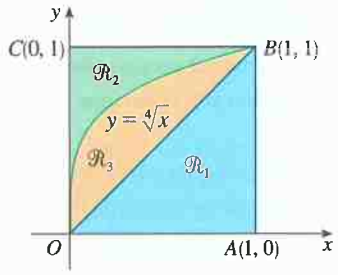
6.2 Exercícios

1–18 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno das retas especificadas. Esboce a região, o sólido e um disco ou arruela típicos.

1. $y = 2 - \frac{1}{2}x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2;$ em torno do eixo x
2. $y = 1 - x^2,\ y = 0;$ em torno do eixo x
3. $y = 1/x,\ x = 1,\ x = 2,\ y = 0;$ em torno do eixo x
4. $y = \sqrt{25 - x^2},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4;$ em torno do eixo x
5. $x = 2\sqrt{y},\ x = 0,\ y = 9;$ em torno do eixo y
6. $y = \ln x,\ y = 1,\ y = 2,\ x = 0;$ em torno do eixo y
7. $y = x^3,\ y = x,\ x \geqslant 0;$ em torno do eixo x
8. $y = \frac{1}{4}x^2,\ y = 5 - x^2;$ em torno do eixo x
9. $y^2 = x,\ x = 2y;$ em torno do eixo y
10. $y = \frac{1}{4}x^2,\ x = 2,\ y = 0;$ em torno do eixo y
11. $y = x^2,\ x = y^2;$ em torno de $y = 1$
12. $y = e^{-x},\ y = 1,\ x = 2;$ em torno de $y = 2$
13. $y = 1 + \sec x,\ y = 3;$ em torno de $y = 1$
14. $y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ 0 \leq x \leq \pi/4;$ em torno de $y = -1$
15. $x = y^2,\ x = 1;$ em torno de $x = 1$
16. $y = x,\ y = \sqrt{x};$ em torno de $x = 2$
17. $y = x^2,\ x = y^2;$ em torno de $x = -1$
18. $y = x,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4;$ em torno de $x = 1$

19–30 Veja a figura e encontre o volume gerado pela rotação da região ao redor da reta especificada.



19. $\mathcal{R}_1$ em torno de OA
20. $\mathcal{R}_1$ em torno de OC
21. $\mathcal{R}_1$ em torno de AB
22. $\mathcal{R}_1$ em torno de BC
23. $\mathcal{R}_2$ em torno de OA
24. $\mathcal{R}_2$ em torno de OC
25. $\mathcal{R}_2$ em torno de AB
26. $\mathcal{R}_2$ em torno de BC
27. $\mathcal{R}_3$ em torno de OA
28. $\mathcal{R}_3$ em torno de OC
29. $\mathcal{R}_3$ em torno de AB
30. $\mathcal{R}_3$ em torno de BC

31–34 Encontre uma integral para o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas sobre a reta especificada. Em seguida, use a calculadora para determinar a integral com precisão de cinco casas decimais.

31. $y = e^{-x^2},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1$
    (a) em torno do eixo x (b) em torno de $y = -1$
32. $y = 0,\ y = \cos^2 x,\ -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$
    (a) em torno do eixo x (b) em torno de $y = 1$
33. $x^2 + 4y^2 = 4$
    (a) em torno de $y = 2$ (b) em torno de $x = 2$
34. $y = x^2,\ x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$
    (a) em torno do eixo x (b) em torno do eixo y

35–36 Use um gráfico para encontrar os valores aproximados das coordenadas x dos pontos de intersecção das curvas indicadas. Em seguida, use a calculadora para encontrar (aproximadamente) o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região delimitada por essas curvas.

35. $y = 2 + x^2 \cos x,\quad y = x^4 + x + 1$
36. $y = 3\operatorname{sen}(x^2),\quad y = e^{x/2} + e^{-2x}$

SCA **37–38** Use um sistema de computação algébrica para achar o volume exato do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno da reta especificada.

37. $y = \operatorname{sen}^2 x,\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ em torno de $y = -1$
38. $y = x,\ y = xe^{1-x/2};$ em torno de $y = 3$

39–42 Cada integral representa o volume de um sólido. Descreva o sólido.

