CÁLCULO

Antonio Carlos Brolezzi

Em Geometria Analítica, vimos:

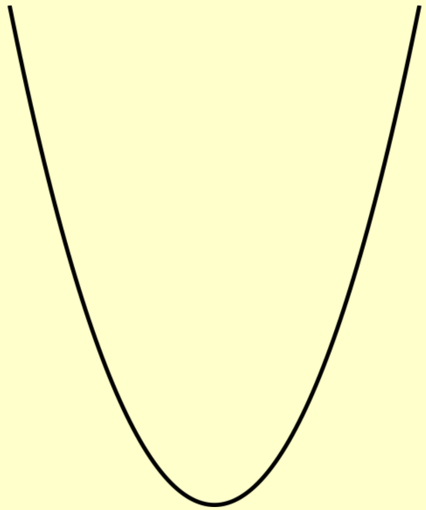
Século XVII na Europa: a Idade da Razão.

Geometria grega: lugar geométrico, construções com régua e compasso de curvas e formas.

Álgebra árabe: relação entre equações e geometria.

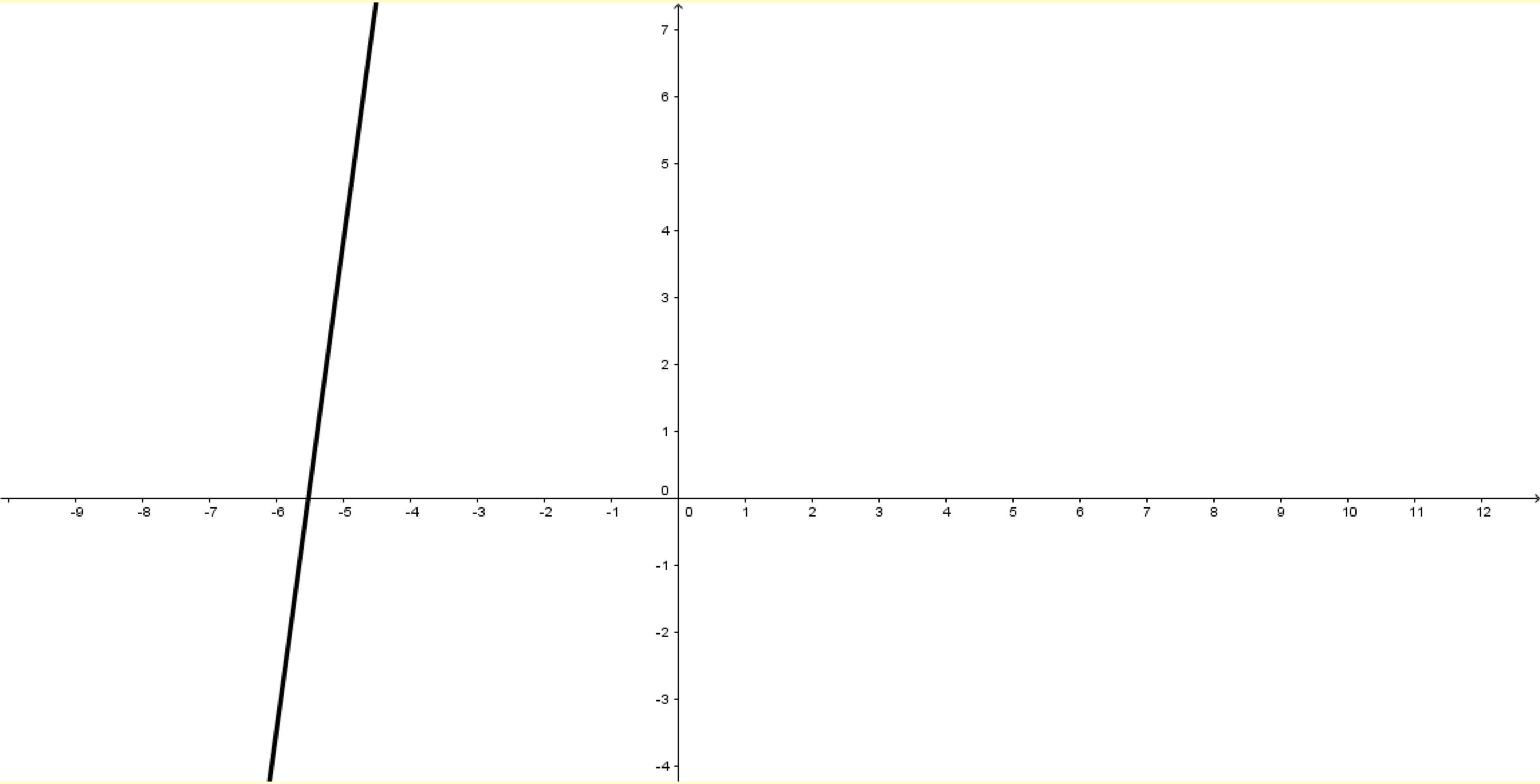
Fermat e Descartes: Geometria analítica:

