

NÚMEROS

Parte 3

Antonio Carlos Brolezzi

www.ime.usp.br/~brolezzi
brolezzi@usp.br

Os sistemas de numeração antigos
apresentavam uma dificuldade
especial:

era muito trabalhoso efetuar cálculos
usando esses números.

Essas dificuldades foram superadas pelos hindus, que foram os criadores do nosso sistema de numeração.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cod. Vigilus (976 C.E.)	I	7	3	4	5	6	7	8	9
Vatican MS. lat. 3101 (1077)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
British Mus. Add. 17808 (XII)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
General forms, c. XIII	1	2	3	4	5	6	7	8	9
General forms, c. XIV	1	2	3	4	5	6	7	8	9
General forms, c. XV	1	2	3	4	5	6	7	8	9
General forms, c. XVI	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Essas dificuldades foram superadas pelos hindus, que foram os criadores do nosso sistema de numeração.

Anciens Caractères Arithmétiques.

1. <i>Notes de Bocce.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2. <i>De Plume.</i>	{	1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3. <i>Caractères d'Alsephadi.</i>	{	1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4. <i>Chiffres de Sacro Bosco.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
5. <i>De Roger Bacon.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
6. <i>Des Indiens Modernes.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
7. <i>Chiffres Modernes.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
8. <i>Alsephadi.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Essas dificuldades foram superadas pelos hindus, que foram os criadores do nosso sistema de numeração.



Os hindus souberam reunir três características que já apareciam em outros sistemas numéricos da Antiguidade:

o sistema de numeração hindu é decimal (o egípcio, o romano e o chinês também o eram);

o sistema de numeração hindu é posicional (o babilônio também era);

o sistema de numeração hindu tem o zero, isto é, um símbolo para o nada.

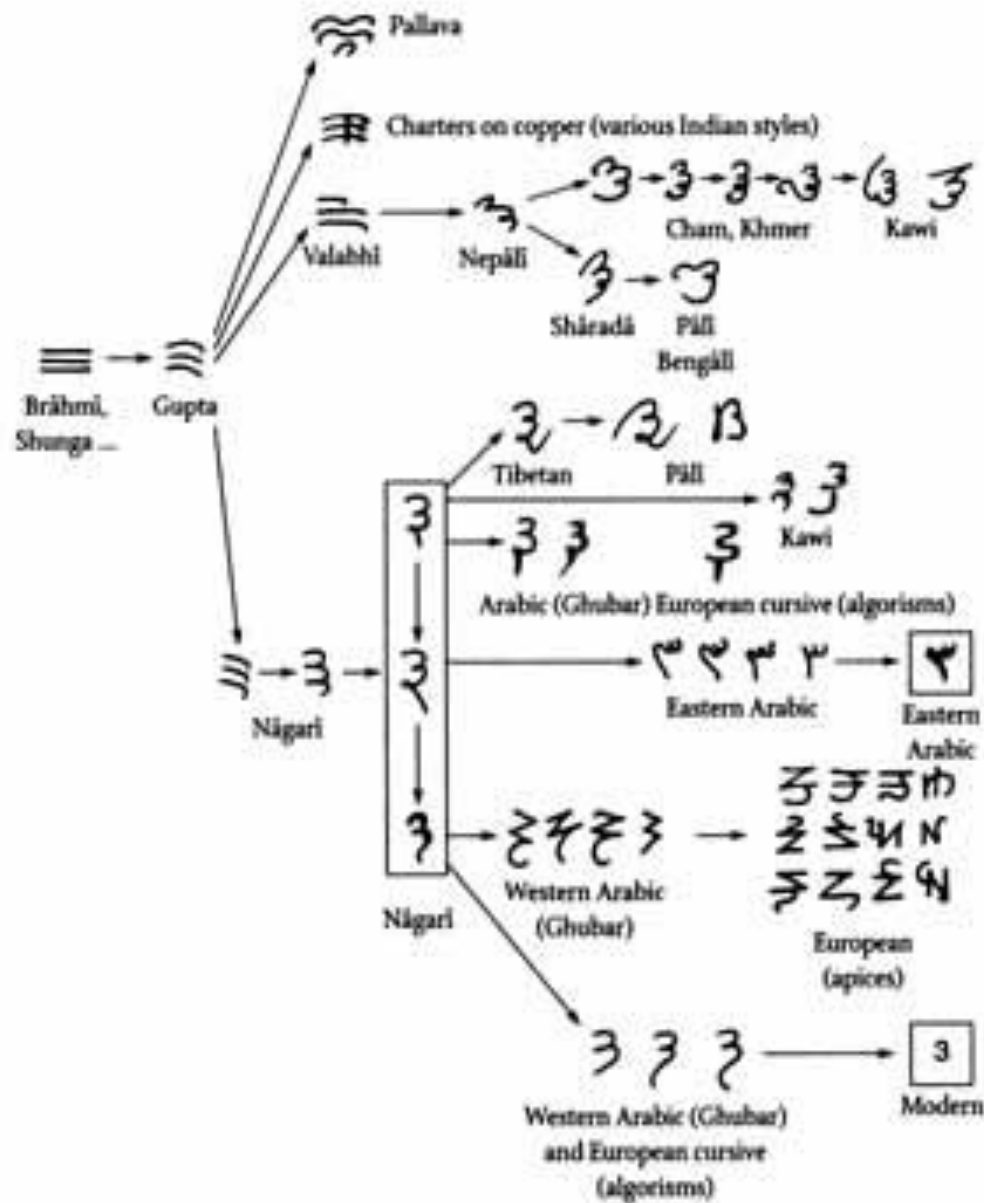


FIG. 24.63. Origin and evolution of the numeral 3. (For Arabic and European numerals, see Chapters 25 and 26.)

Estas três características, reunidas, tornaram o sistema de numeração hindu o mais prático de todos. Não é sem motivo que hoje ele é usado quase no mundo todo

Estamos tão acostumados com sistema de numeração decimal que ele nos parece incrivelmente simples. No entanto, desde os tempos em que os homens fizeram suas primeiras contagens, até o aparecimento do sistema de numeração hindu, decorreram milhares de anos.

É surpreendente que diversas civilizações da Antiguidade, como as dos egípcios, babilônios e gregos, capazes de realizações maravilhosas, não tenham chegado a um sistema de numeração tão funcional quanto o dos hindus.

Por que tanta dificuldade?

**Uma possível resposta a esta
pergunta nos leva ao
Zero,
isto é,
a um símbolo para o nada.**

Estamos tão familiarizados com o zero que não sentimos a menor dificuldade em raciocinar com ele.

As crianças o dominam com facilidade. Entretanto, nem sempre foi assim. Nossos antepassados custaram muito para inventar o zero e, mesmo depois de nascido, o símbolo para o nada demorou a ser aceito.

Depois do zero ter sido inventado para resolver um problema do sistema posicional de numeração, ocorreu uma coisa interessante:

o zero passou a ser tratado como qualquer um dos outros nove símbolos.

O zero passou a ser tão número quanto os outros. O **nada** tornou-se número também, sendo introduzido na seqüência:

0, 1, 2, 3, etc...