39. $\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$
40. $\pi \int_{-1}^{1} (1 - y^2)\, dy$
41. $\pi \int_0^1 (y^4 - y^8)\, dy$
42. $\pi \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos x)^2 - 1^2]\, dx$

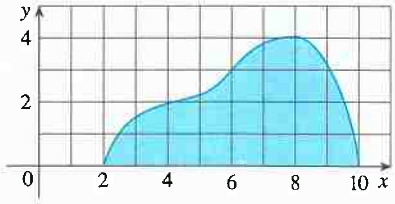
43. Uma tomografia computadorizada produz vistas de secções transversais igualmente espaçadas de um órgão humano, as quais fornecem informações sobre esse órgão que, de outra maneira, só seriam obtidas por cirurgia. Suponha que uma tomografia computadorizada de um fígado humano mostre secções transversais espaçadas por 1,5 cm. O fígado tem 15 cm de comprimento e as áreas das secções transversais, em centímetros quadrados, são 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39 e 0. Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do fígado.
44. Um tronco de 10 m de comprimento é cortado a intervalos de 1 m e as suas áreas de secção transversal A (a uma distância x da extremidade do tronco) estão listadas na tabela. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ para estimar o volume do tronco.

x (m)	A (m^2)	x (m)	A (m^2)
0	0,68	6	0,53
1	0,65	7	0,55
2	0,64	8	0,52
3	0,61	9	0,50
4	0,58	10	0,48
5	0,59		

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador   SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

45. (a) Se a região mostrada na figura for girada em torno do eixo x para formar um sólido, use a Regra do Ponto Médio, com $n = 4$, para estimar o volume do sólido.



(b) Estime o volume se a região for girada em torno do eixo y. Novamente use a regra do ponto médio com $n = 4$.

SCA **46.** (a) Um modelo para a forma do ovo de um pássaro é obtido girando, em torno do eixo x, a região sob o gráfico de

$$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{1 - x^2}$$

Use um SCA para encontrar o volume deste ovo.

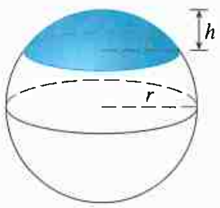
(b) Para uma certa espécie de pássaro, $a = -0{,}06$, $b = 0{,}04$, $c = 0{,}1$, e $d = 0{,}54$. Trace o gráfico de f e encontre o volume de um ovo desta espécie.

47–59 Encontre o volume do sólido S descrito.

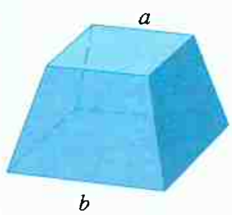
47. Um cone circular reto com altura h e base com raio r.

48. Um tronco de um cone circular reto com altura h, raio da base inferior R e raio de base superior r.

49. Uma calota de uma esfera de raio r e altura h.



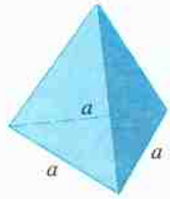
50. Um tronco de pirâmide com base quadrada de lado b, topo quadrado de lado a e altura h.



O que acontece se $a = b$? O que acontece se $a = 0$?

51. Uma pirâmide com altura h e base retangular com lados b e $2b$.

52. Uma pirâmide com altura h e base triangular equilátera com lado a (um tetraedro).



53. Um tetraedro com três faces perpendiculares entre si e as três arestas perpendiculares entre si com comprimentos de 3 cm, 4 cm e 5 cm.

54. A base de S é um disco circular com raio r. As secções transversais paralelas, perpendiculares à base, são quadradas.

55. A base de S é uma região elíptica delimitada pela curva $9x^2 + 4y^2 = 36$. As secções transversais perpendiculares ao eixo x são triângulos isósceles retos com hipotenusa na base.

56. A base de S é a região triangular com vértices (0,0), (1,0), e (0,1). As secções transversais perpendiculares ao eixo y são triângulos equiláteros.

57. A base de S é a mesma base do Exercício 56, mas as secções transversais perpendiculares ao eixo x são quadradas.

58. A base de S é a região delimitada pela parábola $y = 1 - x^2$ e pelo eixo x. As secções transversais perpendiculares ao eixo y são quadradas.

59. A base de S é a mesma base do Exercício 58, mas as secções transversais perpendiculares ao eixo x são triângulos isósceles com altura igual à base.

---

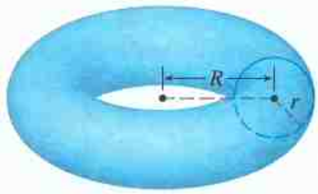
60. A base de S é um disco circular com raio r. As secções transversais paralelas, perpendiculares à base, são triângulos isósceles de altura h e lado desigual na base.

(a) Estabeleça uma integral para o volume de S.

(b) Interpretando a integral como uma área, encontre o volume de S.