Ponte entre os dois “mundos”: a geometria grega e a álgebra árabe.



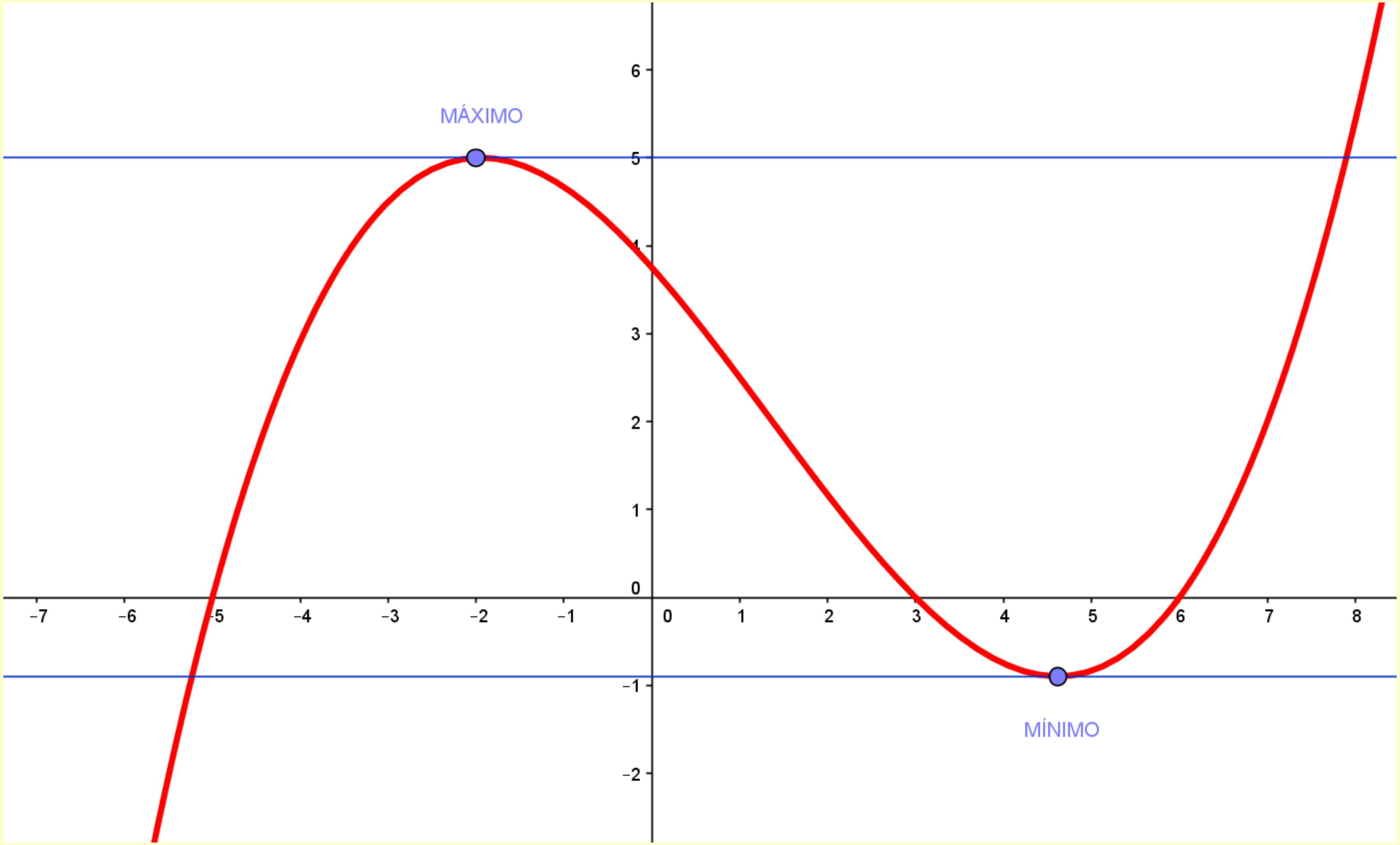
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Uma curva pode ser definida a partir de suas tangentes.



