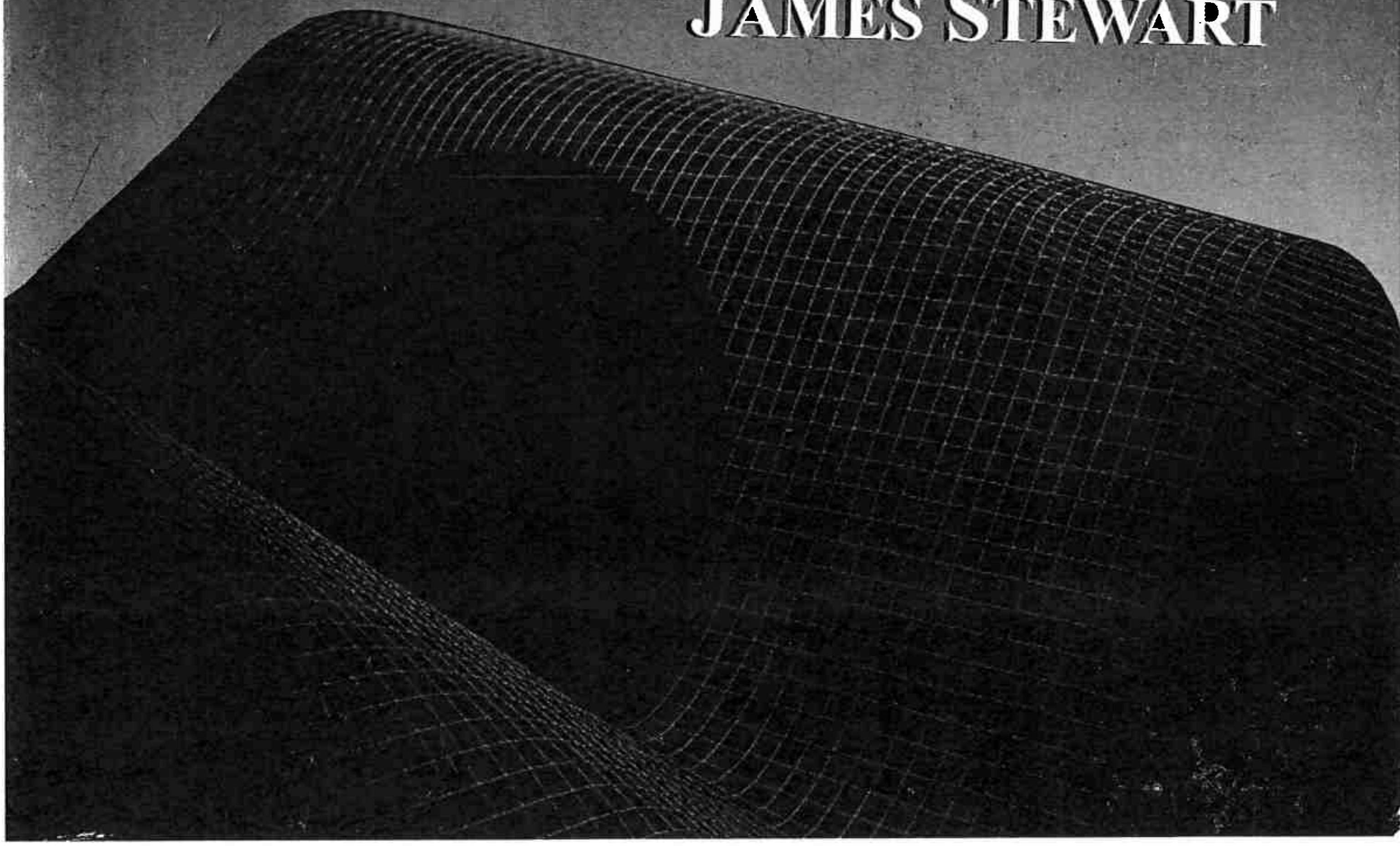
PIONEIRA
THOMSON LEARNING

Cálculo

Vol. II

4ª Edição

JAMES STEWART



□ A Figura 5 mostra como a corrente no Exemplo 4 se aproxima de seu valor limite.

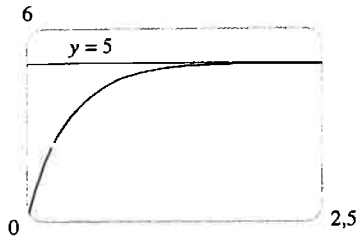


FIGURA 5

(b) Depois de 1 s a corrente é

$$I(1) = 5(1 - e^{-3}) \approx 4{,}75 \text{ A}$$

(c)
$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} 5(1 - e^{-3t})$$
$$= 5 - 5\lim_{t\to\infty} e^{-3t}$$
$$= 5 - 0 = 5$$ □

EXEMPLO 5 □ Suponha que a resistência e a indutância permaneçam as mesmas como no Exemplo 4, mas em vez de uma pilha usaremos um gerador que produz uma voltagem variável de $E(t) = 60 \operatorname{sen} 30t$ volts. Encontre $I(t)$.

SOLUÇÃO Dessa vez a equação diferencial torna-se

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \operatorname{sen} 30t \qquad \text{ou} \qquad \frac{dI}{dt} + 3I = 15 \operatorname{sen} 30t$$

O mesmo fator de integração e^{3t} fornece

□ A Figura 6 mostra o gráfico da corrente quando a pilha é trocada por um gerador.

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t} \operatorname{sen} 30t$$

Usando a Fórmula 98 na Tabela de Integrais temos

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t} \operatorname{sen} 30t\, dt = 15\frac{e^{3t}}{909}(3 \operatorname{sen} 30t - 30\cos 30t) + C$$

$$I = \tfrac{5}{101}(\operatorname{sen} 30t - 10\cos 30t) + Ce^{-3t}$$

Como $I(0) = 0$, temos

$$-\tfrac{50}{101} + C = 0$$

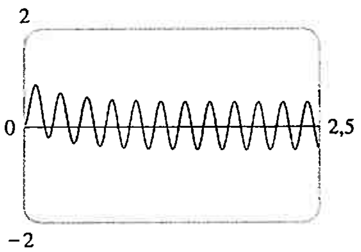


FIGURA 6

assim
$$I(t) = \tfrac{5}{101}(\operatorname{sen} 30t - 10\cos 30t) + \tfrac{50}{101}e^{-3t}$$ □

9.6 Exercícios

1–4 □ Determine se a equação diferencial é linear.

1. $y' + e^x y = x^2 y^2$
2. $y + \operatorname{sen} x = x^3 y'$
3. $xy' + \ln x - x^2 y = 0$
4. $yy' = \operatorname{sen} x$

5–14 □ Resolva a equação diferencial.

5. $y' + 2y = 2e^x$
6. $y' = x + 5y$
7. $y' - 2xy = x$
8. $xy' + 2y = e^{x^2}$
9. $y' \cos x = y \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
10. $1 + xy = xy'$
11. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x^2$
12. $\dfrac{dy}{dx} = x \operatorname{sen} 2x + y \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
13. $(1 + t)\dfrac{du}{dt} + u = 1 + t, \quad t > 0$
14. $xy' + xy + y = e^{-x}, \quad x > 0$

15–20 □ Resolva o problema de valor inicial.

15. $y' + y = x + e^x, \quad y(0) = 0$
16. $t\dfrac{dy}{dt} + 2y = t^3, \quad t > 0, \quad y(1) = 0$
17. $\dfrac{dv}{dt} - 2tv = 3t^2 e^{t^2}, \quad v(0) = 5$

18. $(1 + x^2)y' + 2xy = 3\sqrt{x}, \quad y(0) = 2$

19. $x^2 \dfrac{dy}{dx} + 2xy = \cos x, \quad y(\pi) = 0$

20. $x\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x+1} = x, \quad y(1) = 0, \quad x > 0$

21–22 □ Resolva a equação diferencial e use uma calculadora gráfica ou um computador para plotar vários membros da família de soluções. Como a curva solução muda quando C varia?

21. $xy' + y = x\cos x, \quad x > 0$

22. $y' + (\cos x)y = \cos x$

23. Uma **equação diferencial de Bernoulli** [em homenagem a James Bernoulli (1654-1705)] é da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Observe que, se $n = 0$ ou 1, a equação de Bernoulli é linear. Para outros valores de n, mostre que a substituição $u = y^{1-n}$ transforma a equação de Bernoulli na equação linear

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$$

24–26 □ Use o método do Exercício 23 para resolver a equação diferencial.

24. $xy' + y = -xy^2$

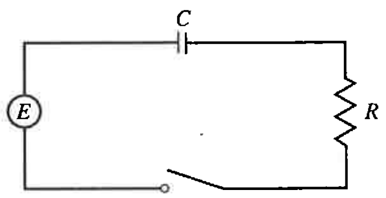
25. $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^2}$

26. $y' + y = xy^3$

27. No circuito mostrado na Figura 4 uma pilha fornece uma voltagem constante de 40 V, a indutância é 2 H, a resistência é 10 Ω e $I(0) = 0$.
(a) Encontre $I(t)$.
(b) Calcule a corrente após 0,1 s.