Agradecimento especial por essa primeira parte:

Prof. Henrique Guzzo

Na matemática, os números naturais são utilizados para contar.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

O conjunto dos números naturais é chamado de enumerável, pois seus elementos podem ser contado um a um Embora sejam infinitos.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

A infinitude dos números naturais é bastante contra-intuitiva. Uma forma bastante doida de pensar nisso é comparar o conjunto dos naturais com o conjunto dos números pares... Eles são equipotentes! Têm a mesma cardinalidade! Há uma bijeção entre os dois conjuntos! Eles são um a um!

0 1 2 3 4 5 6 7

0 2 4 6 8 10 12 14 ...

Para sentir o infinito natural, vamos olhar a brincadeira inventada por David Hilbert (1862-1943):



O Hotel de Hilbert

https://www.youtube.com/watch?v=pjOVHzy_DV

Também tem a mesma cardinalidade o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Basta fazer esta correspondência, por exemplos, entre pares e ímpares:

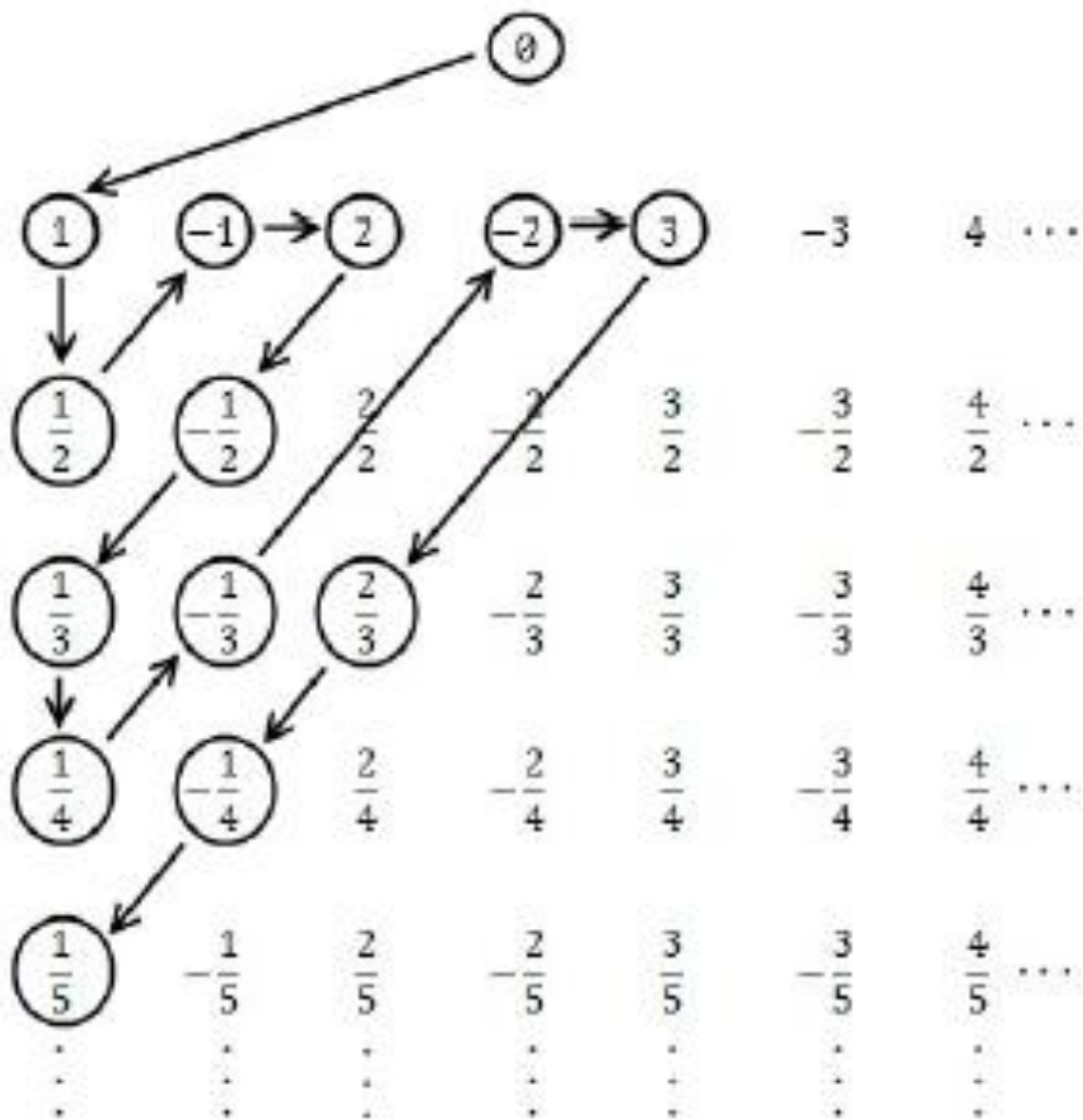
...	-3,	-2,	-1,	0,	1,	2,	3,	...
...	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	...
...	5,	3,	1,	0,	2,	4,	6,	...

Agora vem o passo mais estranho. Os racionais também formam um conjunto enumerável.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} ; p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

O argumento de Cantor é fácil de seguir...

Cantor propõe uma ordenação pela diagonal:



Portanto há uma associação um a um entre o conjunto dos naturais e o conjunto dos racionais.

E o conjunto dos reais?

Vamos supor que seja possível enumerar os números reais entre 0 e 1.

Vamos supor que seja possível associar um a um os números reais entre 0 e 1 com o conjunto dos naturais (não precisam estar em ordem).

