7.8 Exercícios

1. Explique por que cada uma das seguintes integrais é imprópria.
(a) $\int_1^2 \frac{x}{x-1}\,dx$ (b) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$
(c) $\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx$ (d) $\int_{-\infty}^{\pi/4} \cot x\,dx$

2. Quais das seguintes integrais são impróprias? Por quê?
(a) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$ (b) $\int_0^\pi \operatorname{tg} x\,dx$
(c) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-x-2}\,dx$ (d) $\int_0^\infty e^{-x^3}\,dx$

3. Encontre a área sob a curva $y = 1/x^3$ de $x = 1$ a $x = t$ e calcule-a para $t = 10$, 100 e 1 000. Então encontre a área total dessa curva para $x \geqslant 1$.

4. (a) Trace as funções $f(x) = 1/x^{1,1}$ e $g(x) = 1/x^{0,9}$ nas janelas retangulares [0,10] por [0,1] e [0,100] por [0,1].
(b) Encontre as áreas sob os gráficos de f e g de $x = 1$ a $x = t$ e calcule para $t = 10$, 100, 10^4, 10^6, 10^{10} e 10^{20}.
(c) Encontre a área total sob cada curva para $x \geqslant 1$, se ela existir.

5–40 Determine se cada integral é convergente ou divergente. Calcule aquelas que são convergentes.

5. $\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^{3/2}}\,dx$
6. $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}\,dx$
7. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{3-4x}\,dx$
8. $\int_1^\infty \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$
9. $\int_2^\infty e^{-5p}\,dp$
10. $\int_{-\infty}^0 2^r\,dr$
11. $\int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$
12. $\int_{-\infty}^\infty (y^3-3y^2)\,dy$
13. $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx$
14. $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
15. $\int_0^\infty \operatorname{sen}^2 \alpha\,d\alpha$
16. $\int_{-\infty}^\infty \cos \pi t\,dt$
17. $\int_1^\infty \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx$
18. $\int_0^\infty \frac{dz}{z^2+3z+2}$
19. $\int_{-\infty}^0 ze^{2z}\,dz$
20. $\int_2^\infty ye^{-3y}dy$
21. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$
22. $\int_{-\infty}^\infty x^3e^{-x^4}dx$
23. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{9+x^6}\,dx$
24. $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+3}\,dx$
25. $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$
26. $\int_0^\infty \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx$
27. $\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx$
28. $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$
29. $\int_{-2}^{14} \frac{1}{\sqrt[4]{x+2}}\,dx$
30. $\int_6^8 \frac{4}{(x-6)^3}\,dx$
31. $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4}\,dx$
32. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
33. $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$
34. $\int_0^5 \frac{w}{w-2}\,dw$
35. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}$
36. $\int_{\pi/2}^\pi \operatorname{cossec} x\,dx$
37. $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$
38. $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$
39. $\int_0^2 z^2 \ln z\,dz$
40. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

41–46 Esboce a região e encontre sua área (se a área for finita).

41. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant e^{-x}\}$
42. $S = \{(x, y) \mid x \leqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant e^x\}$
43. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1/(x^3+x)\}$
44. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant xe^{-x}\}$
45. $S = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x < \pi/2, 0 \leqslant y \leqslant \sec^2 x\}$
46. $S = \{(x, y) \mid -2 < x \leqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant 1/\sqrt{x+2}\}$

47. (a) Se $g(x) = (\operatorname{sen}^2 x)/x^2$, use sua calculadora ou computador para fazer uma tabela de valores aproximados de $\int_1^t g(x)\,dx$ para $t = 2$, 5, 10, 100, 1 000 e 10 000. Parece que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ é convergente?
(b) Use o Teorema da Comparação com $f(x) = 1/x^2$ para mostrar que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ é convergente.
(c) Ilustre a parte (b) colocando os gráficos de f e g na mesma tela para $1 \leqslant x \leqslant 10$. Use sua ilustração para explicar intuitivamente por que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ é convergente.