28. No circuito mostrado na Figura 4 um gerador fornece uma voltagem de $E(t) = 40 \operatorname{sen} 60t$ volts, a indutância é 1 H, a resistência é 20 Ω e $I(0) = 1$ A.
(a) Encontre $I(t)$.
(b) Calcule a corrente depois de 0,1 s.
(c) Use um dispositivo gráfico para desenhar o gráfico da função corrente.

29. A figura mostra um circuito contendo uma força eletromotriz, um capacitor com capacitância de C farads (F) e um resistor com uma resistência de R ohms (Ω). A queda de voltagem através do capacitor é Q/C, onde Q é a carga (em coulombs); nesse caso, a Lei de Kirchhoff fornece



$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Mas $I = dQ/dt$ (veja o Exemplo 3 na Seção 3.3 no Volume I); assim, temos

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponha que a resistência é 5 Ω, a capacitância é 0,05 F, a pilha fornece uma voltagem constante de 60 V e a carga inicial é $Q(0) = 0$ C. Encontre a carga e a corrente no tempo t.

30. No circuito do Exercício 29, $R = 2$ Ω, $C = 0{,}01$ F, $Q(0) = 0$ e $E(t) = 10 \operatorname{sen} 60t$. Calcule a carga e a corrente no tempo t.

31. Seja $P(t)$ o nível de desempenho de alguém aprendendo uma habilidade como uma função do tempo de treinamento t. O gráfico de P é chamado de *curva de aprendizagem*. No Exercício 11 na Seção 9.1 propusemos a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P(t))$$

como um modelo razoável para a aprendizagem, onde k é uma constante positiva. Resolva essa equação diferencial linear e use sua solução para plotar a curva de aprendizagem.

32. Dois novos trabalhadores foram contratados para uma linha de montagem. João processou 25 unidades durante a primeira hora e 45 unidades durante a segunda hora. Marcos processou 35 unidades durante a primeira hora e 50 unidades na segunda hora. Usando o modelo do Exercício 31 e assumindo que $P(0) = 0$, estime o número máximo de unidades por hora que cada trabalhador é capaz de processar.

33. Na Seção 9.3 olhamos para problemas de misturas nos quais o volume de fluido permanecia constante e vimos que estes fornecem equações separáveis (veja o Exemplo 5 naquela seção). Se as taxas de entrada e saída do sistema forem diferentes, então o volume não é constante e a equação diferencial resultante é linear mas não separável.

Um tanque contém 100 l de água. Uma solução com uma concentração de sal de 0,4 kg/l é adicionada a uma taxa de 5 l/min. A solução é mantida misturada e é retirada do tanque a uma taxa de 3 l/min. Se $y(t)$ for a quantidade de sal (em quilogramas) depois de t minutos, mostre que y satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100 + 2t}$$

Resolva essa equação e calcule a concentração depois de 20 minutos.

34. Um tanque com capacidade de 400 l está cheio com uma mistura de água e cloro com uma concentração de 0,05 g de cloro por litro. Para reduzir a concentração de cloro, água doce é

bombeada no tanque a uma taxa de 4 l/s. A mistura é agitada e é retirada a uma taxa de 10 l/s. Calcule a quantidade de cloro no tanque em função do tempo.

35. Um objeto com massa m é derrubado a partir do repouso e assumimos que a resistência do ar é proporcional à velocidade do objeto. Se $s(t)$ for a distância percorrida depois de t segundos, então a velocidade é $v = s'(t)$ e a aceleração é $a = v'(t)$. Se g for a aceleração da gravidade, então a força para baixo no objeto é $mg - cv$, onde c é uma constante positiva, e a Segunda Lei de Newton fornece

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv$$

(a) Resolva essa equação linear para mostrar que

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

(b) Qual é a velocidade limite?

(c) Calcule a distância que o objeto caiu depois de t segundos.

36. Se ignorarmos a resistência do ar, poderemos concluir que objetos mais pesados não caem mais rápido do que objetos mais leves. Mas se considerarmos a resistência do ar, nossa conclusão muda. Use a expressão para a velocidade de queda de um objeto no Exercício 35(a) para calcular dv/dm e mostrar que os objetos mais pesados caem mais rápido do que os mais leves.

9.7 Sistemas Predador-Presa

Temos olhado para uma variedade de modelos para o crescimento de uma única espécie que vive sozinha em um ambiente. Nesta seção consideraremos modelos mais realistas, que levam em consideração a interação de duas espécies no mesmo ambiente. Veremos que esses modelos tomam a forma de um par de equações diferenciais acopladas.

Primeiro consideraremos a situação na qual uma espécie, chamada de *presa*, tem um amplo suprimento alimentar e a segunda espécie, denominada *predador*, se alimenta da presa. Exemplos de presa e predador incluem coelhos e lobos em uma floresta isolada, peixe e tubarões, pulgões e joaninhas, e bactéria e amebas. Nosso modelo terá duas variáveis dependentes e ambas serão funções do tempo. Seja $R(t)$ o número de presas (usando R para coelhos) e $W(t)$ o número de predadores (com W para lobos) no tempo t.

Na ausência de predadores, o amplo suprimento de alimentos suportaria o crescimento exponencial de presas, isto é,

$$\frac{dR}{dt} = kR \qquad \text{onde } k \text{ é uma constante positiva}$$

Na ausência de presas, assumimos que a população de predadores declinaria a uma taxa proporcional a ela mesma, isto é,

$$\frac{dW}{dt} = -rW \qquad \text{onde } r \text{ é uma constante positiva}$$

Com ambas as espécies presentes, contudo, assumimos que a causa principal de morte entre as presas é serem comidas por predadores, e as taxas de natalidade e sobrevivência dos predadores dependem da disponibilidade de comida, a saber, as presas. Também assumimos que as duas espécies se encontram a uma taxa que é proporcional a ambas as populações e é portanto proporcional ao produto RW. (Quanto maior qualquer uma das populações, maior é a chance do encontro.) Um sistema de duas equações diferenciais que incorporam essas premissas é mostrado a seguir:

W representa os predadores.
R representa as presas.

$$\boxed{1} \qquad \frac{dR}{dt} = kR - aRW \qquad \frac{dW}{dt} = -rW + bRW$$

onde k, r, a e b são constantes positivas. Note que o termo $-aRW$ diminui a taxa natural de crescimento das presas, e o termo bRW aumenta a taxa de crescimento natural dos predadores.

11.1 Exercícios

1. (a) O que é uma seqüência?
   (b) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$?
   (c) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?

2. (a) O que é uma seqüência convergente? Dê dois exemplos.
   (b) O que é uma seqüência divergente? Dê dois exemplos.

3–8 □ Liste os cinco primeiros termos da seqüência.

3. $a_n = 1 - (0,2)^n$

4. $a_n = \dfrac{n+1}{3n-1}$

5. $a_n = \dfrac{3(-1)^n}{n!}$

6. $\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)\}$

7. $\left\{\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}\right\}$

8. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$

9–14 □ Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da seqüência, assumindo que o padrão dos primeiros termos continua.

9. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$

10. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$

11. $\{2, 7, 12, 17, \ldots\}$

12. $\left\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \ldots\right\}$

13. $\left\{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots\right\}$

14. $\{0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots\}$

15–38 □ Determine se a seqüência converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

15. $a_n = n(n-1)$

16. $a_n = \dfrac{n+1}{3n-1}$

17. $a_n = \dfrac{3+5n^2}{n+n^2}$

18. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$

19. $a_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$

20. $a_n = \dfrac{n}{1+\sqrt{n}}$

21. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$

22. $a_n = \operatorname{sen}(n\pi/2)$

23. $a_n = 2 + \cos n\pi$

24. $\{\operatorname{arctg}\ 2n\}$

25. $\left\{\dfrac{3+(-1)^n}{n^2}\right\}$

26. $\left\{\dfrac{n!}{(n+2)!}\right\}$

27. $\left\{\dfrac{\ln(n^2)}{n}\right\}$

28. $\{(-1)^n \operatorname{sen}(1/n)\}$

29. $\{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\}$

30. $\left\{\dfrac{\ln(2+e^n)}{3n}\right\}$

31. $a_n = n2^{-n}$

32. $a_n = \ln(n+1) - \ln n$

33. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

34. $a_n = (1+3n)^{1/n}$

35. $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}$

36. $a_n = \dfrac{n \cos n}{n^2+1}$

37. $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$

38. $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

39–46 □ Use um gráfico da seqüência para decidir se a seqüência é convergente ou divergente. Se a seqüência for convergente, estime o valor do limite a partir do gráfico e então prove sua estimativa.

39. $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$

40. $a_n = 2 + (-2/\pi)^n$

41. $\left\{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)\right\}$

42. $\left\{\dfrac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n}}\right\}$

43. $a_n = \dfrac{n^3}{n!}$

44. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

45. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n)^n}$

46. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!}$

47. Se \$ 1000 forem investidos a uma taxa de juros de 6%, compostos anualmente, depois de n anos o investimento valerá \$ $a_n = 1000(1{,}06)^n$
   (a) Encontre os cinco primeiros termos da seqüência $\{a_n\}$.
   (b) A seqüência é convergente ou divergente? Explique.