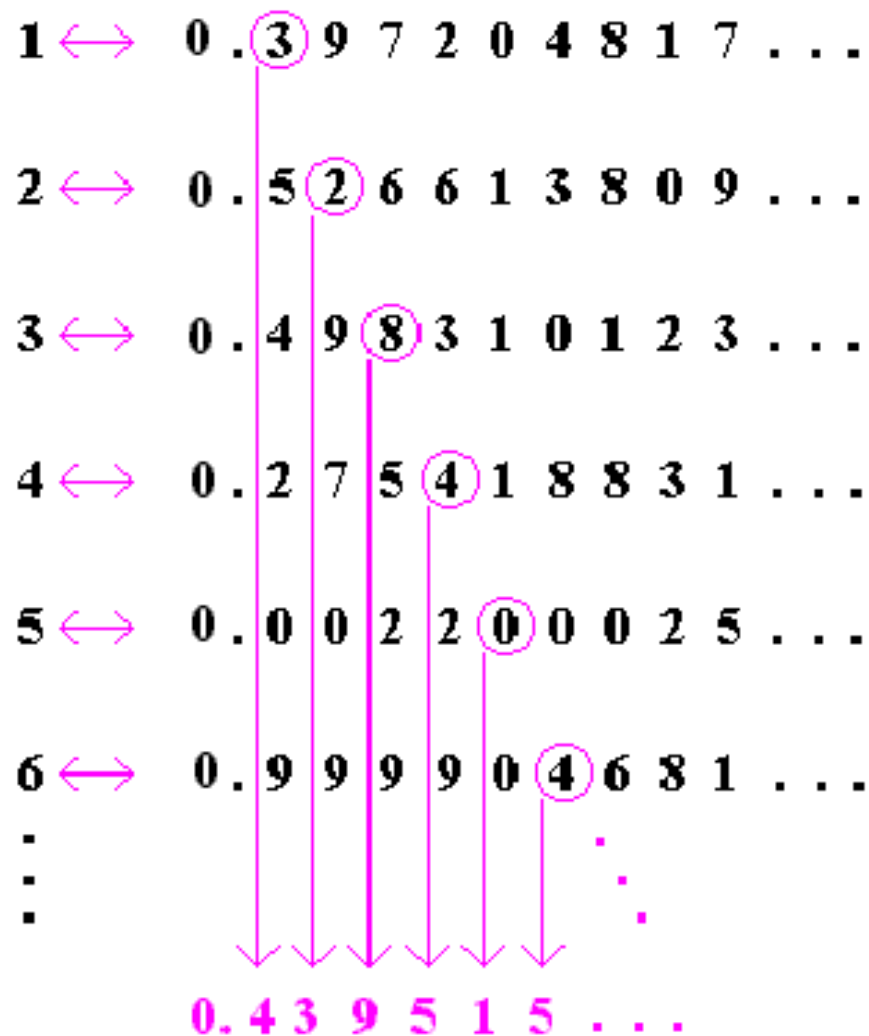
1 ↔	0.397204817...
2 ↔	0.526613809...
3 ↔	0.498310123...
4 ↔	0.275418831...
5 ↔	0.002200025...
6 ↔	0.999904681...
.	
.	
.	

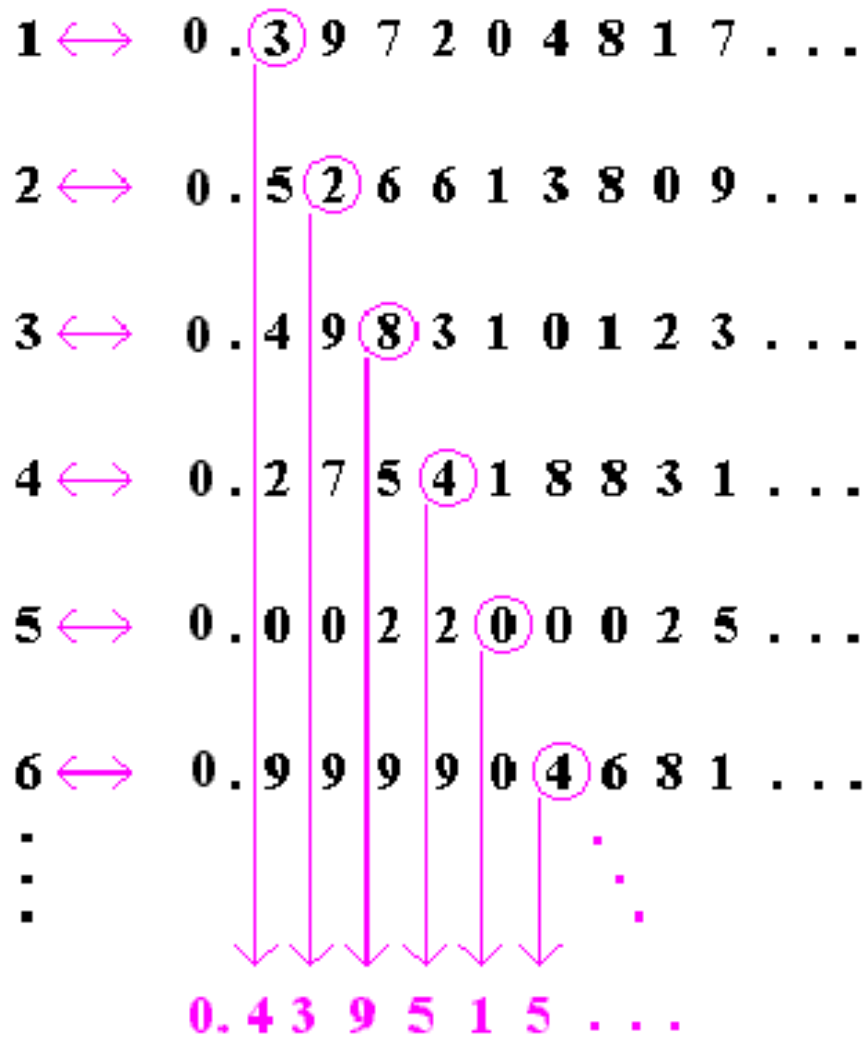
Podemos tomar o primeiro algoritmo decimal do primeiro número, o segundo do segundo e assim por diante, e tomar um algoritmo diferente para cada um

1	↔	0.	3	9	7	2	0	4	8	1	7	...
2	↔	0.	5	2	6	6	1	3	8	0	9	...
3	↔	0.	4	9	8	3	1	0	1	2	3	...
4	↔	0.	2	7	5	4	1	8	8	3	1	...
5	↔	0.	0	0	2	2	0	0	0	2	5	...
6	↔	0.	9	9	9	9	0	4	6	8	1	...
:												
:												

1	↔	0.	3	9	7	2	0	4	8	1	7	...
2	↔	0.	5	2	6	6	1	3	8	0	9	...
3	↔	0.	4	9	8	3	1	0	1	2	3	...
4	↔	0.	2	7	5	4	1	8	8	3	1	...
5	↔	0.	0	0	2	2	0	0	0	2	5	...
6	↔	0.	9	9	9	9	0	4	6	8	1	...
:												
:												
			0.	4	3	9	5	1	5	...		

Podemos tomar o primeiro algarismo decimal do primeiro número, o segundo do segundo e assim por diante, e tomar um algarismo diferente para cada um.