61. (a) Escreva uma integral para o volume de um *toro* sólido (o sólido com formato de rosquinha da figura) com raios r e R.

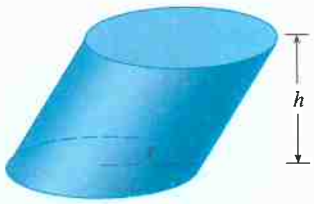
(b) Interpretando a integral como uma área, encontre o volume do toro.



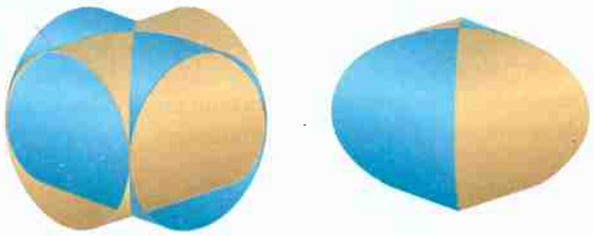
62. Resolva o Exemplo 9 tomando secções transversais paralelas à reta de intersecção dos dois planos.

63. (a) O Princípio de Cavalieri afirma que, se uma família de planos paralelos produzem áreas de secção transversal iguais para dois sólidos S_1 e S_2, então os volumes de S_1 e S_2 são iguais. Demonstre esse princípio.

(b) Use o Princípio de Cavalieri para encontrar o volume do cilindro oblíquo mostrado na figura.



64. Encontre o volume comum de dois cilindros circulares, cada um com raio r, se os eixos dos cilindros se interceptam em ângulos retos.



65. Encontre o volume comum de duas esferas, cada qual com raio r, se o centro de cada esfera está na superfície da outra esfera.

66. Uma tigela tem a forma de um hemisfério com diâmetro de 30 cm. Uma bola pesada com diâmetro de 10 cm é colocada dentro da tigela, e depois despeja-se água até uma profundidade de h centímetros. Encontre o volume de água na tigela.

67. Um buraco de raio r é perfurado pelo meio de um cilindro de raio $R > r$ com ângulo reto em relação ao eixo do cilindro. Encontre, mas não calcule, uma integral para o volume cortado.

68. Um buraco de raio r é perfurado através do centro de uma esfera de raio $R > r$. Encontre o volume da porção remanescente da esfera.

69. Alguns dos pioneiros do cálculo, como Kepler e Newton, foram inspirados pelo problema de encontrar os volumes de barris de vinho. (De fato, Kepler publicou um livro em 1615, *Stereometria doliorum*, dedicado aos métodos para encontrar os volumes de barris.) Eles frequentemente aproximavam a forma dos lados por parábolas.

(a) Um barril com altura A e raio máximo R é construído pela rotação ao redor do eixo da parábola $y = R - cx^2$, $-h/2 \leqslant x \leqslant h/2$, onde c é uma constante positiva. Mostre que o raio de cada extremidade do barril é $r = R - d$, onde $d = ch^2/4$.

(b) Mostre que o volume delimitado pelo barril é

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \tfrac{2}{5}d^2\right)$$

70. Suponha que a região $\mathcal{R}$ tenha área A e esteja acima do eixo x. Quando $\mathcal{R}$ é girada em torno de eixo x, ela gera um sólido com volume V_1. Quando $\mathcal{R}$ é girada em torno da reta $y = -k$ (onde k é um número positivo), ela gera um sólido com volume V_2. Expresse V_2 em termos de V_1, k e A.

6.3 Volumes por Cascas Cilíndricas

Alguns problemas de volume são muito difíceis de lidar pelos métodos da seção anterior. Por exemplo, vamos considerar o problema de encontrar o volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$. (Veja a Figura 1.) Se a fatiarmos perpendicularmente ao eixo y, obteremos uma arruela. No entanto, para calcularmos os raios interno e externo da arruela, teríamos de resolver a equação cúbica $y = 2x^2 - x^3$ para x em termos de y, o que não é fácil.