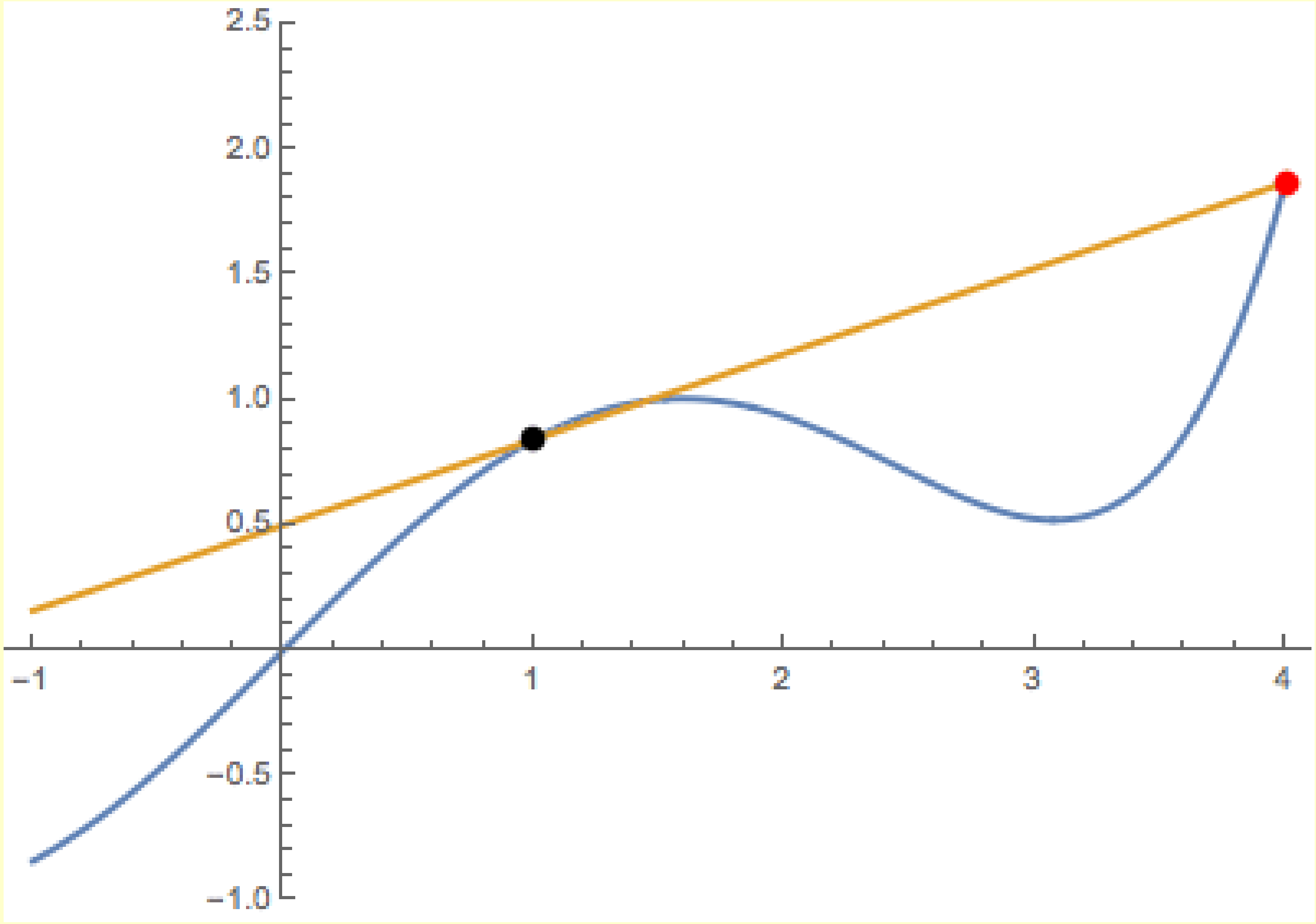
Fermat percebeu que quando a curva tem um máximo ou um mínimo, sua tangente é horizontal (Teorema de Fermat).