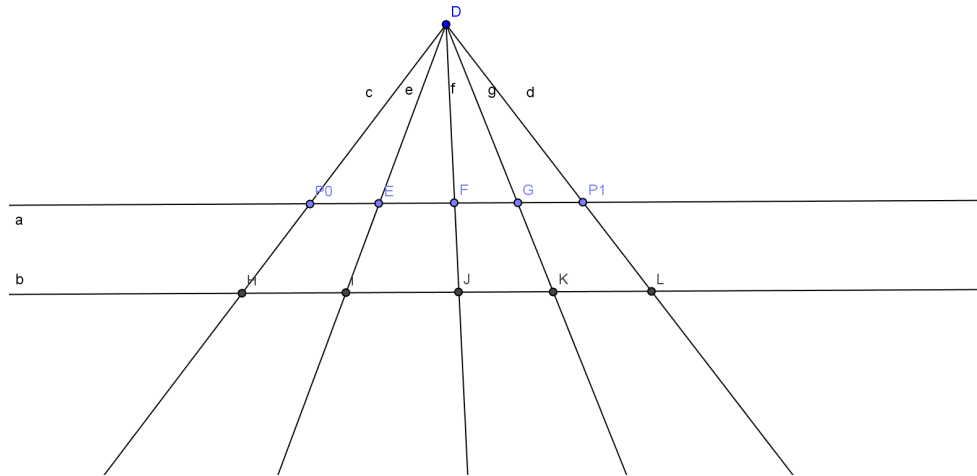




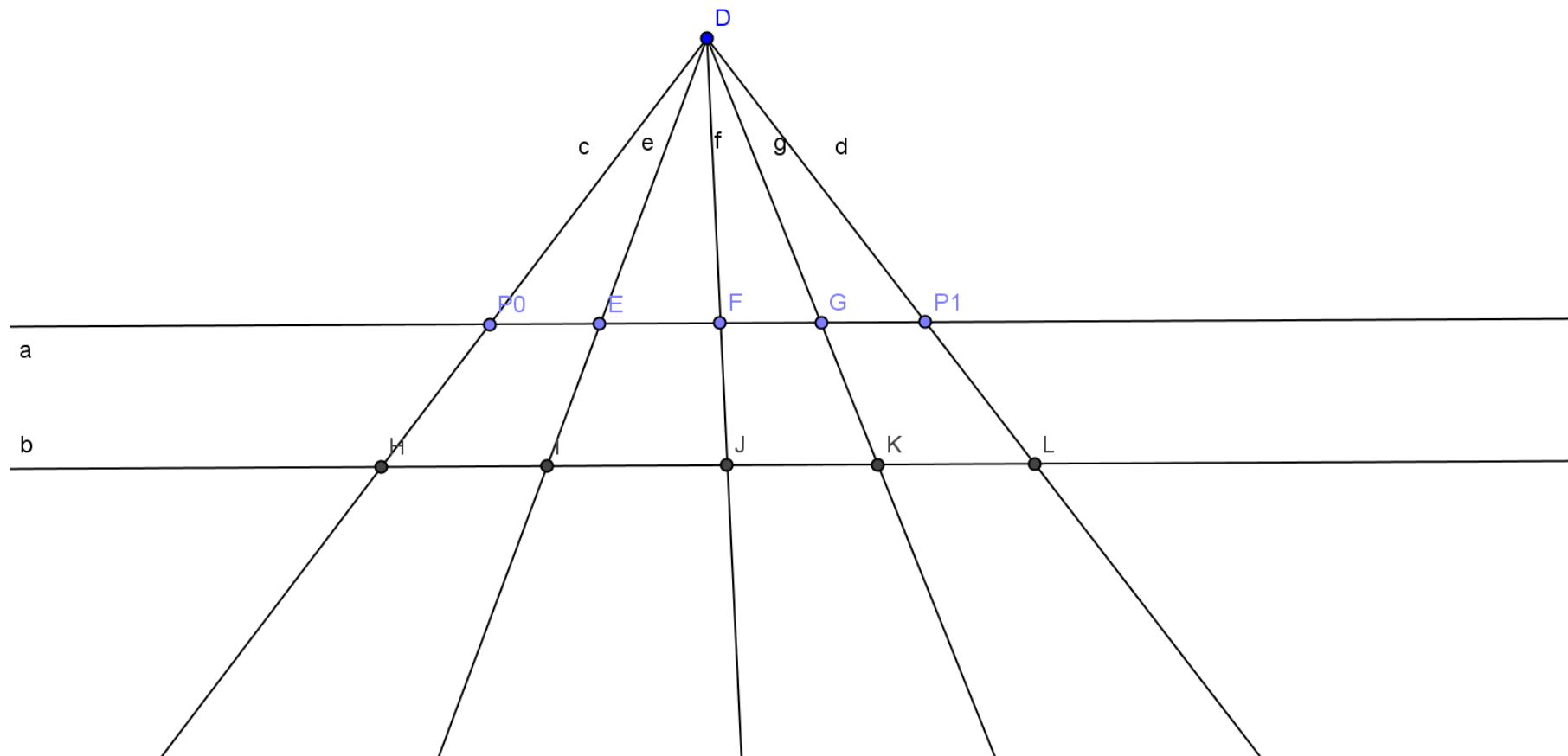
O número resultante não estava no conjunto original, pois tem pelo menos um algarismo diferente de todos os demais!

Assim, o conjunto dos reais entre 0 e 1 é não-enumerável. O infinito real é “maior” que o infinito natural, é de outra natureza!

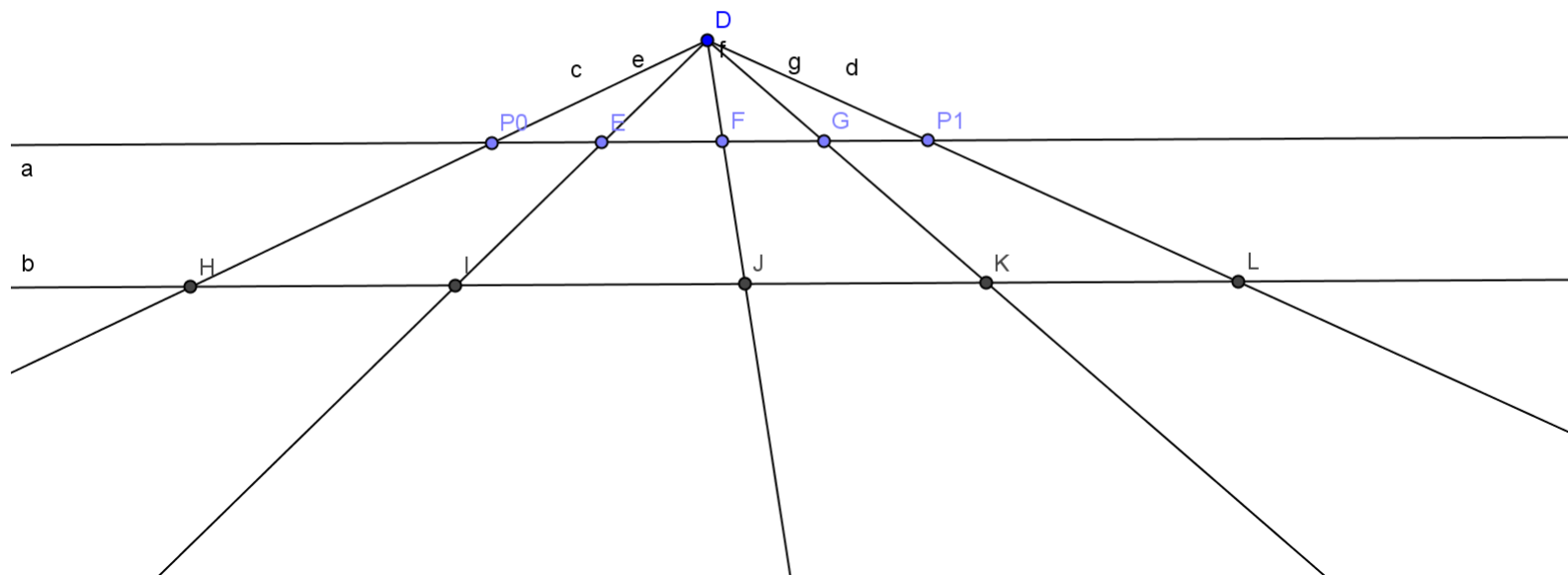
O pior é que qualquer segmento da reta real tem a mesma cardinalidade da reta real inteira...



