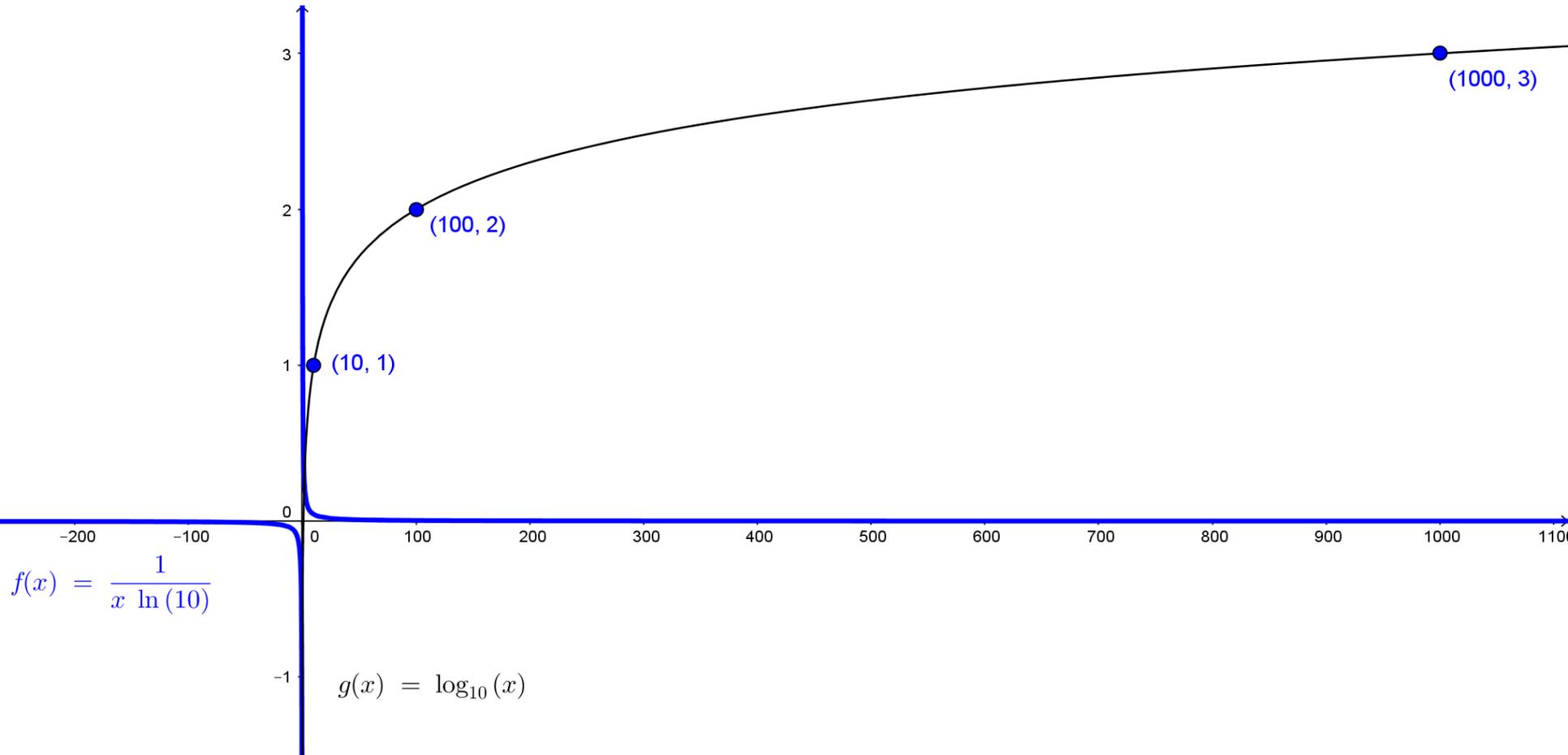


A função área é  $A(x) = \log_2 x$   
(função logarítmica na base 2)

