EXEMPLO 6 Demonstre a fórmula de redução

$$\boxed{7} \qquad \int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

A Equação 7 é chamada de *fórmula de redução* porque o exponente foi reduzido para $n-1$ e $n-2$.

onde $n \geqslant 2$ é um inteiro.

SOLUÇÃO Seja

$$u = \operatorname{sen}^{n-1}x \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$

Então,

$$du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}x \cos x\,dx \qquad v = -\cos x$$

de modo que a integração por partes resulta em

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x \cos^2 x\,dx$$

Uma vez que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, temos

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx$$

Como no Exemplo 4, nessa equação isolamos a integral desejada, levando o último termo do lado direito para o lado esquerdo. Então, temos

$$n\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

ou

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

A fórmula de redução $\boxed{7}$ é útil porque usando-a repetidas vezes podemos eventualmente expressar $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ em termos de $\int \operatorname{sen} x\,dx$ (se n for ímpar) ou $\int (\operatorname{sen} x)^0\,dx = \int dx$ (se n for par).

7.1 Exercícios

1–2 Calcule a integral usando a integração por partes com as escolhas de u e dv indicadas.

1. $\int x^2 \ln x\,dx$; $\quad u = \ln x$, $dv = x^2\,dx$

2. $\int \theta \cos\theta\,d\theta$; $\quad u = \theta$, $dv = \cos\theta\,d\theta$

3–36 Calcule a integral.

3. $\int x \cos 5x\,dx$

4. $\int xe^{-x}\,dx$

5. $\int re^{r/2}\,dr$

6. $\int t \operatorname{sen} 2t\,dt$

7. $\int (x^2 + 2x)\cos x\,dx$

8. $\int t^2 \operatorname{sen} \beta t\,dt$

9. $\int \ln \sqrt[3]{x}\,dx$

10. $\int \operatorname{sen}^{-1}x\,dx$

11. $\int \operatorname{arctg} 4t\,dt$

12. $\int p^5 \ln p\,dp$

13. $\int t \sec^2 2t\,dt$

14. $\int s\,2^s\,ds$

15. $\int (\ln x)^2\,dx$

16. $\int t \operatorname{senh} mt\,dt$

17. $\int e^{2\theta} \operatorname{sen} 3\theta\,d\theta$

18. $\int e^{-\theta} \cos 2\theta\,d\theta$

19. $\int z^3 e^z\,dz$

20. $\int x \operatorname{tg}^2 x\,dx$

21. $\int \dfrac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx$

22. $\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$

23. $\int_0^{1/2} x \cos \pi x\,dx$

24. $\int_0^1 (x^2 + 1)\,e^{-x}\,dx$

25. $\int_0^1 t \cosh t\,dt$

26. $\int_4^9 \dfrac{\ln y}{\sqrt{y}}\,dy$

27. $\int_1^3 r^3 \ln r\,dr$

28. $\int_0^{2\pi} t^2 \operatorname{sen} 2t\,dt$

29. $\int_0^1 \dfrac{y}{e^{2y}}\,dy$

30. $\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(1/x)\,dr$

31. $\int_0^{1/2} \cos^{-1}x\,dx$

32. $\int_1^2 \dfrac{(\ln x)^2}{x^3}\,dx$

33. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

34. $\int_0^1 \dfrac{r^3}{\sqrt{4 + r^2}}\,dr$

35. $\int_1^2 x^4 (\ln x)^2\,dx$

36. $\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t - s)\,ds$

37–42 Primeiro faça uma substituição e então use integração por partes para calcular a integral.

37. $\int \cos \sqrt{x}\, dx$ **38.** $\int t^3 e^{-t^2}\, dt$

39. $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\, d\theta$ **40.** $\int_0^{\pi} e^{\cos t} \operatorname{sen} 2t\, dt$

41. $\int x \ln(1+x)\, dx$ **42.** $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

43–46 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável, usando o gráfico da função e de sua primitiva (tome $C = 0$).

43. $\int x e^{-2x}\, dx$ **44.** $\int x^{3/2} \ln x\, dx$

45. $\int x^3 \sqrt{1+x^2}\, dx$ **46.** $\int x^2 \operatorname{sen} 2x\, dx$

47. (a) Use a fórmula de redução no Exemplo 6 para mostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) Use a parte (a) e a fórmula de redução para calcular $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

48. (a) Demonstre a fórmula de redução

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$$

(b) Use a parte (a) para calcular $\int \cos^2 x\, dx$.
(c) Use as partes (a) e (b) para calcular $\int \cos^4 x\, dx$.

49. (a) Use a fórmula de redução no Exemplo 6 para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

onde $n \geq 2$ é um inteiro.
(b) Use a parte (a) para calcular $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\, dx$ e $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\, dx$.
(c) Use a parte (a) para mostrar que, para as potências ímpares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}$$

50. Demonstre que, para as potências pares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} \frac{\pi}{2}$$

51–54 Use integração por partes para demonstrar a fórmula de redução.