48. (a) Se $g(x) = 1/(\sqrt{x} - 1)$, use sua calculadora ou computador para fazer uma tabela de valores aproximados de $\int_2^t g(x)\,dx$ para $t = 5$, 10, 100, 1 000 e 10 000. Parece que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ é convergente ou divergente?
(b) Use o Teorema da Comparação com $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para mostrar que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ é divergente.

(c) Ilustre a parte (b) colocando os gráficos de f e g na mesma tela para $2 \leqslant x \leqslant 20$. Use sua ilustração para explicar intuitivamente porque $\int_2^\infty g(x)\,dx$ é divergente.

49–54 Use o Teorema da Comparação para determinar se a integral é convergente ou divergente.

49. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$ **50.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2+e^{-x}}{x}\,dx$

51. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}}\,dx$ **52.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{2+e^x}\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}\,dx$ **54.** $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$

55. A integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$$

é imprópria por duas razões: o intervalo $[0, \infty)$ é infinito e o integrando tem uma descontinuidade infinita em 0. Calcule escrevendo-a como uma soma de integrais impróprias do Tipo 2 e do Tipo 1, como abaixo indiado.

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$$

56. Calcule

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

pelo mesmo método do Exercício 55.

57–59 Encontre os valores de p para os quais a integral converge e calcule a integral para esses valores de p.

57. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ **58.** $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x\,(\ln x)^p}\,dx$

59. $\displaystyle\int_0^1 x^p \ln x\,dx$

60. (a) Calcule a integral $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ para $n = 0$, 1, 2 e 3.

(b) Conjecture o valor de $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ quando n é um inteiro positivo arbitrário.

(c) Demonstre sua conjectura usando a indução matemática.

61. (a) Mostre que $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$ é divergente.

(b) Mostre que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t x\,dx = 0$$

Isso mostra que não podemos definir

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t f(x)\,dx$$

62. A *velocidade média* das moléculas em um gás ideal é

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\,dv$$

onde M é o peso molecular do gás; R, a constante do gás; T, a temperatura do gás; e v, a velocidade molecular. Mostre que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

63. Sabemos do Exemplo 1 que a região $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \geqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/x\}$ tem área infinita. Mostre que pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x obtemos um sólido com volume finito.

64. Use a informação e os dados do Exercício 29 da Seção 6.4 para calcular o trabalho necessário para lançar um veículo espacial de 1.000 kg para fora do campo gravitacional da Terra.

65. Encontre a *velocidade de escape* v_0 que é necessária para lançar um foguete de massa m para fora do campo gravitacional de um planeta com massa M e raio R. Use a Lei da Gravitação de Newton (veja o Exercício 29 na Seção 6.4) e o fato de que a energia cinética inicial de $\frac{1}{2}mv_0^2$ supre o trabalho necessário.

66. Os astrônomos usam uma técnica chamada *estereografia estelar* para determinar a densidade das estrelas em um aglomerado estelar a partir da densidade (bidimensional) observada, que pode ser analisada a partir de uma fotografia. Suponha que em um aglomerado esférico de raio R a densidade das estrelas dependa somente da distância r do centro do aglomerado. Se a densidade estelar aparente for dada por $y(s)$, onde s é a distância planar observada do centro do aglomerado e $x(r)$ é a densidade real, pode ser mostrado que

$$y(s) = \int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2-s^2}}\,x(r)\,dr$$

Se a densidade real das estrelas em um aglomerado for $x(r) = \frac{1}{2}(R-r)^2$, encontre a densidade aparente $y(s)$.

67. Um fabricante de lâmpadas quer produzir lâmpadas que durem cerca de 700 horas, mas naturalmente algumas lâmpadas queimam mais rapidamente que outras. Seja $F(t)$ a fração das lâmpadas da empresa que queimam antes de t horas, assim $F(t)$ sempre está entre 0 e 1.

(a) Faça um esboço de como você acha que o gráfico de F deva parecer.

(b) Qual o significado da derivada $r(t) = F'(t)$?

(c) Qual é o valor de $\int_0^\infty r(t)\,dt$? Por quê?