48. Calcule os primeiros 40 termos da seqüência definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{se } a_n \text{ é um número par} \\ 3a_n + 1 & \text{se } a_n \text{ é um número ímpar} \end{cases}$$

e $a_1 = 11$. Faça o mesmo para $a_1 = 25$. Faça uma conjectura sobre esse tipo de seqüência.

49. Para quais valores de r a seqüência $\{nr^n\}$ é convergente?

50. (a) Se $\{a_n\}$ for convergente, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

   (b) Uma seqüência $\{a_n\}$ é definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 1/(1+a_n)$ para $n \geqslant 1$. Assumindo que $\{a_n\}$ é convergente, encontre seu limite.

51. Suponha que você sabe que $\{a_n\}$ é uma seqüência decrescente e que todos os termos estão entre os números 5 e 8. Explique por que a seqüência tem um limite. O que você pode dizer sobre o valor do limite?

52–58 □ Determine se a seqüência dada é crescente, decrescente ou monotônica. A seqüência é limitada?

52. $a_n = \dfrac{1}{5^n}$

53. $a_n = \dfrac{1}{2n+3}$

54. $a_n = \dfrac{2n-3}{3n+4}$

55. $a_n = \cos(n\pi/2)$

56. $a_n = 3 + (-1)^n/n$

57. $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$

58. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$

59. Calcule o limite da seqüência

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$$

60. Uma seqüência $\{a_n\}$ é dada por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.
(a) Por indução, ou de outra maneira, mostre que $\{a_n\}$ é crescente e limitada superiormente por 3. Aplique o Teorema 10 para mostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.
(b) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

61. Mostre que a seqüência definida por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3 - 1/a_n$ é crescente e $a_n < 3$ para todo n. Deduza que $\{a_n\}$ é convergente e calcule seu limite.

62. Mostre que a seqüência definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

satisfaz $0 < a_n \leqslant 2$ e é decrescente. Deduza que a seqüência é convergente e encontre seu limite.

63. (a) Fibonacci colocou o seguinte problema: Suponha que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com 2 meses de idade. Se começarmos com um par recém-nascido, quantos pares de coelhos teremos no n-ésimo mês? Mostre que a resposta é f_n, onde $\{f_n\}$ é a seqüência de Fibonacci definida no Exemplo 2(c).
(b) Seja $a_n = f_{n+1}/f_n$ e mostre que $a_{n-1} = 1 + 1/a_{n-2}$. Assumindo que $\{a_n\}$ é convergente, encontre seu limite.

64. (a) Seja $a_1 = a$, $a_2 = f(a)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a))$, ..., $a_{n+1} = f(a_n)$, onde f é uma função contínua. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, mostre que $f(L) = L$.
(b) Ilustre a parte (a) tomando $f(x) = \cos x$, $a = 1$, e estimando o valor de L com precisão de cinco casas decimais.

65. (a) Use um gráfico para estimar o valor do limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n!}$$

(b) Use um gráfico da seqüência na parte (a) para encontrar os menores valores de N que correspondem a $\varepsilon = 0{,}1$ e $\varepsilon = 0{,}001$ na Definição 1.

66. Use a Definição 1 diretamente para provar que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ quando $|r| < 1$.

67. Prove o Teorema 5.
[*Dica*: Use a Definição 1 ou o Teorema do Confronto.]

68. Seja $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
(a) Mostre que se $0 \leqslant a < b$, então

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n+1)b^n$$

(b) Deduza que $b^n[(n+1)a - nb] < a^{n+1}$.
(c) Use $a = 1 + 1/(n+1)$ e $b = 1 + 1/n$ na parte (b) para mostrar que $\{a_n\}$ é crescente.
(d) Use $a = 1$ e $b = 1 + 1/(2n)$ na parte (b) para mostrar que $a_{2n} < 4$.
(e) Use as partes (c) e (d) para mostrar que $a_n < 4$ para todo n.
(f) Use o Teorema 10 para mostrar que $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$ existe. (O limite é e. Veja a Equação 3.8.6.)

69. Seja a e b números positivos com $a > b$. Seja a_1 sua média aritmética e b_1 sua média geométrica:

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \qquad b_1 = \sqrt{ab}$$

Repita esse procedimento de tal modo que, em geral,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

(a) Use indução matemática para mostrar que

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$$

(b) Deduza que $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são ambas convergentes.
(c) Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Gauss chamou o valor comum desses limites de **média aritmética-geométrica** dos números a e b.

70. (a) Mostre que se $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ e $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$, então $\{a_n\}$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.
(b) Se $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$$

encontre os oito primeiros membros da seqüência $\{a_n\}$. Então use a parte (a) para mostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Isso dá a **expansão em frações contínuas**

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

NOTA 4 □ Um número finito de termos não afeta a convergência ou divergência de uma série. Por exemplo, suponha que possamos mostrar que a série

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

é convergente. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{3}{28} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

segue-se que a série inteira $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n^3+1)$ é convergente. Similarmente, se soubermos que a série $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ converge, então a série completa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

também é convergente.

11.2 Exercícios

1. (a) Qual é a diferença entre uma seqüência e uma série?
   (b) O que é uma série convergente? O que é uma série divergente?

2. Explique o significado de se dizer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

3–8 □ Calcule pelo menos 10 somas parciais da série. Plote ambas as seqüências de termos e de somas parciais na mesma tela. Parece que a série é convergente ou divergente? Se ela for convergente, calcule a soma. Se for divergente, explique por quê.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

6. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3}{n(n-1)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{1,5}} - \frac{1}{(n+1)^{1,5}}\right)$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{7}\right)^{n-1}$

9. Seja $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$.
   (a) Determine se $\{a_n\}$ é convergente.
   (b) Determine se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

10. (a) Explique a diferença entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j$$

   (b) Explique a diferença entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} a_j$$

11–34 □ Determine se a série é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

11. $4 + \frac{8}{5} + \frac{16}{25} + \frac{32}{125} + \cdots$

12. $1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \cdots$

13. $-2 + \frac{5}{2} - \frac{25}{8} + \frac{125}{32} - \cdots$

14. $1 + 0{,}4 + 0{,}16 + 0{,}064 + \cdots$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^{n-1}}{5^{n-1}}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n}}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} 8^{n+1}$

20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{5^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} [2(0{,}1)^n + (0{,}2)^n]$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}}\right)$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+5}\right)$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+2^{-n}}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

35–40 □ Expresse o número como uma razão de inteiros.

35. $0{,}\overline{2} = 0{,}2222\ldots$

36. $0{,}\overline{73} = 0{,}73737373\ldots$

37. $3{,}\overline{417} = 3{,}417417417\ldots$

38. $6{,}2\overline{54}$

39. $0{,}123\overline{456}$

40. $5{,}\overline{6021}$

41–46 □ Encontre os valores de x para os quais a série converge. Calcule a soma da série para aqueles valores de x.

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n$

43. $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$

44. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$

45. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$

46. $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg}^n x$

47–48 □ Use o comando de frações parciais em seu CAS para encontrar uma expressão conveniente para a soma parcial; então use essa expressão para encontrar a soma da série. Verifique sua resposta usando o CAS para somar a série diretamente.

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n-3)}$

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{(n^2+n)^2}$

49. Se a n-ésima soma parcial de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for

$$s_n = \frac{n-1}{n+1}$$

encontre a_n e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

50. Se a n-ésima soma parcial de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for

$$s_n = 3 - n2^{-n}$$

encontre a_n e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

51. Quando o dinheiro é gasto em produtos e serviços, aqueles que recebem o dinheiro também gastam uma parte dele. As pessoas que recebem parte do dinheiro gasto duas vezes gastarão uma parte, e assim por diante. Os economistas chamam essa reação em cadeia de *efeito multiplicador*. Em uma comunidade hipotética isolada, o governo local começa o processo gastando \$ D. Suponha que cada pessoa que recebe o dinheiro gasto gasta $100c\%$ e economiza $100s\%$ do dinheiro que recebeu. Os valores de c e s são chamados de *propensão marginal a consumir* e *propensão marginal a economizar* e, é claro, $c + s = 1$.
(a) Seja S_n o gasto total que foi gerado depois de n transações. Encontre uma equação para S_n.
(b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} S_n = kD$, onde $k = 1/s$. O número k é chamado de *multiplicador*. Qual é o multiplicador se a propensão marginal para consumir for 80%?

Nota: O governo federal usa esse princípio para justificar o déficit. Os bancos usam esse princípio para justificar o empréstimo de uma grande porcentagem do dinheiro que eles recebem em depósitos.

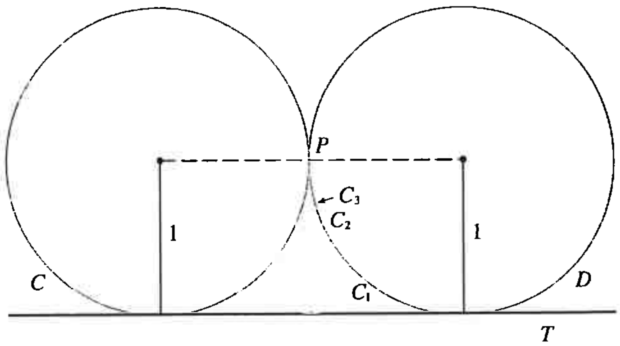
52. Uma certa bola tem a seguinte propriedade: cada vez que ela cai a partir de uma altura h em uma superfície dura e nivelada ela volta até uma altura rh, onde $0 < r < 1$. Suponha que a bola seja derrubada a partir de uma altura inicial de H metros.
(a) Assumindo que a bola continua a pular indefinidamente, calcule a distância total que ela percorre.
(b) Calcule o tempo total que a bola pula.
(c) Suponha que cada vez que a bola atingir a superfície com velocidade v ela rebaterá com velocidade $-kv$, onde $0 < k < 1$. Quanto tempo levará para a bola parar?

