**37–42** Primeiro faça uma substituição e então use integração por partes para calcular a integral.

**37.** $\int \cos \sqrt{x}\, dx$

**38.** $\int t^3 e^{-t^2}\, dt$

**39.** $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\, d\theta$

**40.** $\int_0^{\pi} e^{\cos t}\, \text{sen}\, 2t\, dt$

**41.** $\int x \ln(1 + x)\, dx$

**42.** $\int \text{sen}(\ln x)\, dx$

**43–46** Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável, usando o gráfico da função e de sua primitiva (tome $C = 0$).

**43.** $\int xe^{-2x}\, dx$

**44.** $\int x^{3/2} \ln x\, dx$

**45.** $\int x^3 \sqrt{1 + x^2}\, dx$

**46.** $\int x^2\, \text{sen}\, 2x\, dx$

**47.** (a) Use a fórmula de redução no Exemplo 6 para mostrar que

$$\int \text{sen}^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}\, 2x}{4} + C$$

(b) Use a parte (a) e a fórmula de redução para calcular $\int \text{sen}^4 x\, dx$.

**48.** (a) Demonstre a fórmula de redução

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x\, \text{sen}\, x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$$

(b) Use a parte (a) para calcular $\int \cos^2 x\, dx$.
(c) Use as partes (a) e (b) para calcular $\int \cos^4 x\, dx$.

**49.** (a) Use a fórmula de redução no Exemplo 6 para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n-2} x\, dx$$

onde $n \geqslant 2$ é um inteiro.
(b) Use a parte (a) para calcular $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^3 x\, dx$ e $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^5 x\, dx$.
(c) Use a parte (a) para mostrar que, para as potências ímpares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}$$

**50.** Demonstre que, para as potências pares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2n} x\, dx = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} \frac{\pi}{2}$$

**51–54** Use integração por partes para demonstrar a fórmula de redução.

**51.** $\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx$

**52.** $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$

**53.** $\int \text{tg}^n x\, dx = \dfrac{\text{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \text{tg}^{n-2} x\, dx \quad (n \neq 1)$

**54.** $\int \sec^n x\, dx = \dfrac{\text{tg}\, x \sec^{n-2} x}{n-1} + \dfrac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\, dx \quad (n \neq 1)$

**55.** Use o Exercício 51 para encontrar $\int (\ln x)^3\, dx$.

**56.** Use o Exercício 52 para encontrar $\int x^4 e^x dx$.

**57–58** Encontre a área da região delimitada pelas curvas dadas.

**57.** $y = x^2 \ln x, \quad y = 4 \ln x$

**58.** $y = x^2 e^{-x}, \quad y = xe^{-x}$

**59–60** Use um gráfico para encontrar as coordenadas aproximadas $x$ dos pontos de intersecção das curvas dadas. A seguir, ache (aproximadamente) a área da região delimitada pelas curvas.

**59.** $y = \text{arcsen}\left(\frac{1}{2} x\right), \quad y = 2 - x^2$

**60.** $y = x \ln(x + 1), \quad y = 3x - x^2$

**61–63** Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno do eixo especificado.

**61.** $y = \cos(\pi x/2), \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1;$ em torno do eixo $y$

**62.** $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1;$ em torno do eixo $y$

**63.** $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 0;$ em torno de $x = 1$

**64.** Calcule o volume gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas $y = \ln x$, $y = 0$ e $x = 2$ em torno de cada eixo.
(a) o eixo $y$ (b) o eixo $x$

**65.** Calcule o valor médio de $f(x) = x \sec^2$ no intervalo $[0, \pi/4]$.

**66.** Um foguete acelera pela queima do combustível a bordo; assim, sua massa diminui com o tempo. Suponha que a massa inicial do foguete no lançamento (incluindo seu combustível) seja $m$, o combustível seja consumido a uma taxa $r$, e os gases de exaustão sejam ejetados a uma velocidade constante $v_e$ (relativa ao foguete). Um modelo para a velocidade do foguete no instante $t$ é dado pela seguinte equação

$$v(t) = -gt - v_e \ln \frac{m - rt}{m},$$

onde $g$ é a aceleração da gravidade e $t$ não é muito grande. Se $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$, $m = 30.000$ kg, $r = 160$ kg/s e $v_e = 3.000$ m/s, encontre a altitude do foguete 1 minuto após o lançamento.

**67.** Uma partícula que se move ao longo de uma reta tem velocidade igual a $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo após $t$ segundos. Qual a distância que essa partícula percorrerá durante os primeiros $t$ segundos?

**68.** Se $f(0) = g(0) = 0$ e $f''$ e $g''$ forem contínuas, mostre que

$$\int_0^a f(x) g''(x)\, dx = f(a) g'(a) - f'(a) g(a) + \int_0^a f''(x) g(x)\, dx.$$

**69.** Suponha que $f(1) = 2$, $f(4) = 7$, $f'(1) = 5$, $f'(4) = 3$ e $f''$ seja contínua. Encontre o valor de $\int_1^4 x f''(x)\, dx$.

**70.** (a) Use integração por partes para mostrar que

$$\int f(x)\, dx = x f(x) - \int x f'(x)\, dx$$

(b) Se $f$ e $g$ forem funções inversas e $f'$ for contínua, demonstre que

$$\int_a^b f(x)\, dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\, dy$$

[*Dica*: Use a parte (a) e faça a substituição de $y = f(x)$.]

(c) No caso em que $f$ e $g$ forem funções positivas e $b > a > 0$, desenhe um diagrama para dar uma interpretação geométrica à parte (b).

(d) Use a parte (b) para calcular $\int_1^e \ln x\, dx$.