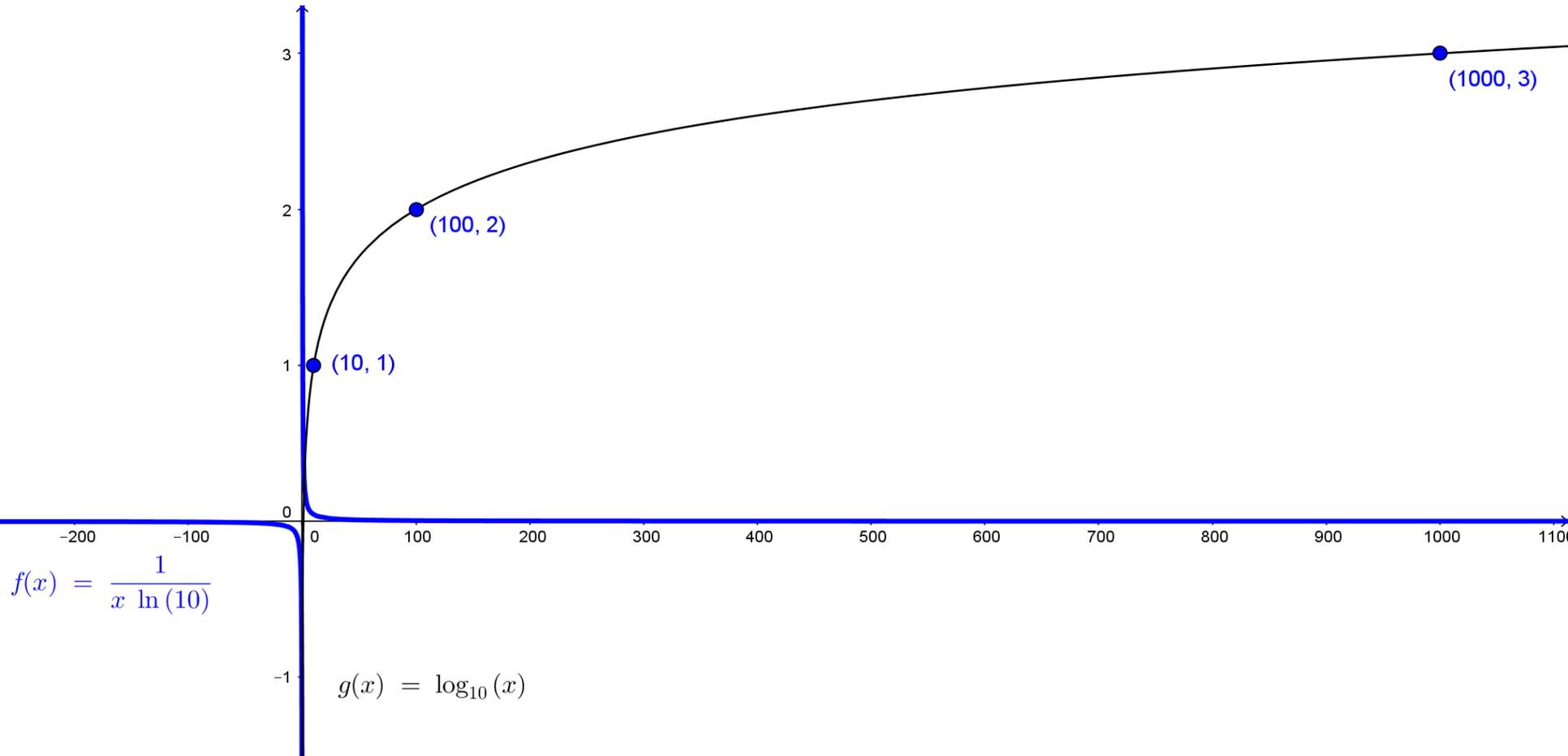


Que função expressa a área sob

$$f(x) = \frac{1}{x \ln 10}, \text{ de } 1 \text{ a } x?$$



A função área é  $A(x) = \log_{10} x$   
(função logarítmica na base 10)