53. Qual é o valor de c se $\sum_{n=2}^{\infty} (1+c)^{-n} = 2$?

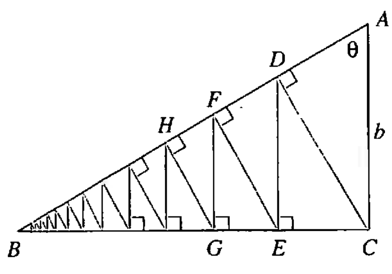
54. Plote as curvas $y = x^n$, $0 \leq x \leq 1$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ na mesma tela. Achando as áreas entre as curvas sucessivas, dê uma demonstração geométrica do fato, mostrado no Exemplo 6, de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

55. A figura mostra dois círculos C e D de raio 1 que se tocam em P. T é uma reta tangente em comum; C_1 é o círculo que toca C, D e T; C_2 é o círculo que toca C, D e C_1; C_3 é o círculo que toca C, D e C_2. Esse procedimento pode continuar indefinidamente e produzir uma seqüência infinita de círculos $\{C_n\}$. Encontre uma expressão para o diâmetro de C_n e então forneça uma outra demonstração geométrica do Exemplo 6.



56. Um triângulo ABC é dado com $\angle A = \theta$ e $|AC| = b$. CD é desenhado perpendicularmente a AB, DE é desenhado perpendicularmente a BC, $EF \perp AB$, e esse processo continua indefinidamente, como mostrado na figura. Calcule o compri-



mento total de todas as retas perpendiculares

$$|CD| + |DE| + |EF| + |FG| + \cdots$$

em termos de b e θ.

57. O que está errado com o seguinte cálculo?

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

(Guido Ubaldo pensou que isso provava a existência de Deus, porque "alguma coisa tinha sido criada do nada.")

58. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \neq 0$) seja conhecida como sendo uma série convergente. Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ é uma série divergente.

59. Prove a parte (i) do Teorema 8.

60. Se $\Sigma\, a_n$ for divergente e $c \neq 0$, mostre que $\Sigma\, ca_n$ é divergente.

61. Se $\Sigma\, a_n$ for convergente e $\Sigma\, b_n$ for divergente, mostre que a série $\Sigma\, (a_n + b_n)$ é divergente. [*Dica*: Argumente por contradição.]

62. Se $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ forem ambas divergentes, $\Sigma\, (a_n + b_n)$ é necessariamente divergente?

63. Suponha que uma série $\Sigma\, a_n$ tenha termos positivos e suas somas parciais s_n satisfaçam a desigualdade $s_n \leqslant 1000$ para todo n. Explique por que $\Sigma\, a_n$ deve ser convergente.

64. A seqüência de Fibonacci foi definida na Seção 11.1 pelas equações

$$f_1 = 1, \qquad f_2 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Mostre que cada uma das afirmações abaixo é verdadeira.

(a) $\dfrac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \dfrac{1}{f_{n-1}f_n} - \dfrac{1}{f_n f_{n+1}}$

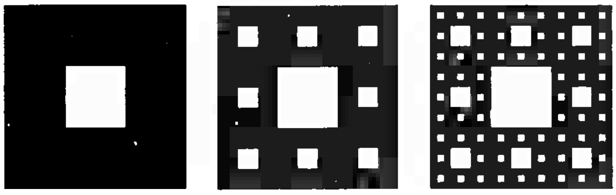
(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = 1$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}f_{n+1}} = 2$

65. O **conjunto de Cantor**, em homenagem ao matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), é construído como a seguir. Começamos com o intervalo fechado $[0, 1]$ e removemos o intervalo aberto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Isso nos leva a dois intervalos, $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$. Dividimos novamente cada intervalo em três e removemos cada terço intermediário aberto. Quatro intervalos permanecem, e novamente repetimos o processo. Continuamos esse procedimento indefinidamente. O conjunto de Cantor consiste nos números que permanecem em $[0, 1]$ depois de todos os intervalos terem sido removidos.

(a) Mostre que o comprimento total de todos os intervalos que foram removidos é 1. Apesar disso o conjunto de Cantor contém infinitos números. Dê exemplos de alguns números no conjunto de Cantor.

(b) O **carpete de Sierpinski** é o correspondente bidimensional do conjunto de Cantor. Ele é construído pela remoção do nono subquadrado central de um quadrado de lado 1 dividido em 9 subquadrados. A etapa seguinte consiste em remover os subquadrados centrais dos oito quadrados menores que permaneceram, e assim por diante. (A figura mostra as três primeiras etapas da construção.) Mostre que a soma das áreas dos quadrados removidos é 1. Isso implica que o carpete de Sierpinski tem área 0.



66. (a) A seqüência $\{a_n\}$ é definida recursivamente pela equação $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ para $n \geqslant 3$, onde a_1 e a_2 podem ser quaisquer números reais. Experimente com vários valores de a_1 e a_2 e use sua calculadora para descobrir o limite da seqüência.

(b) Encontre $\lim_{n\to\infty} a_n$ em termos de a_1 e a_2 expressando $a_{n+1} - a_n$ em termos de $a_2 - a_1$ e somando uma série.

67. Considere a série

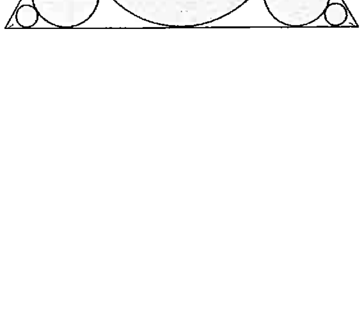
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

(a) Calcule as somas parciais s_1, s_2, s_3 e s_4. Você reconhece os denominadores? Use o padrão para estimar uma fórmula para s_n.

(b) Use indução matemática para provar sua estimativa.

(c) Mostre que a série infinita dada é convergente, e calcule sua soma.

68. Na figura existem infinitos círculos se aproximando dos vértices de um triângulo eqüilátero. Cada círculo toca outros círculos e lados do triângulo. Se o triângulo tiver lados de comprimento 1, calcule a área total ocupada pelos círculos.



(i) Se $\int_1^\infty f(x)\,dx$ for convergente, então (4) fornece

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant \int_1^n f(x)\,dx \leqslant \int_1^\infty f(x)\,dx$$

já que $f(x) \geqslant 0$. Portanto

$$s_n = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant a_1 + \int_1^\infty f(x)\,dx = M$$

Como $s_n \leqslant M$ para todo n, a seqüência $\{s_n\}$ é limitada superiormente. Também

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$$

já que $a_{n+1} = f(n+1) \geqslant 0$. Então, $\{s_n\}$ é uma seqüência crescente limitada, e assim ela é convergente pelo Teorema da Seqüência Monotônica (11.1.10). Isso significa que $\sum a_n$ é convergente

(ii) Se $\int_1^\infty f(x)\,dx$ for divergente, então $\int_1^n f(x)\,dx \to \infty$ quando $n \to \infty$ porque $f(x) \geqslant 0$. Mas (5) dá

$$\int_1^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i = s_{n-1}$$

e assim $s_{n-1} \to \infty$. Isso implica que $s_n \to \infty$ e assim $\sum a_n$ diverge. □

11.3 Exercícios

1. Faça um desenho para mostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1,3}} < \int_1^\infty \frac{1}{x^{1,3}}\,dx$$

O que você pode concluir sobre a série?

2. Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente para $x \geqslant 1$ e $a_n = f(n)$. Desenhando uma figura, coloque em ordem crescente as três quantidades

$$\int_1^6 f(x)\,dx \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i \qquad \sum_{i=2}^{6} a_i$$

3–8 □ Use o Teste da Integral para determinar se a série é convergente ou divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

8. $\displaystyle\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \cdots$

9–24 □ Determine se a série é convergente ou divergente.

9. $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^{1,0001}}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-0,99}$

11. $\displaystyle 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \cdots$

12. $\displaystyle 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 - 2\sqrt{n}}{n^3}$

14. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 3n + 1}$

19. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 1}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1 + n^2}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 2}$

24. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$

25–28 □ Encontre os valores de p para os quais a série é convergente.

25. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

26. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \, [\ln(\ln n)]^p}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

29. A função zeta ζ de Riemann é definida por.

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

e é usada em teoria de números para estudar a distribuição de números primos. Qual é o domínio de ζ?

30. (a) Encontre a soma parcial s_{10} da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$. Estime o erro usando s_{10} como uma aproximação para a soma da série.
(b) Use (3) com $n = 10$ para dar uma estimativa melhorada da soma.
(c) Encontre um valor de n tal que s_n represente a soma com precisão de 0,00001.