Um ponto projeta os pontos do intervalo na reta real inteira.



Um ponto projeta os pontos do intervalo na reta real inteira.



A Hipótese do Contínuo de Cantor, que ainda não foi provada e talvez não possa ser provada, tem como implicação que a reta real é contínua. Não faltam pontos.

Ou seja, os números reais preenchem todo o espaço!

Vamos ver como isso faz sentido.

Tomemos um número real, não racional, bem conhecido. Por exemplo, o número π já foi expresso em até 10 trilhões de dígitos.

3.141592653589793238462643
3832795028841971693993751
0582097494459230781640628
6208998628034825342117067
9821480865132823066470938
4460955058223172535940812
8481117450284102701938521
1055596446229489549303819
6442881097566593344612847

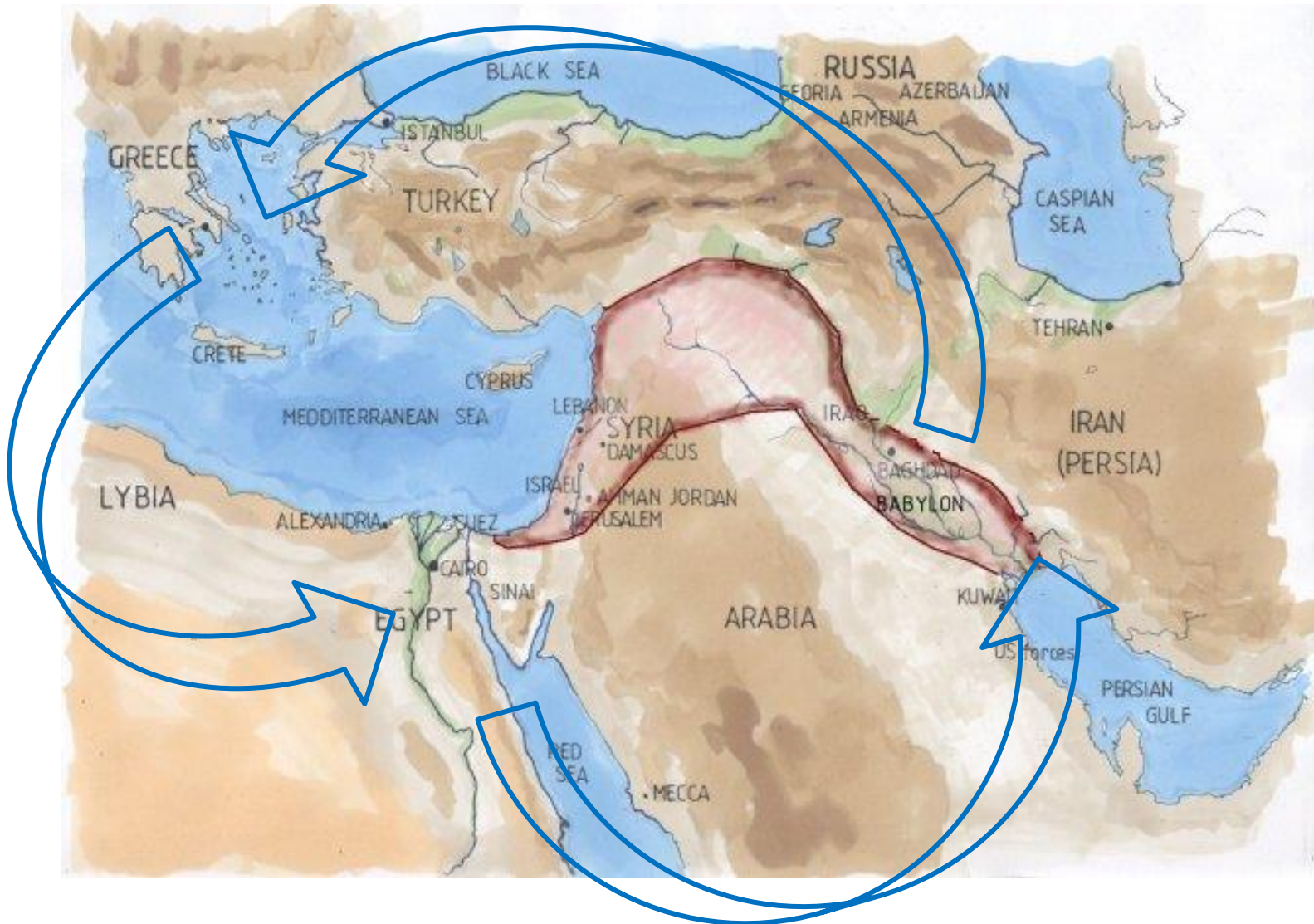
E como isso vale para qualquer número real...