51. $\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx$

52. $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$

53. $\int \operatorname{tg}^n x\, dx = \dfrac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx \quad (n \neq 1)$

54. $\int \sec^n x\, dx = \dfrac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \dfrac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\, dx \quad (n \neq 1)$

55. Use o Exercício 51 para encontrar $\int (\ln x)^3\, dx$.

56. Use o Exercício 52 para encontrar $\int x^4 e^x dx$.

57–58 Encontre a área da região delimitada pelas curvas dadas.

57. $y = x^2 \ln x, \quad y = 4 \ln x$

58. $y = x^2 e^{-x}, \quad y = x e^{-x}$

59–60 Use um gráfico para encontrar as coordenadas aproximad dos pontos de intersecção das curvas dadas. A seguir, ache (apr madamente) a área da região delimitada pelas curvas.

59. $y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}x\right), \quad y = 2 - x^2$

60. $y = x \ln(x+1), \quad y = 3x - x^2$

61–63 Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o vol gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em to do eixo especificado.

61. $y = \cos(\pi x/2), \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1;$ em torno do eixo y

62. $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1;$ em torno do eixo y

63. $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 0;$ em torno de $x = 1$

64. Calcule o volume gerado pela rotação da região delimitada p curvas $y = \ln x$, $y = 0$ e $x = 2$ em torno de cada eixo.
(a) o eixo y (b) o eixo x

65. Calcule o valor médio de $f(x) = x \sec^2$ no intervalo $[0, \pi/4$

66. Um foguete acelera pela queima do combustível a bordo; as sua massa diminui com o tempo. Suponha que a massa inicia foguete no lançamento (incluindo seu combustível) seja combustível seja consumido a uma taxa r, e os gases de ex tão sejam ejetados a uma velocidade constante v_e (relativa ao guete). Um modelo para a velocidade do foguete no instant dado pela seguinte equação

$$v(t) = -gt - v_e \ln \frac{m - rt}{m},$$

onde g é a aceleração da gravidade e t não é muito grande $g = 9{,}8$ m/s², $m = 30.000$ kg, $r = 160$ kg/s e $v_e = 3.000$ m/s, contre a altitude do foguete 1 minuto após o lançamento.

67. Uma partícula que se move ao longo de uma reta tem vel dade igual a $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo após t segun Qual a distância que essa partícula percorrerá durante os meiros t segundos?

68. Se $f(0) = g(0) = 0$ e f'' e g'' forem contínuas, mostre que

$$\int_0^a f(x) g''(x)\, dx = f(a) g'(a) - f'(a) g(a) + \int_0^a f''(x) g(x)\, dx.$$

69. Suponha que $f(1) = 2$, $f(4) = 7$, $f'(1) = 5$, $f'(4) = 3$ e f'' contínua. Encontre o valor de $\int_1^4 x f''(x)\, dx$.

70. (a) Use integração por partes para mostrar que

$$\int f(x)\, dx = x f(x) - \int x f'(x)\, dx$$

(b) Se f e g forem funções inversas e f' for contínua, demon que

$$\int_a^b f(x)\, dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\, dy$$

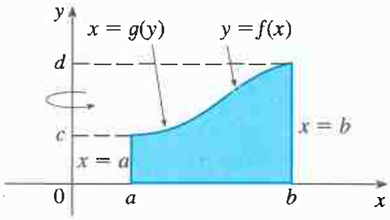
[*Dica*: Use a parte (a) e faça a substituição de $y = f(x)$.]
(c) No caso em que f e g forem funções positivas e $b > a > 0$, senhe um diagrama para dar uma interpretação geométri parte (b).
(d) Use a parte (b) para calcular $\int_1^e \ln x\, dx$.

71. Chegamos à Fórmula 6.3.2, $V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$, utilizando cascas cilíndricas, mas agora podemos usar integração por partes para demonstrá-la usando o método das fatias da Seção 6.2, ao menos para o caso em que f for injetora e, portanto, tiver uma função inversa g. Use a figura para mostrar que

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi[g(y)]^2\,dy$$

Faça a substituição $y = f(x)$ e então use integração por partes na integral resultante para demostrar que

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$



72. Seja $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$.

(a) Mostre que $I_{2n+2} \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n}$.

(b) Use o Exercício 50 para mostrar que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

(c) Use as partes (a) e (b) para mostrar que

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1$$

e deduzir que $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1}/I_{2n} = 1$.