31. (a) Use a soma dos 10 primeiros termos para estimar a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Quão boa é essa estimativa?
(b) Melhore essa estimativa usando (3) com $n = 10$.
(c) Encontre um valor de n que garanta que o erro na aproximação $s \approx s_n$ seja menor do que 0,001.

32. Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^5$ com precisão de três casas decimais.

33. Estime $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ com precisão de 0,01.

34. Quantos termos da série $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\ln n)^2]$ você precisaria adicionar para encontrar sua soma com precisão de 0,01?

35. (a) Use (4) para mostrar que se s_n é a n-ésima soma parcial da série harmônica, então

$$s_n \leqslant 1 + \ln n$$

(b) A série harmônica diverge mas muito lentamente. Use a parte (a) para mostrar que a soma do primeiro milhão de termos é menor do que 15 e que a soma do primeiro bilhão de termos é menor do que 22.

CAS **36.** (a) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^2/n^2$ é convergente.
(b) Encontre um limite superior para o erro na aproximação $s \approx s_n$.
(c) Qual é o menor valor de n tal que esse limite superior seja menor do que 0,05?
(d) Encontre s_n para esse valor de n.

37. Encontre todos os valores positivos de b para os quais a série $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ converge.

38. Use as seguintes etapas para mostrar que a seqüência

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

tem um limite. (O valor do limite é denotado por γ e é chamado de constante de Euler.)
(a) Desenhe uma figura como a Figura 6 com $f(x) = 1/x$ e interprete t_n como uma área [ou use (5)] para mostrar que $t_n > 0$ para todo n.
(b) Interprete

$$t_n - t_{n+1} = [\ln(n+1) - \ln n] - \frac{1}{n+1}$$

como uma diferença de áreas para mostrar que $t_n - t_{n+1} > 0$. Portanto $\{t_n\}$ é uma seqüência decrescente.
(c) Use o Teorema da Seqüência Monotônica para mostrar que $\{t_n\}$ é convergente.

11.4 Os Testes de Comparação

Nos testes de comparação a idéia é comparar uma série dada com uma série que é sabidamente convergente ou divergente. Por exemplo, a série

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

nos lembra a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, que é uma série geométrica com $a = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$ e é portanto convergente. Como a série (1) é muito similar a uma série convergente, temos a impressão de que esta também deve ser convergente. Realmente, ela é. A desigualdade

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

mostra que nossa série dada (1) tem termos menores do que aqueles da série geométrica e portanto todas as suas somas parciais são também menores do que 1 (a soma da série geométrica). Isso significa que suas somas parciais formam uma seqüência crescente limitada, que é convergente. Também segue que a soma da série é menor do que a soma da série geométrica:

Como $a_n \leqslant b_n$ para todo n, temos $R_n \leqslant T_n$. Se $\Sigma\, b_n$ for uma série p, podemos estimar seu resto T_n como na Seção 11.3. Se $\Sigma\, b_n$ for uma série geométrica, então T_n é a soma de uma série geométrica e podemos somá-la exatamente (veja os Exercícios 35 e 36). Em qualquer caso sabemos que R_n é menor do que T_n.

EXEMPLO 5 □ Use a soma dos 100 primeiros termos para aproximar a soma da série $\Sigma\, 1/(n^3 + 1)$. Estime o erro envolvido nessa aproximação.

SOLUÇÃO Como

$$\frac{1}{n^3 + 1} < \frac{1}{n^3}$$

a série dada é convergente pelo Teste de Comparação. O resto T_n para a série de comparação $\Sigma\, 1/n^3$ foi estimado no Exemplo 5 da Seção 11.3 usando a Estimativa do Resto para o Teste da Integral. Lá encontramos que

$$T_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

Portanto o resto R_n para a série dada satisfaz

$$R_n \leqslant T_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

Com $n = 100$ temos

$$R_{100} \leqslant \frac{1}{2(100)^2} = 0{,}00005$$

Usando uma calculadora programável ou um computador encontramos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3 + 1} \approx 0{,}6864538$$

com erro menor do que 0,00005. □

11.4 Exercícios

1. Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos e $\Sigma\, b_n$ seja sabidamente convergente.
   (a) Se $a_n > b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\Sigma\, a_n$? Por quê?
   (b) Se $a_n < b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\Sigma\, a_n$? Por quê?

2. Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos e $\Sigma\, b_n$ seja sabidamente divergente.
   (a) Se $a_n > b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\Sigma\, a_n$? Por quê?
   (b) Se $a_n < b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\Sigma\, a_n$? Por quê?

3–32 □ Determine se a série converge ou diverge.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3 + 4}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2 + 3^n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n - \sqrt{n}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n^2}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + 3^n}{2^n}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n2^n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n\sqrt{n}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n + 1)(n + 2)}}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n + 1)(n + 2)}}$

13. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3-1}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\cos n}{3^n}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{2n^2-5}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+4}}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^4}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$

22. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+1}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-5n}{n^3+n+1}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^2}{\sqrt{1+n^2+n^6}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2}}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n2^n}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+7n}{3^n(n^2+5n-1)}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

33–36 □ Use a soma dos 10 primeiros termos para aproximar a soma da série. Estime o erro.

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^5}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$

37. O significado da representação decimal de um número $0{,}d_1d_2d_3\ldots$ (onde o dígito d_i é um dos números 0, 1, 2, . . . , 9) é que

$$0{,}d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots$$

Mostre que essa série sempre converge.

38. Para quais valores de p a série $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n^p \ln n)$ converge?

39. Prove que se $a_n \geqslant 0$ e $\sum a_n$ convergirem, então $\sum a_n^2$ também converge.

40. (a) Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos e $\sum b_n$ seja convergente. Prove que se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

então $\sum a_n$ também é convergente.

(b) Use a parte (a) para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)/n^3$ é convergente.

41. (a) Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos e $\sum b_n$ seja divergente. Prove que se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

então $\sum a_n$ também é divergente.

(b) Use a parte (a) para mostrar que $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(\ln n)$ é divergente.

42. Dê um exemplo de um par de séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ com termos positivos onde $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = 0$ e $\sum b_n$ diverge, mas $\sum a_n$ converge. (Compare com o Exercício 40.)

43. Mostre que se $a_n > 0$ e $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$, então $\sum a_n$ é divergente.

44. Mostre que se $a_n > 0$ e $\sum a_n$ for convergente, então $\sum \ln(1 + a_n)$ é convergente.

45. Se $\sum a_n$ for uma série convergente com termos positivos, é verdade que $\sum \operatorname{sen}(a_n)$ também é convergente?

46. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ forem ambas séries convergentes com termos positivos, é verdade que $\sum a_n b_n$ também é convergente?

11.5 Séries Alternadas

Os testes de convergência que temos olhado se aplicam apenas a séries com termos positivos. Nesta seção e na próxima aprenderemos como lidar com séries cujos termos não são necessariamente positivos. De particular importância são as *séries alternadas*, cujos termos se alternam no sinal.

Uma **série alternada** é uma série cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Aqui estão dois exemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

A desigualdade $|x + 2| < 3$ pode ser escrita como $-5 < x < 1$; assim, testamos a série nos extremos -5 e 1. Quando $x = -5$, a série é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

que diverge pelo Teste para Divergência [$(-1)^n n$ não converge para 0]. Quando $x = 1$, a série é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} n$$

que também diverge pelo Teste para Divergência. Então a série converge apenas quando $-5 < x < 1$, assim, o intervalo de convergência é $(-5, 1)$.

11.8 Exercícios

1. O que é uma série de potências?
2. (a) O que é o raio de convergência de uma série de potências? Como você o encontra?
   (b) O que é o intervalo de convergência de uma série de potências? Como você o encontra?

3–28 □ Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n 4^n x^n$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 3^n}$
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)^2}$
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{10^n}$
13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$
14. $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 (x-5)^n$
15. $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\,(x-1)^n$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{n 2^n}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} (x+3)^n$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n 3^n}$
21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{n+3}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n(n+1)}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^2}$
26. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x+3)^n}{n \ln n}$
27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln n)^n}$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)} x^n$

29. Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ for convergente, as séries que se seguem são convergentes?
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-2)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-4)^n$
30. Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge quando $x = -4$ e diverge quando $x = 6$. O que pode ser dito sobre a convergência ou divergência das séries a seguir?
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-3)^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$
31. Se k for um inteiro positivo, encontre o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

32. Plote na mesma tela as primeiras somas parciais $s_n(x)$ da série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, junto com a função soma $f(x) = 1/(1-x)$. Em que intervalo essas somas parciais parecem estar convergindo para $f(x)$?

33. A função J_1 definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

é chamada de *função de Bessel de ordem 1*.
(a) Encontre seu domínio.
(b) Plote as primeiras somas parciais na mesma tela.
(c) Se seu CAS tiver funções de Bessel programadas, plote J_1 na mesma tela das somas parciais na parte (b) e observe como as somas parciais aproximam J_1.

34. A função A definida por

$$A(x) = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \cdots$$

é chamada de *função de Airy*, em homenagem ao matemático e astrônomo inglês *sir* George Airy (1801-1892).
(a) Encontre o domínio da função de Airy.
(b) Plote as primeiras somas parciais $s_n(x)$ na mesma tela.
(c) Se seu CAS tiver funções de Airy programadas, plote A na mesma tela que as somas parciais na parte (b) e observe como as somas parciais aproximam A.