Uma curva pode ser definida a partir de suas tangentes.



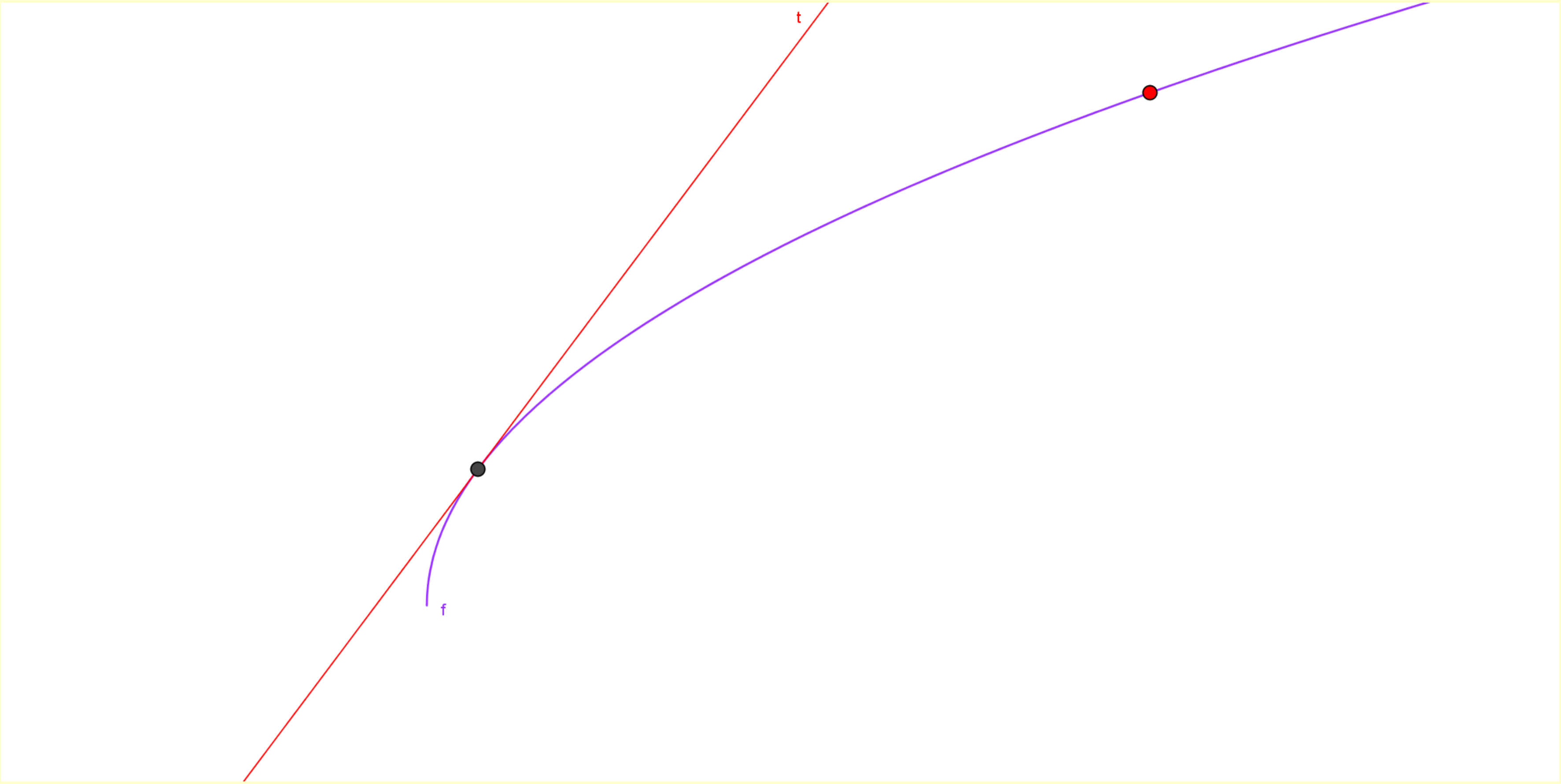
Fermat percebeu que quando a curva tem um máximo ou um mínimo, sua tangente é horizontal (Teorema de Fermat).