68. Como vimos na Seção 3.8, uma substância radioativa se deteriora exponencialmente: a massa no tempo t é $m(t) = m(0)e^{kt}$, onde $m(0)$ é a massa inicial e k é uma constante negativa. A *vida média* M de um átomo na substância é

$$M = -k\int_0^\infty t e^{kt}\,dt$$

Para o isótopo radioativo de carbono, ^{14}C, usado na datação de radiocarbono, o valor de k é $-0{,}000121$. Encontre a vida média de um átomo ^{14}C.

69. Determine quão grande tem de ser o número a de modo que

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx < 0{,}001$$

70. Estime o valor numérico de $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ escrevendo-a como a soma de $\int_0^4 e^{-x^2}\,dx$ e $\int_4^\infty e^{-x^2}\,dx$. Aproxime a primeira integral, usando a Regra de Simpson com $n = 8$, e mostre que a segunda integral é menor que $\int_4^\infty e^{-4x}\,dx$, que é menor que 0,0000001.

71. Se $f(t)$ é contínua para $t \geqslant 0$, a *Transformada de Laplace* de f é a função F definida por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

e o domínio de F é o conjunto de todos os números para os quais a integral converge. Calcule a Transformada de Laplace das seguintes funções.

(a) $f(t) = 1$ (b) $f(t) = e^t$ (c) $f(t) = t$

72. Mostre que se $0 \leqslant f(t) \leqslant Me^{at}$ para $t \geqslant 0$, onde M e a são constantes, então a transformada de Laplace $F(s)$ existe para $s > a$.

73. Suponha que $0 \leqslant f(t) \leqslant Me^{at}$ e $0 \leqslant f'(t) \leqslant Ke^{at}$ para $t \geqslant 0$, onde f' é contínua. Se a transformada de Laplace de $f(t)$ é $F(s)$ e a transformada de Laplace de $f'(t)$ é $G(s)$, mostre que

$$G(s) = sF(s) - f(0) \qquad s > a$$

74. Se $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ é convergente e a e b são números reais, mostre que

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx + \int_b^\infty f(x)\,dx$$

75. Mostre que $\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

76. Mostre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y}\,dy$ interpretando as integrais como áreas.

77. Encontre o valor da constante C para a qual a integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{C}{x+2}\right)dx$$

converge. Calcule a integral para esse valor de C.

78. Encontre o valor da constante C para a qual a integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1}\right)dx$$

converge. Calcule a integral para esse valor de C.

79. Suponha que f seja contínua em $[0, \infty)$ e que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. É possível que $\int_0^\infty f(x)\,dx$ seja convergente?

80. Mostre que se $a > -1$ e $b > a + 1$, então a integral a seguir é convergente.

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^b}\,dx$$

7 Revisão

Verificação de Conceitos

1. Escreva a regra de integração por partes. Na prática, como você a usa?

2. Como você calcula $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$ se m for ímpar? O que acontece se n for ímpar? O que acontece se m e n forem ambos pares?

3. Se a expressão $\sqrt{a^2 - x^2}$ ocorrer em uma integral, que substituição você pode tentar? O que acontece se $\sqrt{a^2 + x^2}$ ocorrer? O que acontece se $\sqrt{x^2 - a^2}$ ocorrer?

4. Qual é a forma da decomposição em frações parciais de uma função racional $P(x)/Q(x)$ se o grau de P for menor que o grau de Q e $Q(x)$ tiver apenas fatores lineares distintos? O que acontece se um fator linear é repetido? O que acontece se $Q(x)$ tiver um fator quadrático irredutível (não repetido)? O que acontece se o fator quadrático é repetido?

5. Escreva as regras para a aproximação da integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ com a Regra do Ponto Médio, a Regra do Trapézio e a Regra de Simpson. De qual você espera a melhor estimativa? Como você aproxima o erro para cada regra?

6. Defina as seguintes integrais impróprias.

(a) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ (b) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ (c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

7. Defina a integral imprópria $\int_a^b f(x)\,dx$ para cada um dos seguintes casos.

(a) f tem uma descontinuidade infinita em a.
(b) f tem uma descontinuidade infinita em b.
(c) f tem uma descontinuidade infinita em c, onde $a < c < b$.

8. Enuncie o Teorema da Comparação para as integrais impróprias.