35. Uma função f é definida por

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \cdots$$

isto é, seus coeficientes são $c_{2n} = 1$ e $c_{2n+1} = 2$ para todo $n \geqslant 0$. Encontre o intervalo de convergência da série e encontre uma fórmula explícita para $f(x)$.

36. Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, onde $c_{n+4} = c_n$ para todo $n \geqslant 0$, encontre o intervalo de convergência da série e uma fórmula para $f(x)$.

37. Mostre que se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = c$, então o raio de convergência da série de potências $\sum c_n x^n$ é $R = 1/c$.

38. Suponha que o raio de convergência da série de potências $\sum c_n x^n$ seja R. Qual é o raio de convergência da série de potências $\sum c_n x^{2n}$?

39. Suponha que a série $\sum c_n x^n$ tenha raio de convergência 2 e que a série $\sum d_n x^n$ tenha raio de convergência 3. O que você pode dizer sobre o raio de convergência da série $\sum (c_n + d_n)x^n$? Explique.

11.9 Representações de Funções como Séries de Potências

Nesta seção aprenderemos como representar certos tipos de funções como somas de séries de potências pela manipulação de séries geométricas ou pela diferenciação ou integração de tais séries. Você pode imaginar por que queremos expressar uma função conhecida como uma soma infinita de termos. Veremos mais tarde que essa estratégia é útil para integrar funções que não têm antiderivadas elementares, para resolver equações diferenciais e para aproximar funções por polinômios. (Cientistas fazem isso para simplificar expressões que eles utilizam; cientistas que trabalham com computadores fazem isso para representar funções em calculadoras e computadores.)

Começaremos com uma equação que vimos antes:

$$\boxed{1} \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

□ Uma ilustração geométrica da Equação 1 é mostrada na Figura 1. Como a soma de uma série é o limite da seqüência de somas parciais temos

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

onde

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

é a n-ésima soma parcial. Note que quando n aumenta, $s_n(x)$ torna-se uma melhor aproximação de $f(x)$ para $-1 < x < 1$.

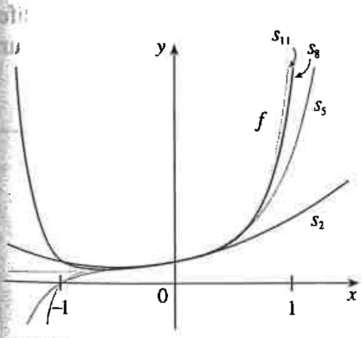


FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ e algumas somas parciais

Encontramos essa equação primeiro no Exemplo 5 da Seção 11.2, onde a obtivemos observando que ela é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$. Mas aqui nosso ponto de vista é diferente. Agora nos referiremos à Equação 1 como uma expressão da função $f(x) = 1/(1-x)$ como uma soma de uma série de potências.

EXEMPLO 1 □ Expresse $1/(1+x^2)$ como a soma de uma série de potências e encontre o intervalo de convergência.

SOLUÇÃO Trocando x por $-x^2$ na Equação 1 temos

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

□ Esse exemplo demonstra uma maneira na qual representações em séries de potência são úteis. Integrar $1/(1 + x^7)$ manualmente é incrivelmente difícil. Sistemas algébricos computacionais devolvem formas diferentes da resposta, mas eles são todos extremamente complicados. (Se você tiver um CAS, experimente-o.) Na realidade é muito mais fácil lidar com a resposta em série infinita obtida no Exemplo 8(a) do que com a resposta finita dada por um CAS.

SOLUÇÃO

(a) A primeira etapa é expressar o integrando, $1/(1 + x^7)$, como uma soma de uma série de potências. Como no Exemplo 1, começamos com a Equação 1 e trocamos x por $-x^7$:

$$\frac{1}{1+x^7} = \frac{1}{1-(-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^7)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} = 1 - x^7 + x^{14} - \cdots$$

Agora integramos termo a termo:

$$\int \frac{1}{1+x^7}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n}\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n+1}$$

$$= C + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots$$

Essa série converge para $|-x^7| < 1$, isto é, para $|x| < 1$.

(b) Aplicando o Teorema da Avaliação não importa qual antiderivada usamos, assim vamos usar a antiderivada da parte (a) com $C = 0$:

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{1+x^7}\,dx = \left[x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots \right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(7n+1)2^{7n+1}} + \cdots$$

Essa série infinita é o valor exato da integral definida, mas como é uma série alternada, podemos aproximar a soma usando o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas. Se pararmos de adicionar os termos com $n = 3$, o erro é menor do que o termo com $n = 4$:

$$\frac{1}{29 \cdot 2^{29}} \approx 6,4 \times 10^{-11}$$

Assim temos

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{1+x^7}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} \approx 0,49951374$$

□

11.9 Exercícios

1. Se o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ for 10, qual é o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$? Por quê?

2. Suponha que você saiba que a série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge para $|x| < 2$. O que você pode dizer sobre a série a seguir? Por quê?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}$$

3–10 □ Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o intervalo de convergência.

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

4. $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{1+9x^2}$

7. $f(x) = \dfrac{1}{4 + x^2}$

8. $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$

9. $f(x) = \dfrac{1}{x - 5}$

10. $f(x) = \dfrac{x}{4x + 1}$

□ Expresse a função como a soma de uma série de potências usando primeiro frações parciais. Encontre o intervalo de convergência.

11. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + x - 2}$

12. $f(x) = \dfrac{7x - 1}{3x^2 + 2x - 1}$

□ Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o raio de convergência.

13. $f(x) = \dfrac{1}{(1 + x)^2}$

14. $f(x) = \ln(1 + x)$

15. $f(x) = \dfrac{1}{(1 + x)^3}$

16. $f(x) = x \ln(1 + x)$

17. $f(x) = \ln(5 - x)$

18. $f(x) = \dfrac{x^2}{(1 - 2x)^2}$

19. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x - 2)^2}$

20. $f(x) = \operatorname{arctg}(x/3)$

□ Encontre uma representação em série de potências para f, plote f e várias somas parciais $s_n(x)$ na mesma tela. O que acontece quando n aumenta?

21. $f(x) = \ln(3 + x)$

22. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 25}$

23. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

24. $f(x) = \operatorname{tg}^{-1}(2x)$

□ Avalie a integral indefinida como uma série de potências.

25. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + x^4}\, dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x}{1 + x^5}\, dx$

27. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx$

28. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^{-1}(x^2)\, dx$

□ Use uma série de potências para aproximar a integral definida com precisão de seis casas decimais.

29. $\displaystyle\int_0^{0,2} \frac{1}{1 + x^4}\, dx$

30. $\displaystyle\int_0^{1/2} \operatorname{tg}^{-1}(x^2)\, dx$

31. $\displaystyle\int_0^{1/3} x^2 \operatorname{tg}^{-1}(x^4)\, dx$

32. $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{1 + x^6}$

33. Use o resultado do Exemplo 6 para calcular ln 1,1 com precisão de 5 casas decimais.

34. Mostre que a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

é uma solução da equação diferencial

$$f''(x) + f(x) = 0$$

35. (a) Mostre que J_0 (a função de Bessel de ordem 0 dada no Exemplo 4) satisfaz a equação diferencial

$$x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$$

(b) Avalie $\int_0^1 J_0(x)\, dx$ com precisão de três casas decimais.

36. A função de Bessel de ordem 1 é definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n + 1)!2^{2n+1}}$$

(a) Mostre que J_1 satisfaz a equação diferencial

$$x^2 J_1''(x) + x J_1'(x) + (x^2 - 1)J_1(x) = 0$$

(b) Mostre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

37. (a) Mostre que a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

é uma solução da equação diferencial

$$f'(x) = f(x)$$

(b) Mostre que $f(x) = e^x$.

38. Seja $f_n(x) = (\operatorname{sen} nx)/n^2$. Mostre que a série $\Sigma f_n(x)$ converge para todos os valores de x mas que a série de derivadas $\Sigma f_n'(x)$ diverge quando $x = 2n\pi$, n um inteiro. Para quais valores de x a série $\Sigma f_n''(x)$ converge?

39. Seja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Encontre os intervalos de convergência para f, f' e f''.

40. (a) Começando com a série geométrica $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$, encontre a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad |x| < 1$$

(b) Encontre a soma de cada uma das séries a seguir.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$, $|x| < 1$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) Encontre a soma de cada uma das séries a seguir.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1)x^n$, $|x| < 1$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

Então $$e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots$$

(b) Usando a série de Maclaurin na tabela temos

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Usamos um procedimento parecido com a divisão longa:

$$\begin{array}{r|l}
 & x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots \\
\hline
1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \cdots & x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \cdots \\
 & x - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{24}x^5 - \cdots \\
\hline
 & \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x^5 + \cdots \\
 & \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{6}x^5 + \cdots \\
\hline
 & \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots
\end{array}$$

Então $$\operatorname{tg} x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots$$

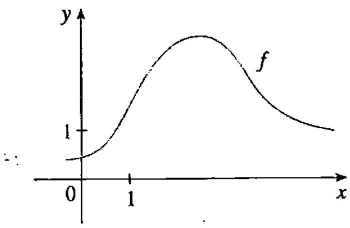
Embora não tenhamos tentado justificar as manipulações formais usadas no Exemplo 10, elas são legítimas. Existe um teorema que afirma que se $f(x) = \Sigma\, c_n x^n$ e $g(x) = \Sigma\, b_n x^n$ convergirem para $|x| < R$ e as séries forem multiplicadas como se fossem polinômios, então a série resultante também convergirá para $|x| < R$ e representará $f(x)g(x)$. Para a divisão necessitamos $b_0 \neq 0$; a série resultante converge para $|x|$, suficientemente pequeno.