Como encontrar a equação da reta tangente à uma curva em um ponto dado?



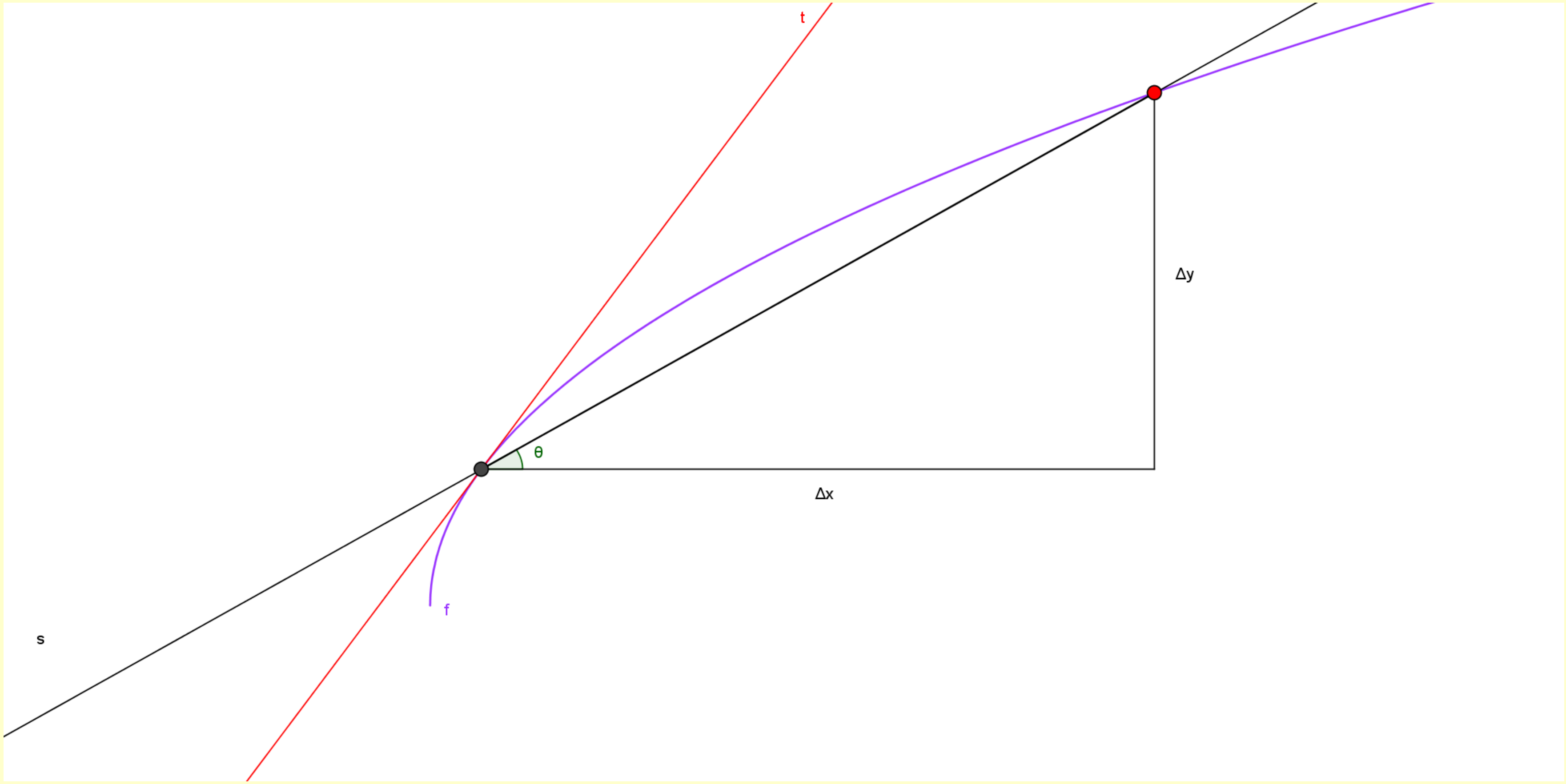
Aproximando o ponto vermelho do ponto preto, a reta secante tende à reta tangente.