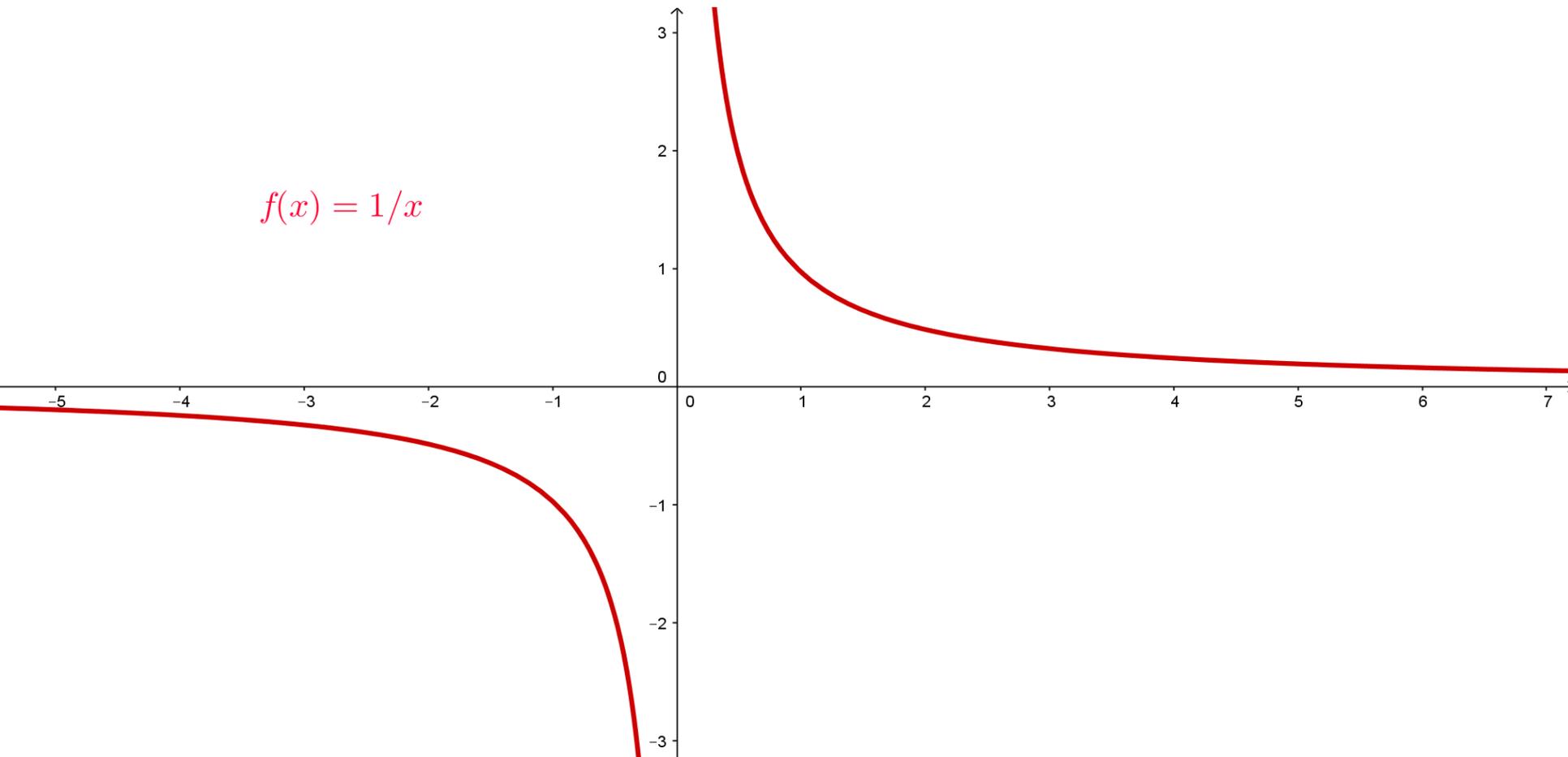


A integral indefinida da função

$f(x) = \frac{1}{x \ln a}$ , com  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , é a função

$$g(x) = \log_a |x|$$

(função logarítmica na base  $a$  do módulo de  $x$ )