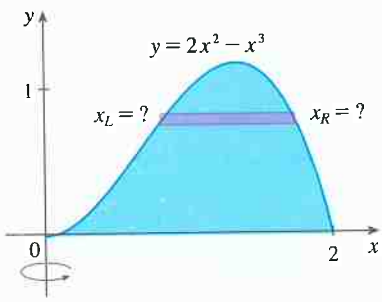


FIGURA 1

Felizmente, existe um método chamado **método das cascas cilíndricas**, que é mais fácil de usar em casos como esse. A Figura 2 mostra uma casca cilíndrica com raio interno r_1, raio externo r_2, e altura h. Seu volume V é calculado subtraindo-se o volume V_1 do cilindro interno do volume V_2 do cilindro externo:

$$V = V_2 - V_1 = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h$$

$$= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h = 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} h(r_2 - r_1)$$

Se fizermos $\Delta r = r_2 - r_1$ (a espessura da casca) e $r = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ (o raio médio da casca), então a fórmula para o volume de uma casca cilíndrica se torna

1 $$\boxed{V = 2\pi r h\,\Delta r}$$

e pode ser memorizada como

$$V = [\text{circunferência}][\text{altura}][\text{espessura}].$$

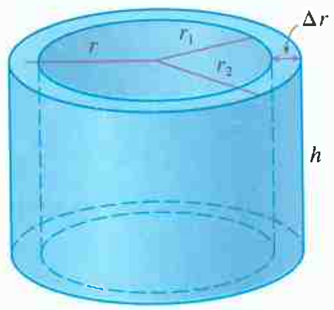


FIGURA 2

Como mostra o exemplo a seguir, o método das cascas funciona tão bem quanto se girarmos em torno do eixo x. Nós simplesmente temos que desenhar um diagrama para identificar o raio e a altura da casca.

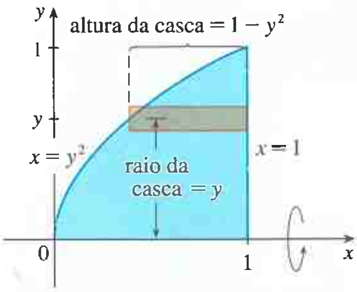


FIGURA 9

EXEMPLO 3 Use cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 até 1.

SOLUÇÃO Este problema foi resolvido utilizando os discos no Exemplo 2 da Seção 6.2. Para o uso de cascas, reescrevemos a curva $y = \sqrt{x}$ (na figura daquele exemplo) como $x = y^2$ na Figura 9. Pela rotação em torno do eixo x vemos que uma casca típica tem raio y, circunferência $2\pi y$ e altura $1 - y^2$. Assim, o volume é

$$V = \int_0^1 (2\pi y)(1 - y^2)\,dy = 2\pi \int_0^1 (y - y^3)\,dy = 2\pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Neste exemplo, o método do disco foi mais simples.

EXEMPLO 4 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada por $y = x - x^2$ e $y = 0$ em torno da reta $x = 2$.

SOLUÇÃO A Figura 10 mostra a região e a casca cilíndrica formada pela rotação em torno da reta $x = 2$. Esta tem raio $2 - x$, circunferência $2\pi(2 - x)$ e altura $x - x^2$.

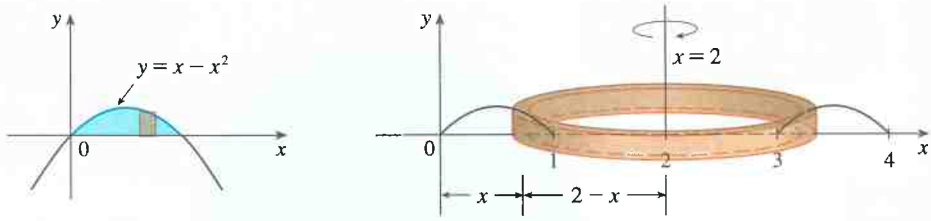


FIGURA 10

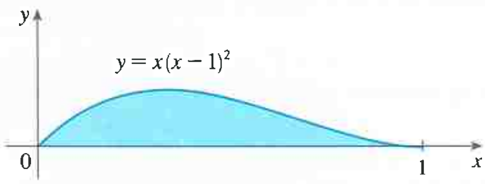
O volume do sólido dado é

$$V = \int_0^1 2\pi(2 - x)(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

6.3 Exercícios

1. Considere S o sólido obtido pela rotação da região mostrada na figura em torno do eixo y. Explique por que é complicado usar fatias para encontrar o volume V de S. Esboce uma casca de aproximação típica. Quais são a circunferência e a altura? Use cascas para encontrar V.

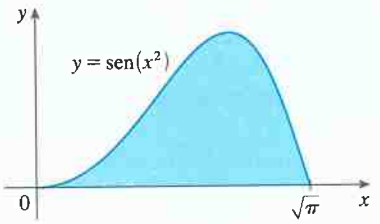


É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

2. Considere S o sólido obtido pela rotação da região mostrada na figura em torno do eixo y. Esboce uma casca cilíndrica típica e encontre sua circunferência e altura. Use cascas para encontrar o volume S. Você acha que esse método é preferível ao fatiamento? Explique.