(d) Use a parte (c) e os Exercícios 49 e 50 para mostrar que

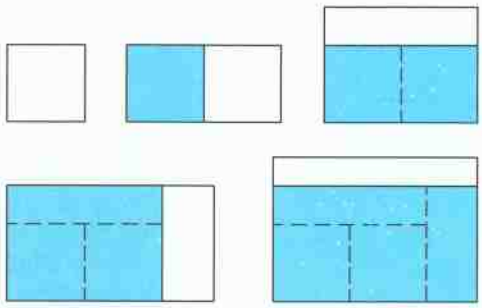
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Essa fórmula geralmente é escrita como um produto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots$$

que é chamado produto de *Wallis*.

(e) Construímos retângulos como a seguir. Comece com um quadrado de área 1 e coloque retângulos de área 1 alternadamente ao lado ou no topo do retângulo anterior (veja a figura). Encontre o limite da relação largura/altura desses retângulos.



7.2 Integrais Trigonométricas

Nesta seção usaremos as identidades trigonométricas para integrar certas combinações de funções trigonométricas. Começaremos com as potências de seno e cosseno.

EXEMPLO 1 Calcule $\int \cos^3 x\,dx$.

SOLUÇÃO A simples substituição de $u = \cos x$ não ajuda, porque assim $du = -\operatorname{sen} x\,dx$. Para integramos potências de cosseno, necessitaríamos de um fator extra sen x. De forma semelhante, uma potência de seno pediria um fator extra cos x. Portanto, aqui podemos separar um fator cosseno e converter o fator $\cos^2 x$ restante em uma expressão envolvendo o seno, usando a identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x$$

Podemos então calcular a integral, substituindo $u = \operatorname{sen} x$, de modo que $du = \cos x\,dx$ e

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x\,dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx \\ &= \int (1 - u^2)\,du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C \\ &= \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C\end{aligned}$$

EXEMPLO 9 Calcule $\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x \, dx$.

SOLUÇÃO Essa integral poderia ser calculada utilizando integração por partes, mas é mais fácil usar a identidade na Equação 2(a) como a seguir:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x \, dx &= \int \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen} 9x] \, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int (-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x) \, dx \\ &= \tfrac{1}{2}(\cos x - \tfrac{1}{9}\cos 9x) + C\end{aligned}$$

7.2 Exercícios

1–49 Calcule a integral.

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$
2. $\int \operatorname{sen}^6 x \cos^3 x \, dx$
3. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7\theta \cos^5\theta \, d\theta$
4. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \, dx$
5. $\int \operatorname{sen}^2(\pi x) \cos^5(\pi x) \, dx$
6. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx$
7. $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta$
8. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(\tfrac{1}{3}\theta) \, d\theta$
9. $\int_0^{\pi} \cos^4(2t) \, dt$
10. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos^4 t \, dt$
11. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$
12. $\int_0^{\pi/2} (2 - \operatorname{sen}\theta)^2 \, d\theta$
13. $\int t \operatorname{sen}^2 t \, dt$
14. $\int \cos\theta \cos^5(\operatorname{sen}\theta) \, d\theta$
15. $\int \dfrac{\cos^5\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}\alpha}} \, d\alpha$
16. $\int x \operatorname{sen}^3 x \, dx$
17. $\int \cos^2 x \operatorname{tg}^3 x \, dx$
18. $\int \operatorname{cotg}^5\theta \operatorname{sen}^4\theta \, d\theta$
19. $\int \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x} \, dx$
20. $\int \cos^2 x \operatorname{sen} 2x \, dx$
21. $\int \operatorname{tg} x \sec^3 x \, dx$
22. $\int \operatorname{tg}^2\theta \sec^4\theta \, d\theta$
23. $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$
24. $\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x) \, dx$
25. $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x \, dx$
26. $\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta \operatorname{tg}^4\theta \, d\theta$
27. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x \, dx$
28. $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^3 x \, dx$
29. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec x \, dx$
30. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^4 t \, dt$
31. $\int \operatorname{tg}^5 x \, dx$
32. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec x \, dx$
33. $\int x \sec x \operatorname{tg} x \, dx$
34. $\int \dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^3\phi} \, d\phi$
35. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^2 x \, dx$
36. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^3 x \, dx$
37. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^5\phi \operatorname{cossec}^3\phi \, d\phi$
38. $\int \operatorname{cossec}^4 x \operatorname{cotg}^6 x \, dx$
39. $\int \operatorname{cossec} x \, dx$
40. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{cossec}^3 x \, dx$
41. $\int \operatorname{sen} 8x \cos 5x \, dx$
42. $\int \cos \pi x \cos 4\pi x \, dx$
43. $\int \operatorname{sen} 5\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta$
44. $\int \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x} \, dx$
45. $\int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \cos 2x} \, dx$
46. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - \cos 4\theta} \, d\theta$
47. $\int \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sec^2 x} \, dx$
48. $\int \dfrac{dx}{\cos x - 1}$
49. $\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx$

50. Se $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^6 x \sec x \, dx = I$, expresse o valor de $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^8 x \sec x \, dx$ em termos de I.