Como encontrar a equação da reta tangente à uma curva em um ponto dado?



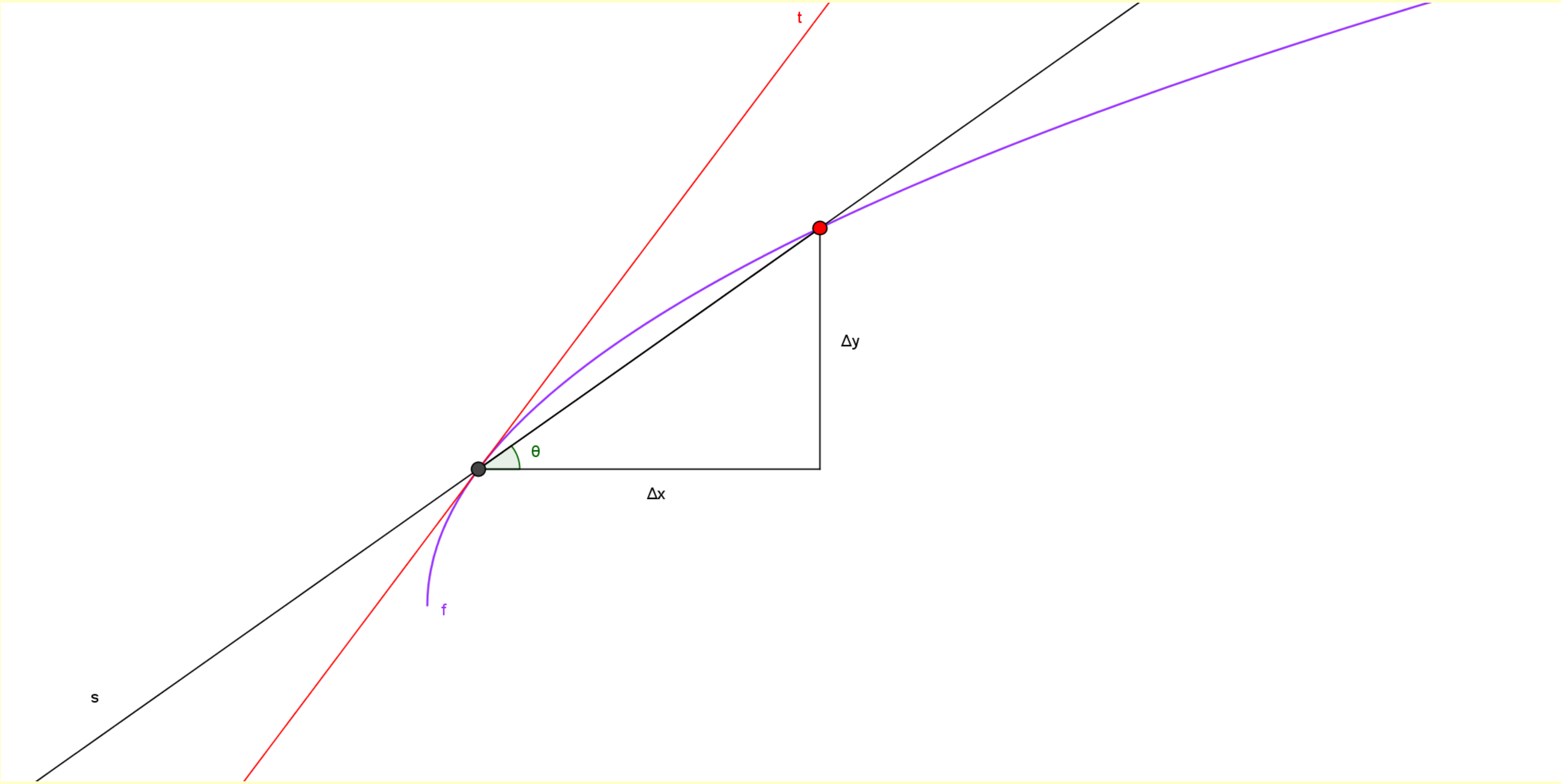
Aproximando o ponto vermelho do ponto preto, a reta secante tende à reta tangente.

Como encontrar a equação da reta tangente à uma curva em um ponto dado?