3–7 Use o método das cascas cilíndricas para achar o volume gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas em torno do eixo y.

3. $y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$

4. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1$

5. $y = e^{-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

6. $y = 4x - x^2, \quad y = x$

7. $y = x^2, \quad y = 6x - 2x^2$

8. Considere V o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$. Encontre V pelo fatiamento e por cascas cilíndricas. Em ambos os casos, desenhe um diagrama para explicar seu método.

9–14 Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno do eixo x.

9. $xy = 1, \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y = 3$

10. $y = \sqrt{x}, \quad x = 0, \quad y = 2$

11. $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0$

12. $x = 4y^2 - y^3, \quad x = 0$

13. $x = 1 + (y - 2)^2, \quad x = 2$

14. $x + y = 3, \quad x = 4 - (y - 1)^2$

15–20 Use o método das cascas cilíndricas para achar o volume gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno do eixo especificado.

15. $y = x^4, \ y = 0, \ x = 1;$ em torno de $x = 2$

16. $y = \sqrt{x}, \ y = 0, \ x = 1;$ em torno de $x = -1$

17. $y = 4x - x^2, \ y = 3;$ em torno de $x = 1$

18. $y = x^2, \ y = 2 - x^2;$ em torno de $x = 1$

19. $y = x^3, \ y = 0, \ x = 1;$ em torno de $y = 1$

20. $y = x^2 + 1, \ x = 2;$ em torno de $y = -2$

21–26

(a) Escreva uma integral para o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno do eixo especificado.

(b) Use sua calculadora para determinar a integral com precisão de cinco casas decimais.

21. $y = xe^{-x}, \ y = 0, \ x = 2;$ em torno do eixo y

22. $y = \operatorname{tg} x, \ y = 0, \ x = \pi/4;$ em torno de $x = \pi/2$

23. $y = \cos^4 x, \ y = -\cos^4 x; \ -\pi/2 \leq x \leq \pi/2;$ em torno de $x = \pi$

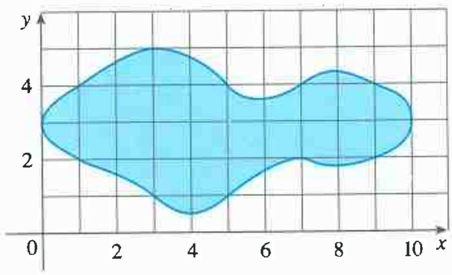
24. $y = x, \ y = 2x/(1 + x^3);$ em torno de $x = -1$

25. $x = \sqrt{\operatorname{sen} y}, \ 0 \leqslant y \leqslant \pi, \ x = 0;$ em torno de $y = 4$

26. $x^2 - y^2 = 7, \ x = 4;$ em torno de $y = 5$

27. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ para estimar o volume obtido pela rotação em torno do eixo y da região sob a curva $y = \sqrt{1 + x^3}, 0 \leqslant x \leqslant 1$.

28. Se a região mostrada na figura for girada em torno do eixo y para formar um sólido, use a Regra do Ponto Médio, com $n = 5$, para estimar o volume do sólido.



29–32 Cada integral representa o volume de um sólido. Descreva o sólido.

29. $\displaystyle\int_0^3 2\pi x^5 \, dx$

30. $\displaystyle 2\pi \int_0^2 \frac{y}{1 + y^2} \, dy$

31. $\displaystyle\int_0^1 2\pi(3 - y)(1 - y^2) \, dy$

32. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} 2\pi(\pi - x)(\cos x - \operatorname{sen} x) \, dx$

33–34 Use um gráfico para encontrar os valores aproximados das coordenadas x dos pontos de intersecção das curvas indicadas. A seguir, use essa informação para estimar o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada por essas curvas.

33. $y = e^x, \quad y = \sqrt{x} + 1$

34. $y = x^3 - x + 1, \quad y = -x^4 + 4x - 1$

SCA **35–36** Use um sistema de computação algébrica para achar o volume exato do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno da reta especificada.

35. $y = \operatorname{sen}^2 x, \ y = \operatorname{sen}^4 x, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ em torno de $x = \pi/2$

36. $y = x^3 \operatorname{sen} x, \ y = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ em torno de $x = -1$

37–43 A região delimitada pelas curvas dadas é girada em torno do eixo especificado. Ache o volume do sólido resultante por qualquer método.