51–54 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável colocando em um gráfico o integrando e sua primitiva (tome $C = 0$).

51. $\int x \operatorname{sen}^2(x^2) \, dx$
52. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x \, dx$
53. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 6x \, dx$
54. $\int \sec^4 \dfrac{x}{2} \, dx$

55. Encontre o valor médio da função $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

56. Calcule $\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$ por quatro métodos:
(a) a substituição $u = \cos x$,
(b) a substituição $u = \operatorname{sen} x$,
(c) a identidade $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
(d) integração por partes
Explique os aspectos diferentes de suas respostas.

57–58 Encontre a área da região delimitada pelas curvas dadas.

57. $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = \cos^2 x$, $-\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/4$
58. $y = \operatorname{sen}^3 x$, $y = \cos^3 x$, $\pi/4 \leqslant x \leqslant 5\pi/4$

É necessário uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

59–60 Use um gráfico do integrando para conjecturar o valor da integral. Então, utilize os métodos desta seção para demonstrar que sua conjectura está correta.

59. $\int_0^{2\pi} \cos^3 x\, dx$

60. $\int_0^2 \operatorname{sen} 2\pi x \cos 5\pi x\, dx$

61–64 Encontre o volume obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno dos eixos especificados.

61. $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi$; em torno do eixo x

62. $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; em torno do eixo x

63. $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$; em torno do $y = 1$

64. $y = \sec x$, $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/3$; em torno do $y = -1$

65. Uma partícula se move em linha reta com função velocidade $v(t) = \operatorname{sen} \omega t \cos^2 \omega t$. Encontre sua função posição $s = f(t)$ se $f(0) = 0$.

66. A eletricidade doméstica é fornecida na forma de corrente alternada que varia de 155 V a -155 V com uma frequência de 60 ciclos por segundo (Hz). A voltagem então é dada pela seguinte equação:

$$E(t) = 155 \operatorname{sen}(120\pi t)$$

onde t é o tempo em segundos. Os voltímetros leem a voltagem RMS (raiz da média quadrática), que é a raiz quadrada do valor médio de $[E(t)]^2$ em um ciclo.

(a) Calcule a voltagem RMS da corrente doméstica.

(b) Muitos fornos elétricos requerem a voltagem RMS de 220 V. Encontre a amplitude A correspondente necessária para a voltagem $E(t) = A \operatorname{sen}(120\pi t)$.

67–69 Demonstre a fórmula, onde m e n são inteiros positivos.

67. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = 0$

68. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$

69. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$

70. Uma *série de Fourier finita* é dada pela soma

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen} nx \\ &= a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_N \operatorname{sen} Nx \end{aligned}$$

Mostre que o m-ésimo coeficiente a_m é dado pela fórmula

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\, dx$$

7.3 Substituição Trigonométrica

Para encontrar a área de um círculo ou uma elipse, uma integral da forma $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ aparece, onde $a > 0$. Se ela fosse $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, a substituição $u = a^2 - x^2$ poderia ser eficaz, mas, como está, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\, dx$ é mais difícil. Se mudarmos a variável de x para θ pela substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$, então a identidade $1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ permitirá que nos livremos da raiz, porque

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a\,|\cos\theta|$$

Observe a diferença entre a substituição $u = a^2 - x^2$ (na qual a nova variável é uma função da antiga) e a substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$ (a variável antiga é uma função da nova).

Em geral, podemos fazer uma substituição da forma $x = g(t)$, usando a Regra da Substituição ao contrário. Para simplificarmos nossos cálculos, presumimos que g tenha uma função inversa, isto é, g é injetora. Nesse caso, se substituirmos u por x e x por t na Regra de Substituição (Equação 5.5.4), obteremos

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t))g'(t)\, dt$$

Esse tipo de substituição é chamado de *substituição inversa*.

Podemos fazer a substituição inversa $x = a \operatorname{sen}\theta$ desde que esta defina uma função injetora. Isso pode ser conseguido pela restrição de θ no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Na tabela a seguir listamos as substituições trigonométricas que são eficazes para as expressões radicais dadas em razão de certas identidades trigonométricas. Em cada caso, a restrição de θ é imposta para assegurar que a função que define a substituição seja injetora. (Estes são os mesmos intervalos usados na Seção 1.6 na definição de funções inversas.)

A Figura 5 mostra os gráficos do integrando no Exemplo 7 o de sua integral indefinida (com $C = 0$). Qual é qual?