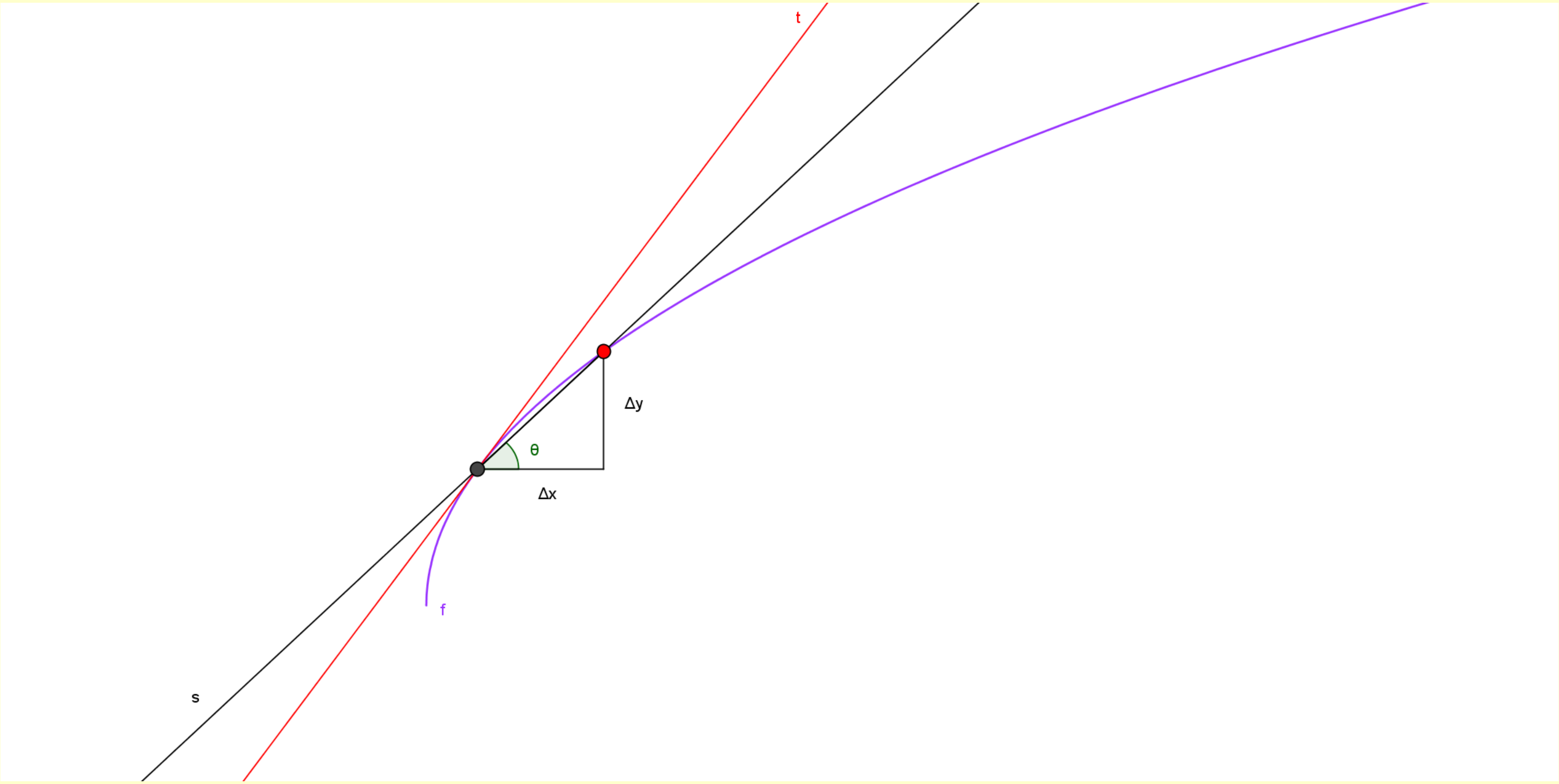
Aproximando o ponto vermelho do ponto preto, a reta secante tende à reta tangente.

Como encontrar a equação da reta tangente à uma curva em um ponto dado?