3.415 9265 35 e 979323 e 4626433 e 32795 02 e 41971693 993 75105 e 209744445 92307 e 164061 e 620 e 99 e 62 e 034 e 25342110677 e 24 e 0 e 65132 e 2306647093 e 4460955 05 e 2231725 35940 e 12 e 4 e 11745 02 e 410270193 e 5210 555 964462294 e 9549303 e 196442 e 10975665 9334462 e 475 64 e 2337 e 67 e 3165 27120190945 e 64 e 5692346034 e 8045432664 e 213393607260249412 737245 e 70066063855 e 174 e 1520920962 e 2925409175 364367 e 9259 0360013305 3054 e 204665 23 e 446951945160943305 7270365 7595 9195 30292 e 6173 e 1932611930518 e 54 e 074462379962 7495 6735 e 752724 e 9122793 e 301194929 e 3367336244065 66430 e 6021394946395 22473719 0702179 e 609437027705 3921717629317675 23 e 4674 e 4676694051320005 6 e 12745 2635 60 e 277 e 577134275 77 e 960917363717 e 7246 e 44090122495 3430465495 e 37105 07922796 e 925 e 92354201995 61229021960 e 64 03444 e 19 e 136297747713099605 e 7072134999999 e 37297 e 049951059731732 e 160963 e 595 02445 9455 34690 e 3026425 2230 e 2533446 e 503526931 e 171010003137 e 3 e 752 e 65 e 753320 e 3 e 120617176694730359 9 25349042 e 75546 e 731595 62 e 63 e 23537 e 75937519577 e 577 e 0532171226 e 0663001927 e 766119590921642019 e 93 e 09525721010654 e 5 e 6327 e 659365 33 e 2796 23030952035 30 e 5296 e 995773622599413 e 91 2497217752 e 347913515574 e 5724245415 069595 0 e 2953316 e 6727 e 55 e 907509 e 3 e 1754637464939319255 060400927701671139009 e 4 e 2402 e 5 e 386035 63707660104710 e 19429555 969 e 946767 e 3744944 e 25537 9774726 e 471040475 3464620 e 0466 e 425 9069492933367702 e 9 e 915210475216205 676602405 e 03 e 150935125 33 e 24300355 e 76402474947326394192726042699227967 e 23547 e 16360093417264219245 e 6315 0302 e 6 e 2974555 706749 e 3 e 5054945 e 4 e 5 e 6926995 6909272107975 09302955 32165 3449 e 71202755 9602364 e 066549919 e 4 e 3479775 3566369 e 07406542527 e 6255 e 417574672 e 90977772793 e 000 e 64710600164524 1921732172477235 04144977356 e 54 e 183615 735255 2133475 74 e 4946 e 43 e 52332390739443334547762416 e 625 e 9 e 35694 e 562099219222 e 427255 0254256 e 767179049460165 3466 e 049 e 6272327917 e 60 e 57 e 43 e 3 e 279679766 e 145410095 3 e 37 e 636095 06 e 0064225125205 1173929 e 4 e 960 e 412 e 4 e 626945 604241965 2 e 5022210661 e 630674427 e 622039194495 0471237137 e 696095 63643719172 e 7467716465 7573962413 e 90 e 65 e 3264 5995 e 1339047 e 027590099465 76407 e 95126946 e 3 e 265 75 209 e 25 e 226205 224 e 94077267947 e 26 e 4 e 260476990702640136394437455 305 06 e 203496252451174939965143429 e 0919065 9250937226964645 709 e 5 e 3 e 7405 97 e 5 e 95997297549 e 9306175 392 e 46 e 13 e 26 e 3 e 6 e 94277455 991 e 752524595 3959430499725 246 e 0 e 459 e 7273644695 e 4 e 65 3 e 367362226260992460 e 051243 e 43904512441365 497627 e 0977715 6914 3599770029660 e 9446946 e 6 e 55 e 4 e 0635 3422072225 e 2 e 4 e 6 e 4 e 5 e 602 e 5 06016 e 4273945 226746767 e 9 e 25323 e 2524995466627 e 239 e 645 65 161635 4 e 62305 7745 649 e 0355 936345 6 e 17432412515 076069 4794510965 96094025 22 e 79710 e 9345 669136 e 6722 e 74 e 9405 60105 0330 e 6792 e 6 e 0920 e 74760917 e 2493 e 5 e 9009749096759 e 5263655 497 e 9 e 93297 e 4 e 216 e 299 e 94 e 72265 e 04 e 575640427047755513237994 4515237462334645 42 e 5 e 444795265 e 67 e 210514135473573952313427166021359695 36234429524 e 49371 e 711045 76540359027993440374200731057 e 53906219 e 3 e 7447 e 0 e 47 e 4 e 96 e 332445 713 e 6 e 7519435 0643 02 e 45 39104 e 4 e 1005 3710646 e 06749927 e 1919793995 20649166342 e 75444064374512371 e 1921799 e 39105 9195 6 e 4675 426923974 e 9409071 e 6494239165 67945 20 e 0954655 0225231603 e 193042093762137 e 55 95663 e 9 377 e 70 e 3030906972077346722 e 25625 99665 042 e 0306 e 03 e 44773454920260544665 925210497442 e 507325 e 6660021324340 e 1907104 e 633173464965 145 3905 79626 e 5 60055 0 e 10665 e 79699 e 1635 747363 e 40 525745 9102 e 9706440109712062 e 043903975957856771577100420337 e 6993600723055 e 76317635942 e 73125471205 3292 e 19 e 26 e 625 e 673215 7919 e 44 e 4 e 2916447060957527069572209175 671167229109 e 1690915 2 e 0 735 0671274 e 3 e 3222 e 71 e 35210935 3965 725120 e 357915369 e 2094442100675103346710342671136990 e 65 e 51639 e 35019701651716 e 57143765 76 e 35755 65 0 e 49099 e 9 e 599 e 23 e 734552 e 3316355 076479 e 535 e 932 26 e 54 e 96321329330 e 9 e 70642046752590709154 e 1465 49 e 5 94663 71 e 02709 e 19943099244 e 9575712 e 2 e 90592323326097297120 e 44335 73265 4 e 93 e 23911325 97463667305 e 3604142 e 13 e 303203 e 24903 75 e 9 e 52437444710291327165 6 e 0937723444030707467212019130203303 e 0197621010044929325160 e 42444 e 59637669 e 3 e 9522 e 6 e 47 e 32355265 e 2134495716 e 726243344 e 930396 e 642614541077322697 e 02 e 073 e 95 441010446 e 23252716210105265 227211660493966655730925471105 e 7 e 3763466 e 2065 3109 e 965 269 e 6205 64769325705 e 635 6620 e 5 e 10072936069 e 764 e 61791045 334 e 5 03461365716 e 675 324944166 e 0396265 797 e 771 e 555 60 e 45 2965 44665 205 3064344434 e 5 67697545 664066 007002371 e 7765 33440171 749474205 622305 34 7315 61340712 700040 5 47332699390 e 145 4664645 e 0 7977270 266 e 3063432 e 5 e 7 e 5 69 e 30523 5 e 0 e 933065 717746079545 7163775 210214955 795 e 40025 0262 e 5 941302184715 079795 309910 7965 473 7625 57165 675135 7571 e 2966845 47197719 0219946 e 9030463994713296210734043757 e 5735 9645 e 09193 e 97131117904297 e 2 e 5 6475 0320319 e 6915402 e 70 e 0 e 59904 e 01094247221317947647772622444254 e 545 4033215 71 e 5 306422 e 1375 e 5 043063321715 e 2979 e 66223711725 916077166925474 e 73 e 9 e 665 494945 01465 4062 e 43366393790039769265 672463 e 5 3067360965 712097 e 0763 e 3276646274 e 4 e 007 e 6925 6029022 e 472104031721 e 60 e 2049100042296617963779213375 7514955 056604963 e 62947265 4736425230 e 17703675 15706 735 0235 072 e 35405 670403 e 6743513622247715 e 915 0495 309 e 444 e 9333096340 e 7 e 0769235 99397 e 0549193444737744 e 426329 e 60 e 099 e 6 e 74132604725 6951623965 e 645 730216359 e 1939516735 3 e 129741677 2947 e 67242292465 4366 e 009 e 067692 e 23 e 2 e 06 e 9964004 e 24354037041664965 e 979409243237 e 969070697794223625 0 e 2216 e 9573 e 379 e 6230015 937764716512 e 935 7 e 6015 e 16975 e 7 e 29735 233446042 e 152 6272037343465 319777741603199066554 e 763979293344952154134 e 994 e 54447345 673 e 31624993491314 e 0727777103 e 63 e 773433177207545 6545 3220777092109051660962 e 0490926366019759 e 2 e 161332316663652 e 693266 e 6336062 73567630354477162 e 035 045 0777235547105 e 5954 e 702790 e 1435 624045171 e 06246436267945 62753 e 13407 e 33033625 42327 e 39449753 e 2437205 e 35314771926063 e 13346776 e 79695971030 9 e 33913077109 e 7040 e 591337464442 e 2277263465 94704745 e 7 e 471 e 7209277152 e 073167910770715 72134444730605 7007334924369313 e 35 04936324 e 40425121925 6179 e 06941352 e 0134701304716437 e 518 e 5 0902 e 545210165 e 39344965 6213494345 95 625 e 65 e 655705526904965 209 e 5 e 033 e 5 07224264 e 293972 e 5 e 47 e 316305 77775 606 e 6 e 7644624 e 246 e 579260395 3527734 e 30304 e 029005 e 76075 e 251047410916439 6362676044725 627420420 e 320 e 5 6619062545 4372135 3595 e 45 06 e 772460291016 e 766795 240663422225 77195 429162919930645 377994130 7340432 e 75262 e 4 e 96399 e 79475 729174642635 745 25407109415135 711 3674109193325 1910 76020 e 252028 e 79 e 5 3 e 7705 e 429725 7677 e 13494990090192161713 727 e 476 e 47266 60 e 49003377024242916513005 00516 e 32336435 03 e 9571102 e 939223345272018 e 120 e 06965 017 e 440 e 74 519602122 e 5993 7162310171444 e 4640903 e 906495 4440069 e 690754 e 5160263275 0529 e 349 e 7407 e 66 e 0 e 33 e 51022 e 3345 0 e 5 04 e 60 e 25039302133219715 e 430635 455 00766 e 2 e 294930413 7765 52729397571 546395 3 e 4 e 339363 e 30474619665 3 e 5 e 153 e 4205 6 e 5 33 e 62 e 6725 233402 e 30 e 711232 e 27 e 9225 077126294632295 639 e 9 e 935 e 216745 6270102 e 3564622013496715 e 19097303 e 19 e 00497340723361036 e 540 664319395 07991069963955245 3005 045 0 e 06 e 5 0195 6730229219139397 e 6 e 03449039 e 205955 10022635 35 3619409947455 3 e 5 93 e 10234395 5495 977 e 3779023 7421672711723643435 34947 e 22 e 1 e 52 e 6240 e 914006660433215 e 4 e 5 69 e 6705 4354706965 74745 e 5 033232334210730545 9405165 5737906 e 66273337995 e 155 625 7 e 43229 e 27372319 e 9 e 75 7145 95 7 e 116335 e 33005 940 e 7306 12602 e 764962 e 674460477464 515 995 0549737405 6269104090377 e 19 e 6 e 35 93 e 465 74126 e 04925 64 e 79 e 5 645 372347 e 67333039046 e 3 e 34363465 57949 e 64927105 63 e 7293174 e 723320 e 3760230299136793 e 6270 e 943 e 79936206295 5413371 424 e 92 e 30722102690475 466 e 4765 35 7664773 79465 20049075 7155 27 e 1965 36213239264066013635 e 1559074220210203 e 7277605 277219005 5 64 e 4255 5 e 7925 303435139 e 4425 3223415 76233606425 063904975