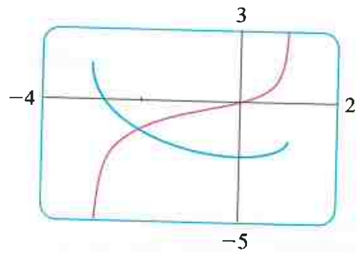


FIGURA 5

Isso sugere que façamos a substituição $u = x + 1$. Então $du = dx$ e $x = u - 1$, de modo que

$$\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx = \int \frac{u - 1}{\sqrt{4 - u^2}}\, du$$

Agora substituímos $u = 2 \operatorname{sen} \theta$, obtendo $du = 2 \cos \theta \, d\theta$ e $\sqrt{4 - u^2} = 2 \cos \theta$, de forma que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx &= \int \frac{2 \operatorname{sen} \theta - 1}{2 \cos \theta}\, 2 \cos \theta \, d\theta \\
&= \int (2 \operatorname{sen} \theta - 1)\, d\theta \\
&= -2 \cos \theta - \theta + C \\
&= -\sqrt{4 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C \\
&= -\sqrt{3 - 2x - x^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

7.3 Exercícios

1–3 Calcule a integral usando a substituição trigonométrica indicada. Esboce e coloque legendas no triângulo retângulo associado.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}\, dx$; $x = 3 \sec \theta$
2. $\displaystyle\int x^3\sqrt{9 - x^2}\, dx$; $x = 3 \operatorname{sen} \theta$
3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}}\, dx$; $x = 3 \operatorname{tg} \theta$

4–30 Calcule a integral.

4. $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1 - x^2}\, dx$
5. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t^3\sqrt{t^2 - 1}}\, dt$
6. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}\, dx$
7. $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$; $a > 0$
8. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2 - 16}}$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$
10. $\displaystyle\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2 + 2}}\, dt$
11. $\displaystyle\int \sqrt{1 - 4x^2}\, dx$
12. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{5 - u^2}}$
13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3}\, dx$
14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$
15. $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$
16. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dx}{x^5\sqrt{9x^2 - 1}}$
17. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 7}}\, dx$
18. $\displaystyle\int \frac{dx}{[(ax)^2 - b^2]^{3/2}}$
19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\, dx$
20. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx$
21. $\displaystyle\int_0^{0,6} \frac{x^2}{\sqrt{9 - 25x^2}}\, dx$
22. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1}\, dx$
23. $\displaystyle\int \sqrt{5 + 4x - x^2}\, dx$
24. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$
25. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx$
26. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(3 + 4x - 4x^2)^{3/2}}\, dx$
27. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + 2x}\, dx$
28. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 2x + 2)^2}\, dx$
29. $\displaystyle\int x\sqrt{1 - x^4}\, dx$
30. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}}\, dt$

31. (a) Use substituição trigonométrica para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C.$$

(b) Use a substituição hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$ para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Essas fórmulas estão interligadas pela Fórmula 3.11.3.

32. Calcule

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\, dx$$

É necessário uma calculadora gráfica ou computador

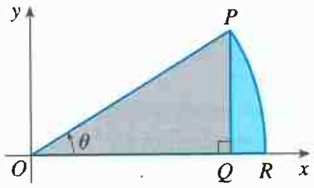
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

(a) por substituição trigonométrica.
(b) por substituição hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$.

33. Encontre o valor médio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}/x$, $1 \leqslant x \leqslant 7$.

34. Encontre a área da região delimitada pela hipérbole $9x^2 - 4y^2 = 36$ e a reta $x = 3$.

35. Demonstre a fórmula $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$ para a área de um setor circular com raio r e ângulo central θ. [*Dica*: Suponha que $0 < \theta < \pi/2$ e coloque o centro do círculo na origem, assim ele terá a equação $x^2 + y^2 = r^2$. Então A é a soma da área do triângulo POQ e a área da região PQR na figura.]



36. Calcule a integral

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - 2}}$$

Coloque em um gráfico o integrando e a integral indefinida e verifique se sua resposta é razoável.

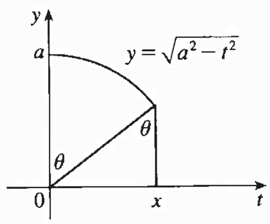
37. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região delimitada pelas curvas $y = 9/(x^2 + 9)$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 3$.

38. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $x = 1$ da região sob a curva $y = x\sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

39. (a) Use substituição trigonométrica para verificar que

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - t^2}\, dt = \tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{sen}^{-1}(x/a) + \tfrac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}.$$

(b) Use a figura para dar interpretações geométricas de ambos os termos no lado direito da equação na parte (a).



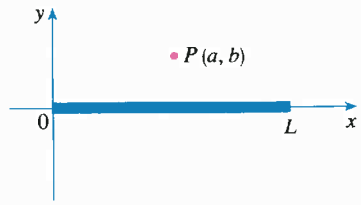
40. A parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ divide o disco $x^2 + y^2 \leqslant 8$ em duas partes. Encontre as áreas de ambas as partes.

41. Um toro é gerado pela rotação do círculo $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ ao redor do eixo x. Ache o volume delimitado pelo toro.