11.10 Exercícios

1. Se $f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} b_n(x-5)^n$ para todo x, escreva uma fórmula para b_8.
2. O gráfico de f é mostrado. Explique por que a série

$$1{,}6 - 0{,}8(x-1) + 0{,}4(x-1)^2 - 0{,}1(x-1)^3 + \cdots$$

não é a série de Taylor de f centrada em 1.



3–8 □ Encontre a série de Maclaurin para $f(x)$ usando a definição de uma série de Maclaurin. [Assuma que f tem uma expansão em série de potências. Não mostre que $R_n(x) \to 0$.] Também encontre o raio de convergência associado.

3. $f(x) = \cos x$
4. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$
5. $f(x) = (1 + x)^{-3}$
6. $f(x) = \ln(1 + x)$
7. $f(x) = \operatorname{senh} x$
8. $f(x) = \cosh x$

9–16 □ Encontre a série de Taylor para $f(x)$ centrada no valor dado de a. [Assuma que f tem uma expansão em série de potências. Não mostre que $R_n(x) \to 0$.]

9. $f(x) = 1 + x + x^2,\quad a = 2$
10. $f(x) = x^3,\quad a = -1$
11. $f(x) = e^x,\quad a = 3$
12. $f(x) = \ln x,\quad a = 2$
13. $f(x) = 1/x,\quad a = 1$
14. $f(x) = \sqrt{x},\quad a = 4$
15. $f(x) = \operatorname{sen} x,\quad a = \pi/4$
16. $f(x) = \cos x,\quad a = -\pi/4$

17. Prove que a série obtida no Exemplo 3 representa $\cos x$ para todo x.
18. Prove que a série obtida no Exercício 15 representa $\operatorname{sen} x$ para todo x.

19. Prove que a série obtida no Exercício 7 representa senh$x$ para todo x.

20. Prove que a série obtida no Exercício 8 representa cosh x para todo x.

21–30 □ Use uma série de Maclaurin derivada nesta seção para obter a série de Maclaurin para a função dada.

21. $f(x) = \cos \pi x$

22. $f(x) = e^{-x/2}$

23. $f(x) = x \operatorname{tg}^{-1} x$

24. $f(x) = \operatorname{sen}(x^4)$

25. $f(x) = x^2 e^{-x}$

26. $f(x) = x \cos 2x$

27. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ [*Dica*: Use $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.]

28. $f(x) = \cos^2 x$

29. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

31–34 □ Encontre a série de Maclaurin de f (por qualquer método) e seu raio de convergência. Plote f e seus primeiros polinômios na mesma tela. O que você observa sobre a relação entre esses polinômios e f?

31. $f(x) = \sqrt{1 + x}$

32. $f(x) = 1/\sqrt{1 + 2x}$

33. $f(x) = \cos(x^2)$

34. $f(x) = 2^x$

35. Encontre a série de Maclaurin para $\ln(1 + x)$ e use-a para calcular $\ln 1{,}1$ com precisão de cinco casas decimais.

36. Use a série de Maclaurin para sen x para calcular sen 3° com precisão de cinco casas decimais.

37–40 □ Avalie a integral indefinida como uma série infinita.

37. $\int \operatorname{sen}(x^2)\,dx$

38. $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$

39. $\int \sqrt{x^3 + 1}\,dx$

40. $\int e^{x^3}\,dx$

41–44 □ Use séries para aproximar a integral definida com a precisão indicada.

41. $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ (três casas decimais)

42. $\int_0^{0,5} \cos(x^2)\,dx$ (três casas decimais)

43. $\int_0^{0,1} \dfrac{dx}{\sqrt{1 + x^3}}$ (erro $< 10^{-8}$)

44. $\int_0^{0,5} x^2 e^{-x^2}\,dx$ (erro $< 0{,}001$)

45–47 □ Use séries para avaliar o limite.

45. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg}^{-1} x}{x^3}$

46. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$

47. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

48. Use a série do Exemplo 10(b) para avaliar

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$$

Encontramos esse limite no Exemplo 4 da Seção 4.4 do Volume I usando a Regra de L'Hôpital três vezes. Qual método você prefere?

49–52 □ Use multiplicação ou divisão de séries de potências para encontrar os três primeiros termos diferentes de zero na série de Maclaurin para cada função.

49. $y = e^{-x^2} \cos x$

50. $y = \sec x$

51. $y = \dfrac{\ln(1 - x)}{e^x}$

52. $y = e^x \ln(1 - x)$

53–58 □ Encontre a soma da série.

53. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}$

54. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$

55. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$

56. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$

57. $3 + \dfrac{9}{2!} + \dfrac{27}{3!} + \dfrac{81}{4!} + \cdots$

58. $1 - \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} - \dfrac{(\ln 2)^3}{3!} + \cdots$

59. Prove a desigualdade de Taylor para $n = 2$, isto é, prove que se $|f'''(x)| \leq M$ para $|x - a| \leq d$, então

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{6}|x - a|^3 \quad \text{para } |x - a| \leq d$$

60. (a) Mostre que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é igual a sua série de Maclaurin.

(b) Plote a função na parte (a) e comente seu comportamento próximo da origem.

Ela mostra uma onda de uma fonte pontual S encontrando uma interface esférica de raio R centrada em C. O raio SA é refratado em direção a P.

Usando o princípio de Fermat de que a luz viaja de modo a minimizar o tempo, Hecht deriva a equação

$$\boxed{1} \qquad \frac{n_1}{\ell_o} + \frac{n_2}{\ell_i} = \frac{1}{R}\left(\frac{n_2 s_i}{\ell_i} - \frac{n_1 s_o}{\ell_o}\right)$$

onde n_1 e n_2 são índices de refração e ℓ_o, ℓ_i, s_o e s_i são as distâncias indicadas na Figura 7. Pela Lei dos Cossenos, aplicada aos triângulos ACS e ACP, temos

□ Aqui usamos a identidade

$$\cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$$

$$\boxed{2} \qquad \ell_o = \sqrt{R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R)\cos\phi}$$

$$\ell_i = \sqrt{R^2 + (s_i - R)^2 - 2R(s_i - R)\cos\phi}$$

Como a Equação 1 é difícil para se trabalhar, Gauss, em 1841, a simplificou usando a aproximação linear $\cos\phi \approx 1$ para valores pequenos de ϕ. (Isso equivale a usar o polinômio de Taylor de grau 1.) Então a Equação 1 se torna a equação mais simples a seguir [como é pedido para você mostrar no Exercício 32(a)]:

$$\boxed{3} \qquad \frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

A teoria óptica resultante é conhecida como *óptica de Gauss*, ou *óptica de primeira ordem*, e se tornou a ferramenta teórica básica usada para desenhar lentes.

Uma teoria mais precisa é obtida aproximando $\cos\phi$ por seu polinômio de Taylor de grau 3 (que é o mesmo que o polinômio de Taylor de grau 2). Ela leva em consideração raios para os quais ϕ não é tão pequeno, isto é, raios que atingem a superfície a distâncias h maiores acima do eixo. No Exercício 32(b) é pedido para você usar essa aproximação para derivar a equação mais precisa

$$\boxed{4} \qquad \frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} + h^2\left[\frac{n_1}{2s_o}\left(\frac{1}{s_o} + \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{n_2}{2s_i}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s_i}\right)^2\right]$$

A teoria óptica resultante é conhecida como *óptica de terceira ordem*.

Outras aplicações dos polinômios de Taylor à física são exploradas nos Exercícios 30, 31 e 33 e no Projeto Aplicado da página 774.

11.12 Exercícios

1. (a) Encontre os polinômios de Taylor até o grau 6 para $f(x) = \cos x$ centrada em $a = 0$. Plote f e esses polinômios na mesma tela.
   (b) Avalie f e esses polinômios em $x = \pi/4$, $\pi/2$ e π.
   (c) Comente como os polinômios de Taylor convergem para $f(x)$.

2. (a) Encontre os polinômios de Taylor até o grau 3 para $f(x) = 1/x$ centrada em $a = 1$. Plote f e esses polinômios na mesma tela.
   (b) Avalie f e esses polinômios em $x = 0{,}9$ e $1{,}3$.
   (c) Comente como os polinômios de Taylor convergem para $f(x)$.

3–10 □ Encontre o polinômio de Taylor $T_n(x)$ para a função f em a. Plote f e T_n na mesma tela.

3. $f(x) = \ln x, \quad a = 1, \quad n = 4$
4. $f(x) = e^x, \quad a = 2, \quad n = 3$
5. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/6, \quad n = 3$
6. $f(x) = \cos x, \quad a = 2\pi/3, \quad n = 4$
7. $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad a = 0, \quad n = 4$
8. $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad a = \pi/4, \quad n = 4$
9. $f(x) = e^x \operatorname{sen} x, \quad a = 0, \quad n = 3$

10. $f(x) = \sqrt{3 + x^2}$, $a = 1$, $n = 2$

11–12 □ Use um sistema algébrico computacional para encontrar os polinômios de Taylor T_n em $a = 0$ para os valores de n dados. Então plote esses polinômios e f na mesma tela.