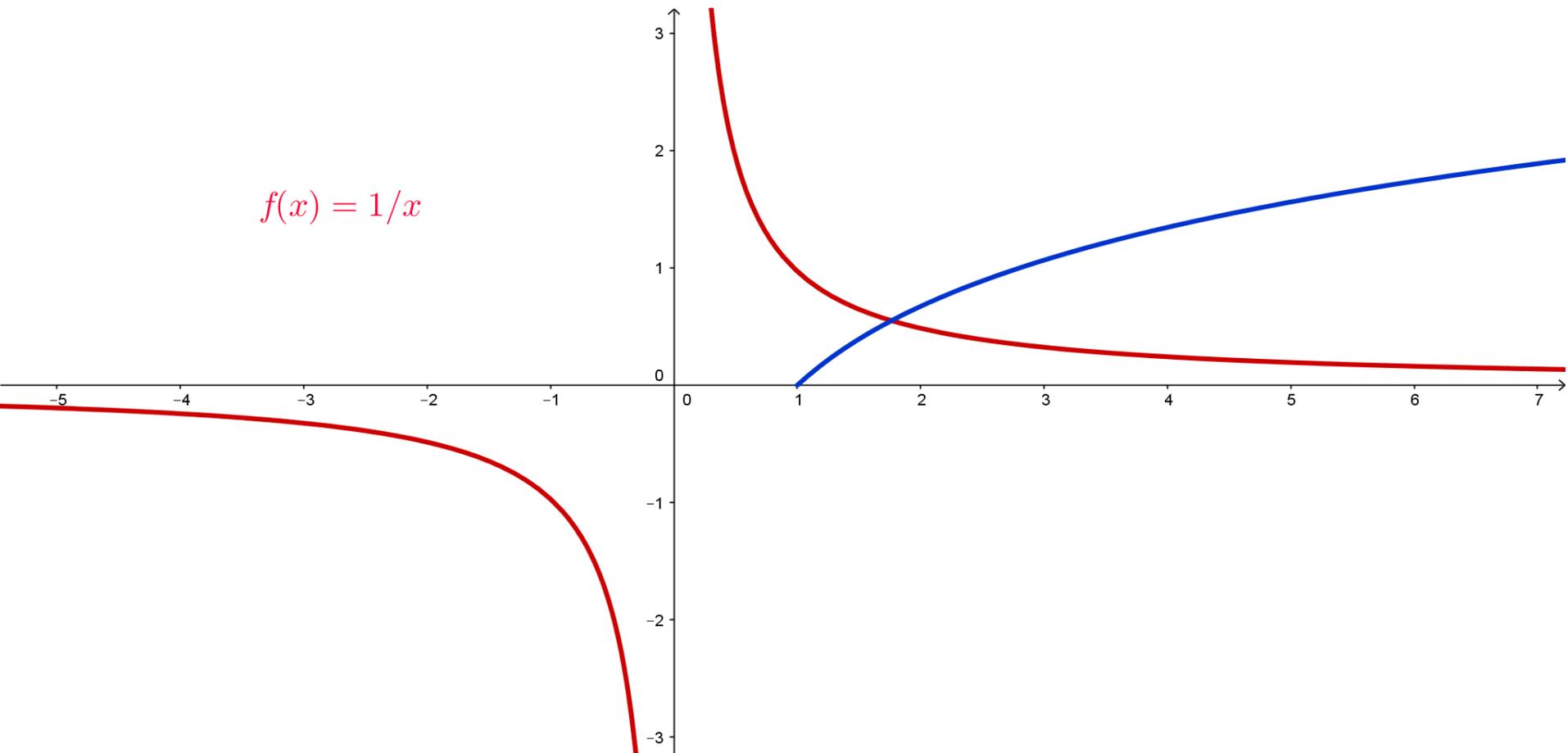


A integral indefinida da função

$f(x) = \frac{1}{x \ln a}$ , com  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , é a função

$$g(x) = \log_a |x|$$

(função logarítmica na base  $a$  do módulo de  $x$ )