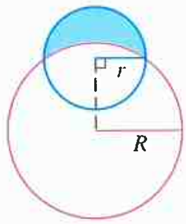
42. Uma barra carregada de comprimento L produz um campo elétrico no ponto $P(a, b)$ dado por

$$E(P) = \int_{-a}^{L-a} \frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + b^2)^{3/2}}\, dx$$

em que λ é a densidade de carga por unidade de comprimento da barra e ε_0, a permissividade do vácuo (veja a figura). Calcule a integral para determinar uma expressão para o campo elétrico $E(P)$.



43. Encontre a área da região em forma de *lua crescente* delimitada pelos arcos dos círculos de raios r e R. (Veja a figura.)



44. Um tanque de armazenamento de água tem a forma de um cilindro com diâmetro de 10 m. Ele está montado de forma que as secções transversais circulares são verticais. Se a profundidade da água é 7 m, qual a porcentagem da capacidade total usada?

Podemos calcular essa integral fatorando $u^2 - 4$ em $(u - 2)(u + 2)$ e usando as frações parciais ou usando a Fórmula 6 com $a = 2$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx &= 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2-4} \\ &= 2u + 8 \cdot \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C \\ &= 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C\end{aligned}$$

7.4 Exercícios

1–6 Escreva as formas de decomposição em frações parciais da função (como no Exemplo 7). Não determine os valores numéricos dos coeficientes.

1. (a) $\dfrac{1+6x}{(4x-3)(2x+5)}$ (b) $\dfrac{10}{5x^2-2x^3}$

2. (a) $\dfrac{x}{x^2+x-2}$ (b) $\dfrac{x^2}{x^2+x+2}$

3. (a) $\dfrac{x^4+1}{x^5+4x^3}$ (b) $\dfrac{1}{(x^2+9)^2}$

4. (a) $\dfrac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2+2x+1}$ (b) $\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2+x}$

5. (a) $\dfrac{x^6}{x^2-4}$ (b) $\dfrac{x^4}{(x^2-x+1)(x^2+2)^2}$

6. (a) $\dfrac{t^6+1}{t^6+t^3}$ (b) $\dfrac{x^5+1}{(x^2-x)(x^4+2x^2+1)}$

7–38 Calcule a integral.

7. $\displaystyle\int \frac{x}{x-6}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{r^2}{r+4}\,dr$

9. $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{(t+4)(t-1)}\,dt$

11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1}\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-4}{x^2+5x+6}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{ax}{x^2-bx}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$

15. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3+2x^2}\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}\,dx$

17. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}\,dy$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+16}{(2x+1)(x-2)^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x^3+4}{x^2+4}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{ds}{s^2(s-1)^2}$

23. $\displaystyle\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{4x}{x^3+x^2+x+1}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+4}{x^4+3x^2+2}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+13}\,dx$

33. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+3}\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{x^5+x-1}{x^3+1}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$

36. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^5+5x^3+5x}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+7}{(x^2-4x+6)^2}\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+3x-2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

39–52 Faça uma substituição para expressar o integrando como uma função racional e então calcule a integral.

39. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x}$

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + x\sqrt{x}}$

42. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$

44. $\displaystyle\int_{1/3}^{3} \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$ [*Dica:* Substitua $u = \sqrt[6]{x}$.]

46. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$

47. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - 3\cos x}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 t}{\operatorname{tg}^2 t + 3\operatorname{tg} t + 2}\,dt$

50. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+1)}\,dx$

51. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$

52. $\displaystyle\int \frac{\cosh t}{\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{senh}^4 t}\,dt$

53–54 Use integração por partes, juntamente com as técnicas desta seção, para calcular a integral.

53. $\displaystyle\int \ln(x^2 - x + 2)dx$

54. $\displaystyle\int x\,\operatorname{tg}^{-1}x\,dx$

55. Use um gráfico de $f(x) = 1/(x^2 - 2x - 3)$ para decidir se $\int_0^2 f(x)\,dx$ é positiva ou negativa. Utilize o gráfico para dar uma estimativa aproximada do valor da integral e então use frações parciais para encontrar o valor exato.

56. Calcule

$$\int \frac{1}{x^2+k}\,dx$$

considerando diversos casos para a constante k.

57–58 Calcule a integral completando o quadrado e usando a Fórmula 6.

57. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x}$

58. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{4x^2+12x-7}\,dx$

59. O matemático alemão Karl Weierstrass (1815-1897) observou que a substituição $t = \operatorname{tg}(x/2)$ converte qualquer função racional de sen x e cos x em uma função racional ordinária de t.

(a) Se $t = \operatorname{tg}(x/2)$, $-\pi < x < \pi$, esboce um triângulo retângulo ou use as identidades trigonométricas para mostrar que

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

(b) Mostre que

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

(c) Mostre que

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

60–63 Use a substituição do Exercício 59 para transformar o integrando em uma função racional de t e então calcule a integral.

60. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\cos x}$

61. $\displaystyle\int \frac{1}{3\operatorname{sen} x - 4\cos x}\,dx$

62. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x - \cos x}\,dx$

63. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2+\cos x}\,dx$

64–65 Encontre a área da região sob a curva dada de 1 até 2.

64. $y = \dfrac{1}{x^3+x}$

65. $y = \dfrac{x^2+1}{3x-x^2}$

66. Encontre o volume do sólido resultante se a região sob a curva $y = 1/(x^2 + 3x + 2)$ de $x = 0$ a $x = 1$ for girada em torno do: (a) eixo x e (b) eixo y.

67. Um método de retardar o crescimento de uma população de insetos sem usar pesticidas é introduzir na população um número de machos estéreis que cruzam com fêmeas férteis, mas não produzem filhotes. Se P representar o número de fêmeas na população de insetos, S, o número de machos estéreis introduzidos a cada geração e r, a taxa de crescimento populacional natural, então a população de fêmeas está relacionada com o instante t através de

$$t = \int \frac{P+S}{P[(r-1)P-S]}\,dP$$

Suponha que uma população de insetos com 10 000 fêmeas cresça a uma taxa de $r = 0{,}10$ e que 900 machos estéreis sejam adicionados. Calcule a integral para dar uma equação relacionando a população de fêmeas com o tempo. (Observe que a equação resultante não pode ser resolvida explicitamente para P.)

68. Fatore $x^4 + 1$ como uma diferença de quadrados adicionando e subtraindo a mesma quantidade. Use essa fatoração para calcular $\int 1\,(x^4 + 1)dx$.

SCA **69.** (a) Use um sistema de computação algébrica para encontrar a decomposição em frações parciais da função

$$f(x) = \frac{4x^3 + 27x^2 + 5x - 32}{30x^5 - 13x^4 + 50x^3 - 286x^2 - 299x - 70}$$

(b) Use parte (a) para encontrar $\int f(x)\,dx$ (manualmente) e compare com o resultado se for usado um SCA para integrar f diretamente. Comente qualquer discrepância.

SCA **70.** (a) Encontre a decomposição em frações parciais da função

$$f(x) = \frac{12x^5 - 7x^3 - 13x^2 + 8}{100x^6 - 80x^5 + 116x^4 - 80x^3 + 41x^2 - 20x + 4}$$

(b) Use a parte (a) para encontrar $\int f(x)\,dx$ e trace os gráficos de f e de sua integral indefinida na mesma tela.

(c) Use o gráfico de f para descobrir as principais características do gráfico de $\int f(x)\,dx$.

71. Suponha que F, G e Q sejam polinômios e

$$\frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{G(x)}{Q(x)}$$

$\int e^{x^2} dx$ nos termos das funções que conhecemos. (No Capítulo 11, no entanto, veremos como expressar $\int e^{x^2}\,dx$ como uma série infinita.) O mesmo pode ser dito das seguintes integrais:

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \int \operatorname{sen}(x^2)\,dx \qquad \int \cos(e^x)\,dx$$

$$\int \sqrt{x^3+1}\,dx \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

De fato, a maioria das funções elementares não tem primitivas elementares. Você pode ter a certeza, entretanto, de que todas as integrais nos exercícios a seguir são funções elementares.

7.5 Exercícios

1–82 Calcule a integral.

1. $\int \cos x\,(1 + \operatorname{sen}^2 x)\,dx$
2. $\int_0^1 (3x+1)^{\sqrt{2}}\,dx$
3. $\int \frac{\operatorname{sen} x + \sec x}{\operatorname{tg} x}\,dx$
4. $\int \operatorname{tg}^3\theta\,d\theta$
5. $\int_0^2 \frac{2t}{(t-3)^2}\,dt$
6. $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^4}}\,dx$
7. $\int_{-1}^1 \frac{e^{\operatorname{arctg} y}}{1+y^2}\,dy$
8. $\int t\operatorname{sen} t\cos t\,dt$
9. $\int_1^3 r^4 \ln r\,dr$
10. $\int_0^4 \frac{x-1}{x^2-4x-5}\,dx$
11. $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx$
12. $\int \frac{x}{x^4+x^2+1}\,dx$
13. $\int \operatorname{sen}^5 t\cos^4 t\,dt$
14. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$
15. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$
16. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
17. $\int_0^\pi t\cos^2 t\,dt$
18. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$
19. $\int e^{x+e^x}\,dx$
20. $\int e^2\,dx$
21. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$
22. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}\,dx$
23. $\int_0^1 (1+\sqrt{x})^8\,dx$
24. $\int_0^4 \frac{6z+5}{2z+1}\,dz$
25. $\int \frac{3x^2-2}{x^2-2x-8}\,dx$
26. $\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x-8}\,dx$
27. $\int \frac{dx}{1+e^x}$
28. $\int \operatorname{sen}\sqrt{at}\,dt$
29. $\int \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx$
30. $\int_{-1}^2 |e^x-1|\,dx$
31. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$
32. $\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+3}\,dx$
33. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$
34. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1+4\operatorname{cotg} x}{4-\operatorname{cotg} x}\,dx$
35. $\int \cos 2x\cos 6x\,dx$
36. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^2\operatorname{tg} x}{1+\cos^4 x}\,dx$
37. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3\theta\sec^2\theta\,d\theta$
38. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{cotg}\theta}{\sec\theta}\,d\theta$
39. $\int \frac{\sec\theta\operatorname{tg}\theta}{\sec^2\theta-\sec\theta}\,d\theta$
40. $\int \frac{1}{\sqrt{4y^2-4y-3}}\,dy$
41. $\int \theta\operatorname{tg}^2\theta\,d\theta$
42. $\int \frac{\operatorname{tg}^{-1}x}{x^2}\,dx$
43. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$
44. $\int \sqrt{1+e^x}\,dx$