11. $f(x) = \sec x$, $n = 2, 4, 6, 8$

12. $f(x) = \text{tg } x$, $n = 1, 3, 5, 7, 9$

13–22 □

(a) Aproxime f por um polinômio de Taylor com grau n em a.
(b) Use a Desigualdade de Taylor para estimar a precisão da aproximação $f(x) \approx T_n(x)$ quando x estiver no intervalo dado.
(c) Verifique seu resultado na parte (b) plotando $|R_n(x)|$.

13. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$, $n = 2$, $4 \leqslant x \leqslant 4{,}2$

14. $f(x) = x^{-2}$, $a = 1$, $n = 2$, $0{,}9 \leqslant x \leqslant 1{,}1$

15. $f(x) = \text{sen } x$, $a = \pi/4$, $n = 5$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$

16. $f(x) = \cos x$, $a = \pi/3$, $n = 4$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi/3$

17. $f(x) = \text{tg } x$, $a = 0$, $n = 3$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/6$

18. $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^2}$, $a = 0$, $n = 2$, $|x| \leqslant 0{,}5$

19. $f(x) = e^{x^2}$, $a = 0$, $n = 3$, $0 \leqslant x \leqslant 0{,}1$

20. $f(x) = \cosh x$, $a = 0$, $n = 5$, $|x| \leqslant 1$

21. $f(x) = x^{3/4}$, $a = 16$, $n = 3$, $15 \leqslant x \leqslant 17$

22. $f(x) = \ln x$, $a = 4$, $n = 3$, $3 \leqslant x \leqslant 5$

23. Use a informação do Exercício 5 para estimar sen 35° com precisão de cinco casas decimais.

24. Use a informação do Exercício 16 para estimar cos 69° com precisão de cinco casas decimais.

25. Use a Desigualdade de Taylor para determinar o número de termos da série de Maclaurin para e^x que devem ser usados para estimar $e^{0,1}$ com precisão de 0,00001.

26. Quantos termos da série de Maclaurin para $\ln(1 + x)$ você precisa usar para estimar ln 1,4 com precisão de 0,001?

27–28 □ Use o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas ou a Desigualdade de Taylor para estimar a gama de valores de x para os quais a aproximação dada é precisa dentro do erro estabelecido. Verifique sua resposta graficamente.

27. $\text{sen } x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$, erro $< 0{,}01$

28. $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$, erro $< 0{,}005$

29. Um carro está se movendo com velocidade de 20 m/s e aceleração de 2m/s^2 em um dado instante. Usando um polinômio de Taylor de grau 2, estime a distância que o carro se move no próximo segundo. Seria razoável usar esse polinômio para estimar a distância percorrida durante o próximo minuto?

30. A resistividade ρ de um fio condutor é a recíproca da condutividade e é medida em unidades de ohm-metros (Ω-m). A resistividade de um dado metal depende da temperatura de acordo com a equação

$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)}$$

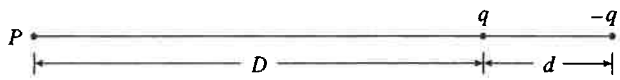
onde t é a temperatura em °C. Existem tabelas que listam os valores de α (o coeficiente de temperatura) e ρ_{20} (a resistividade a 20 °C) para vários metais. Exceto a temperaturas muito baixas, a resistividade varia praticamente linearmente com a temperatura, e assim é comum aproximar a expressão para $\rho(t)$ por seu polinômio de Taylor de grau 1 ou 2 em $t = 20$.

(a) Encontre expressões para as aproximações linear e quadrática.
(b) Para o cobre, a tabela fornece $\alpha = 0{,}0039$/°C e $\rho_{20} = 1{,}7 \times 10^{-8}$ Ω-m. Plote a resistividade do cobre e as aproximações linear e quadrática para $-250\ °\text{C} \leqslant t \leqslant 1000\ °\text{C}$.
(c) Para quais valores de t a aproximação linear coincide com a expressão exponencial com precisão de 1%?

31. Um dipolo elétrico consiste em duas cargas elétricas de magnitudes iguais e sinais opostos. Se as cargas forem q e $-q$ e estiverem localizadas a uma distância d, então o campo elétrico E no ponto P na figura é

$$E = \frac{q}{D^2} - \frac{q}{(D + d)^2}$$

Expandindo essa expressão para E como uma série de potências de d/D, mostre que E é aproximadamente proporcional a $1/D^3$ quando P está muito distante do dipolo.



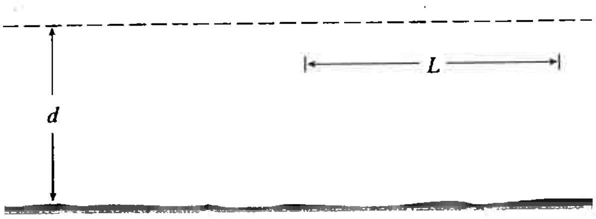
32. (a) Derive a Equação 3 para a óptica gaussiana a partir da Equação 1 aproximando $\cos \phi$ na Equação 2 por seu polinômio de Taylor de grau 1.
(b) Mostre que se $\cos \phi$ for trocado por seu polinômio de Taylor de grau 3 na Equação 2, então a Equação 1 se torna a Equação 4 para a óptica de terceira ordem. [*Dica*: Use os primeiros dois termos na série binomial para ℓ_o^{-1} e ℓ_i^{-1}. Também, use $\phi \approx \text{sen } \phi$.]

33. Se uma onda de água com comprimento L se mover com velocidade v ao longo de um corpo de água com profundidade d, como na figura, então

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi} \text{tgh} \frac{2\pi d}{L}$$

(a) Se a água for profunda, mostre que $v \approx \sqrt{gL/(2\pi)}$.
(b) Se a água for rasa, use a série de Maclaurin para tgh para mostrar que $v \approx \sqrt{gd}$. (Então, em água rasa a velocidade de uma onda tende a ser independente do comprimento da onda.)

(c) Use o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas para mostrar que se $L > 10d$, então a estimativa $v^2 \approx gd$ tem precisão de $0{,}014gL$.



34. Mostre que T_n e f têm as mesmas derivadas em a até a ordem n.

35. Na Seção 4.9 do Volume I consideramos o método de Newton para aproximar uma raiz r da equação $f(x) = 0$, e a partir de uma aproximação inicial x_1 obtivemos aproximações sucessivas, $x_2, x_3, \ldots$, onde

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Use a desigualdade de Taylor com $n = 1$, $a = x_n$ e $x = r$ para mostrar que se $f''(x)$ existir no intervalo I contendo r, x_n e x_{n+1}, e $|f''(x)| \leqslant M$, $|f'(x)| \geqslant K$ para todo $x \in I$, então

$$|x_{n+1} - r| \leqslant \frac{M}{2K}|x_n - r|^2$$

[Isso significa que se x_n for preciso até d casas decimais, então x_{n+1} é preciso até cerca de $2d$ casas decimais. Mais precisamente, se o erro no estágio n for no máximo 10^{-m}, então o erro na etapa $n + 1$ será no máximo $(M/2K)10^{-2m}$.]

Radiação Proveniente das Estrelas

Qualquer objeto emite radiação quando aquecido. Um *corpo negro* é um sistema que absorve toda a radiação que cai nele. Por exemplo, uma superfície preta não brilhante ou um buraco grande com um pequeno furo na parede (como uma fornalha siderúrgica) é um corpo negro e emite radiação de corpo negro. Até a radiação do Sol está próxima de ser a radiação de um corpo negro.

Proposta no final do século XIX, a Lei de Rayleigh-Jeans expressa a densidade de energia da radiação do corpo negro de comprimento de onda λ como

$$f(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

onde λ é medido em metros, T é a temperatura em Kelvin e k é a constante de Boltzmann. A Lei de Rayleigh-Jeans coincide com medidas experimentais para comprimentos de onda longos, mas diverge drasticamente para comprimentos de onda curtos. [A lei prediz que $f(\lambda) \to \infty$ quando $\lambda \to 0^+$ mas experiências mostraram que $f(\lambda) \to 0$.] Esse fato é conhecido como a *catástrofe do ultravioleta*.

Em 1900 Max Planck encontrou um modelo melhor (conhecido agora como a Lei de Planck) para a radiação do corpo negro:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}$$

onde λ é medido em metros, T é a temperatura em Kelvin e

$$h = \text{constante de Planck} = 6{,}6262 \times 10^{-34}\ \text{J·s}$$

$$c = \text{velocidade da luz} = 2{,}997925 \times 10^{8}\ \text{m/s}$$

$$k = \text{constante de Boltzmann} = 1{,}3807 \times 10^{-23}\ \text{J/K}$$

1. Use a Regra de L'Hôpital para mostrar que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0$$

para a Lei de Planck. Assim essa lei modela melhor a radiação do corpo negro que a Lei de Rayleigh-Jeans para comprimentos de onda mais curtos.