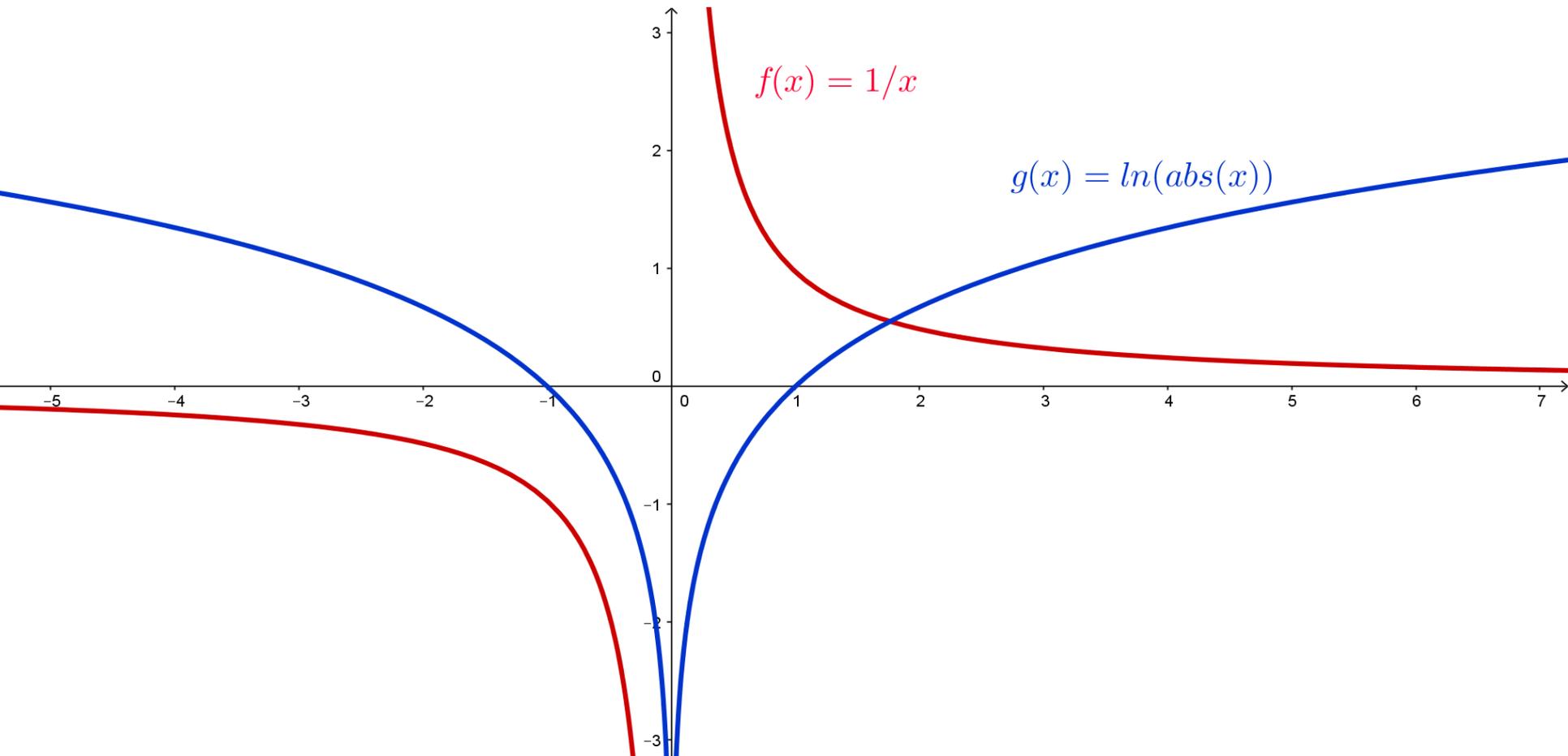


A integral indefinida da função

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ é a função}$$

$$g(x) = \ln|x|$$

(função logarítmica natural, base e)



A integral indefinida da função

$$f(x) = \frac{1}{x \ln a}, \text{ com } a > 0, a \neq 1, \text{ é a função}$$

$$g(x) = \log_a |x|$$

(função logarítmica na base  $a$  do módulo de  $x$ )