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

45. $\int x^5 e^{-x^3}\,dx$

46. $\int \frac{(x-1)e^x}{x^2}\,dx$

47. $\int x^3(x-1)^{-4}\,dx$

48. $\int_0^1 x\sqrt{2-\sqrt{1-x^2}}\,dx$

49. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x+1}}\,dx$

50. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x+1}}\,dx$

51. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+1}}\,dx$

52. $\int \frac{dx}{x(x^4+1)}$

53. $\int x^2 \operatorname{senh} mx\,dx$

54. $\int (x+\operatorname{sen} x)^2\,dx$

55. $\int \frac{dx}{x+x\sqrt{x}}$

56. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}$

57. $\int x\sqrt[3]{x+c}\,dx$

58. $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

59. $\int \cos x\cos^3 x(\operatorname{sen} x)\,dx$

60. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-1}}$

61. $\int \frac{d\theta}{1+\cos\theta}$

62. $\int \frac{d\theta}{1+\cos^2\theta}$

63. $\int \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx$

64. $\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\,dx$

65. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^4 x}\,dx$

66. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{sen} x\cos x}\,dx$

67. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx$

68. $\int \frac{x^2}{x^6+3x^3+2}\,dx$

69. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$

70. $\int \frac{1}{1+2e^x-e^{-x}}\,dx$

71. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

72. $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx$

73. $\int \frac{x+\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

74. $\int \frac{4^x+10^x}{2^x}\,dx$

75. $\int \frac{1}{(x-2)(x^2+4)}\,dx$

76. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^4}$

77. $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

78. $\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$

79. $\int x\operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$

80. $\int \frac{\sec x\cos 2x}{\operatorname{sen} x+\sec x}\,dx$

81. $\int \sqrt{1-\operatorname{sen} x}\,dx$

82. $\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x}\,dx$

83. As funções $y = e^{x^2}$ e $y = x^2e^{x^2}$ não têm primitivas expressas por meio de funções elementares, mas $y = (2x^2+1)\,e^{x^2}$ tem. Calcule $\int(2x^2+1)\,e^{x^2}dx$.

84. Sabemos que $F(x) = \int_0^x e^{e^t}\,dt$ é uma função contínua pelo TFC1, embora não seja uma função elementar. As funções

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \quad \text{e} \quad \int \frac{1}{\ln x}\,dx$$

também não são elementares, mas podem ser expressas em termos de F. Calcule as seguintes integrais em termos de F.

(a) $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$ (b) $\int_2^3 \frac{1}{\ln x}\,dx$

7.6 Integração Usando Tabelas e Sistemas de Computação Algébrica

Nesta seção descreveremos como usar as tabelas e os sistemas de computação algébrica para integrar as funções que têm primitivas elementares. Você deve ter em mente, contudo, que até mesmo os mais poderosos sistemas de computação algébrica não podem encontrar fórmulas explícitas para as primitivas de funções como e^{x^2} ou outras funções descritas no final da Seção 7.5.

Tabelas de Integrais

As tabelas de integrais indefinidas são muito úteis quando nos deparamos com uma integral que é difícil de calcular manualmente e não temos acesso a um sistema de computação algébrica. Uma tabela relativamente curta de 120 integrais é dada no fim do livro. Tabelas mais abrangentes estão disponíveis nas *Tabelas e Fórmulas Matemáticas Padrão*, 31ª ed. de Daniel Zwillinger (Boca Raton, FL, 2002) (709 entradas) ou na *Tabela de Integrais, Séries e Produtos* de Gradshteyn e Ryzhik, 7e (San Diego, 2007), que contém centenas de páginas de integrais. Devemos nos lembrar, contudo, que as integrais frequentemente não ocorrem da maneira exata como foram listadas nas tabelas. Geralmente temos que usar a regra de substituição ou manipulação algébrica para transformar uma dada integral em uma das formas da tabela.