37. $y = -x^2 + 6x - 8, \ y = 0;$ em torno do eixo y

38. $y = -x^2 + 6x - 8, \ y = 0;$ em torno do eixo x

39. $y^2 - x^2 = 1, \ y = 2;$ em torno do eixo x

40. $y^2 - x^2 = 1, \ y = 2;$ em torno do eixo y

41. $x^2 + (y - 1)^2 = 1;$ em torno do eixo y

42. $x = (y - 3)^2, \ x = 4;$ em torno de $y = 1$

43. $x = (y - 1)^2, x - 1 = 1;$ em torno de $x = -1$

44. Considere T a região triangular com vértices (0,0), (0,1) e (1,2), e considere V o volume do sólido obtido quando T é girado em torno da reta $x = a$, onde $a > 1$. Expresse a em termos de V.

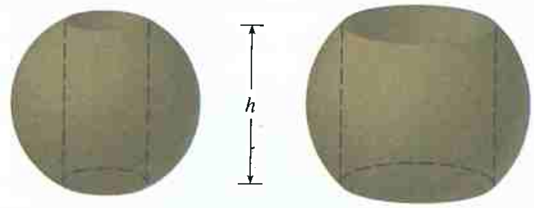
45–47 Use cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido.

45. Uma esfera de raio r.

46. O toro sólido do Exercício 61 da Seção 6.2.

47. Um cone circular reto com altura h e base com raio r.

48. Suponha que você faça anéis para guardanapos perfurando buracos com diferentes diâmetros através de duas bolas de madeira (as quais também têm diferentes diâmetros). Você descobre que ambos os anéis de guardanapo têm a mesma altura h, como mostrado na figura.
(a) Faça uma conjectura sobre qual anel tem mais madeira.
(b) Verifique o seu palpite: use cascas cilíndricas para calcular o volume de um anel de guardanapo criado pela perfuração de um buraco com raio r através do centro de uma esfera com ra R e expresse a resposta em termos de h.



6.4 Trabalho

O termo *trabalho* é usado na linguagem cotidiana significando a quantidade de esforço neces sária para executar uma tarefa. Na física esse termo tem um significado técnico que depende d conceito de *força*. Intuitivamente, você pode pensar em força como descrevendo um empurra ou puxar sobre um objeto – por exemplo, um empurrão horizontal em um livro sobre uma mes ou a ação da gravidade terrestre sobre uma bola. Em geral, se um objeto se move ao longo d uma reta com função de posição $s(t)$, então a **força** F no objeto (na mesma direção) é definid pela Segunda Lei de Newton do Movimento como o produto de sua massa m pela sua acelera ção:

$$\boxed{1} \qquad F = m\frac{d^2s}{dt^2}.$$

No Sistema Métrico Internacional (SI), a massa é medida em quilogramas (kg), o deslocament em metros (m), o tempo em segundos (s) e a força em newtons ($N = kg{\cdot}m/s^2$). Então, um força de 1 N atuando em uma massa de 1 kg produz uma aceleração de 1 m/s^2. No sistema usua norte-americano, a unidade de força escolhida é a libra.

No caso de aceleração constante, a força F também é constante, e o trabalho feito é definido pelo produto da força F pela distância d na qual o objeto se move:

$$\boxed{2} \qquad W = Fd \qquad \text{trabalho} = \text{força} \times \text{distância}$$

Se F é medida em newtons e d, em metros, então a unidade para W é o newton-metro, que é chamada joule (J). Se F é a medida em libras e d, em pés, então a unidade para W é libra-pé (lb-pé), que equivale a cerca de 1,36 J.

EXEMPLO 1
(a) Quanto trabalho é exercido ao se levantar um livro de 1,2 kg do chão até uma carteira de altura 0,7 m? Considere que a aceleração da gravidade é $g = 9{,}8\ m/s^2$.
(b) Quanto trabalho é feito levantando-se um peso de 20 lb a uma altura de 6 pés do chão?

SOLUÇÃO
(a) A força exercida é igual e oposta à força exercida pela gravidade. Então, a Equação 1 fornece

$$F = mg = (1{,}2)(9{,}8) = 11{,}76\ \text{N}$$

e a Equação 2 nos dá o trabalho executado como

$$W = Fd = (11{,}76)(0{,}7) \approx 8{,}2\ \text{J}$$

(b) Aqui a força dada é $F = 20$ lb, portanto o trabalho executado é

$$W = Fd = 20 \cdot 6 = 120\ \text{lb-pé}$$