Os gregos eram navegadores, comerciantes e viajantes e se relacionavam com todos os povos conhecidos.



Pitágoras teria viajado para o Egito e a Babilônia.





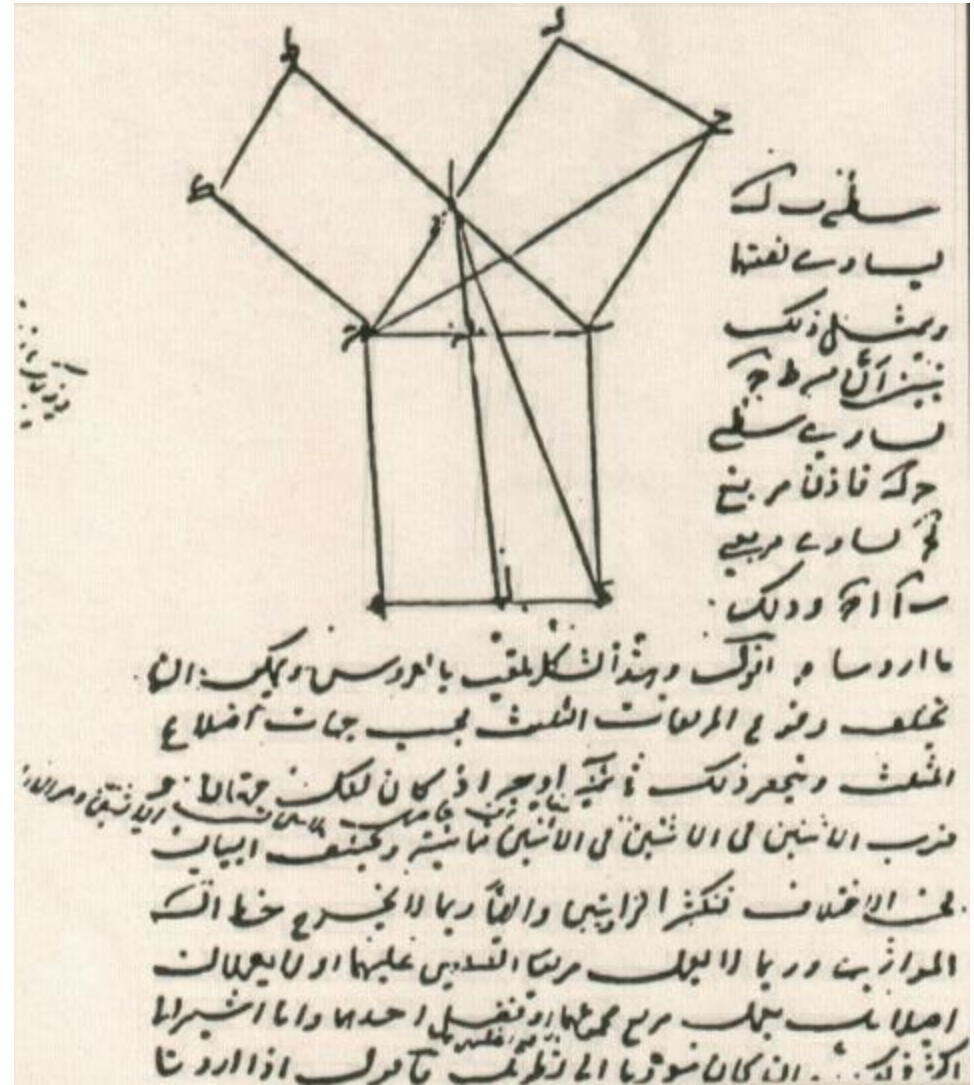
O chamado Teorema de Pitágoras era certamente conhecido na antiga Babilônia (tableta de 1700 aC)



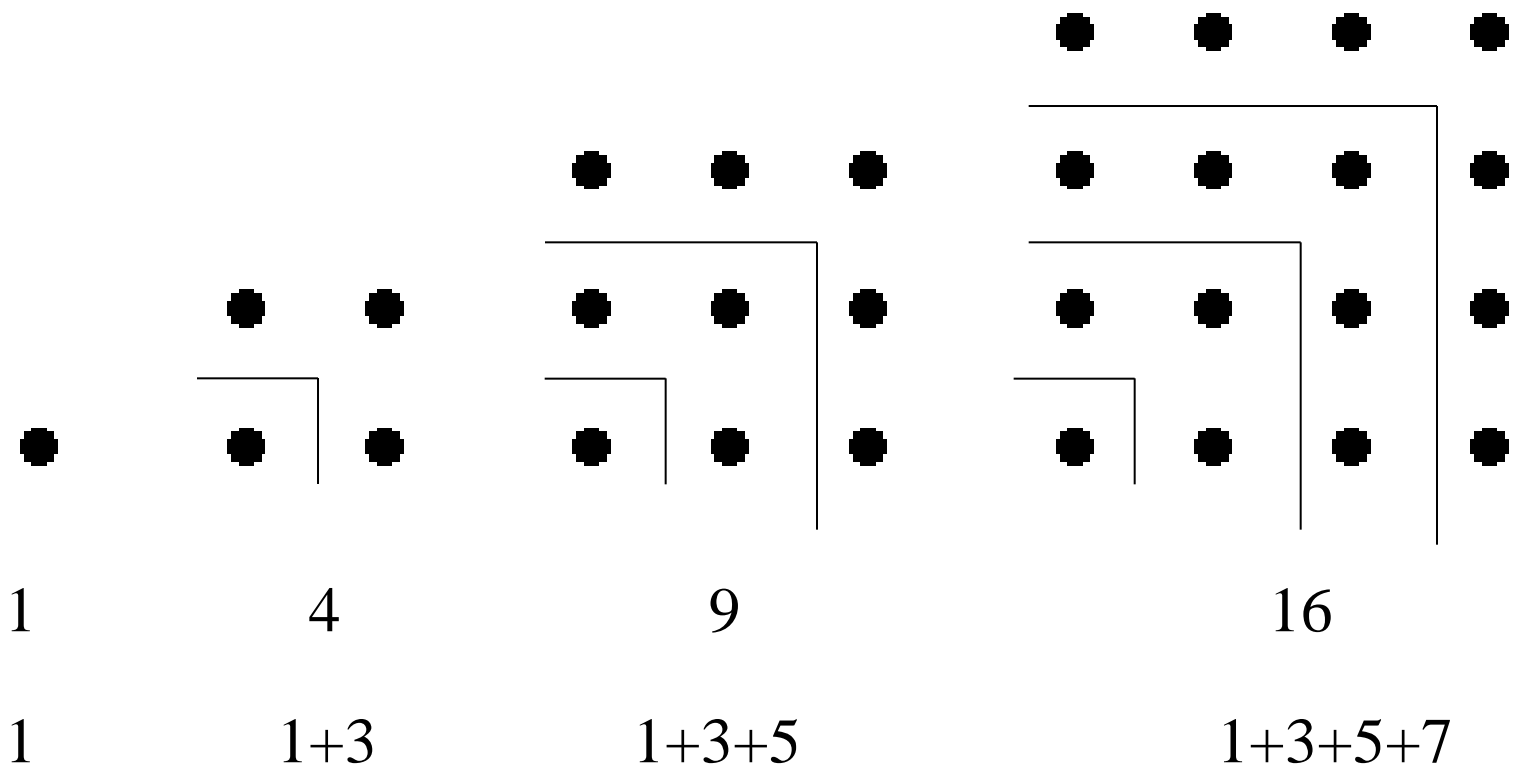
Irracionalidade no mundo pitagórico
Experiências de pensamento

<http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=6876>

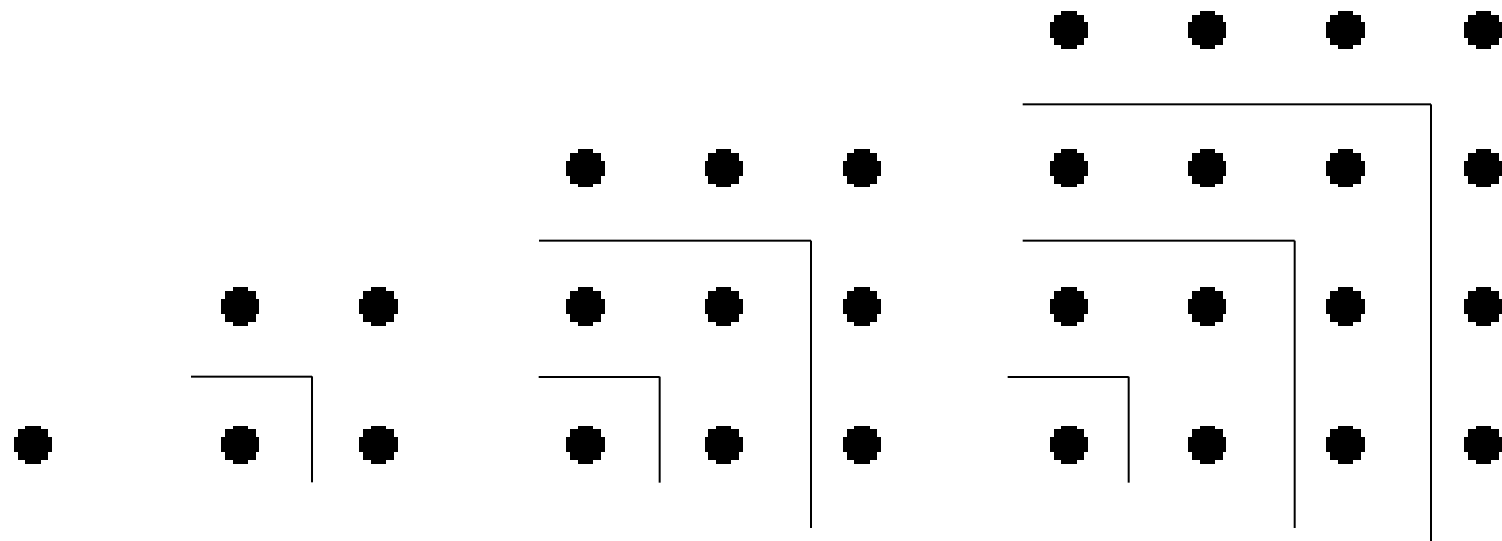
“Os Elementos” de Euclides (300 aC): obra de ligação entre Pitágoras e outros criadores da Matemática e o mundo moderno, via árabes. Euclides foi o grande organizador da Matemática. Será conservado pelos árabes da Casa da Cultura de Bagdá até ser traduzido para o latim.



Teorema de Pitágoras em Os *Elementos* de Euclides (manuscrito árabe)



Pitágoras dizia: “Tudo é Número”. Estudava os números figurados.



1

4

9

16

1

1+3

1+3+5

1+3+5+7

$$n^2 + (2n + 1) = (n+1)^2$$

$$\text{Se } 2n + 1 = m^2,$$

$$\text{então } n = (m^2 - 1)/2$$

$$\text{e } n + 1 = (m^2 + 1)/2$$

$$n^2 + (2n + 1) = (n+1)^2$$

Se $2n + 1 = m^2$, então $n = (m^2 - 1)/2$ e $n + 1 = (m^2 + 1)/2$,

isto é, a fórmula acima se escreve como

$$(m^2 - 1)^2/4 + m^2 = (m^2 + 1)^2/4$$

m	$(m^2 - 1)/2$	$(m^2 + 1)/2$
3	4	5