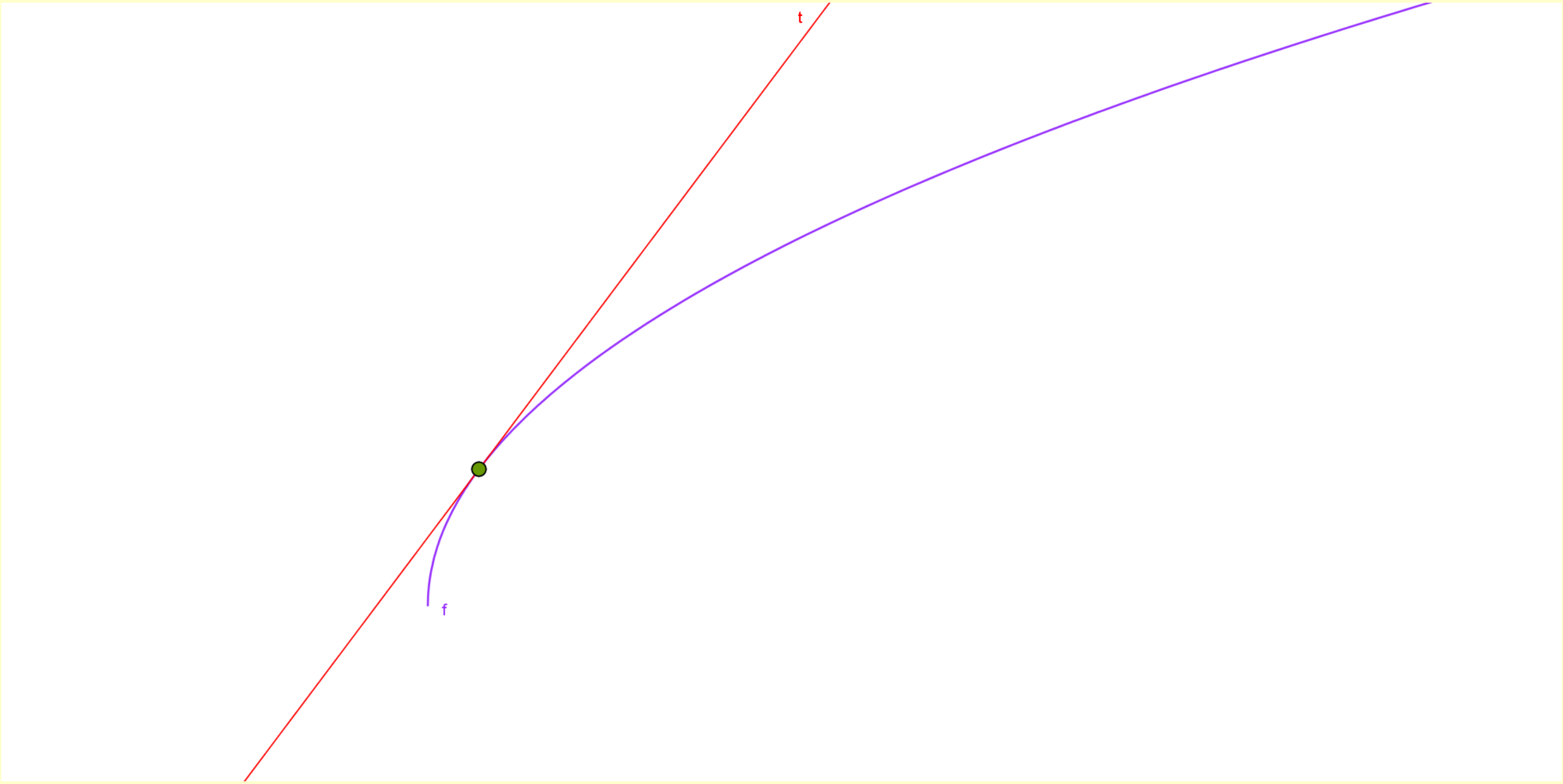
Aproximando o ponto vermelho do ponto preto, a reta secante tende à reta tangente.

Como encontrar a equação da reta tangente à uma curva em um ponto dado?



Aproximando o ponto vermelho do ponto preto, a reta secante tende à reta tangente.

Como encontrar a equação da reta tangente à uma curva em um ponto dado?



Aproximando o ponto vermelho do ponto preto, a reta secante tende à reta tangente.

“Tender a” é um conceito novo da matemática do movimento.

Taxa de variação média:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

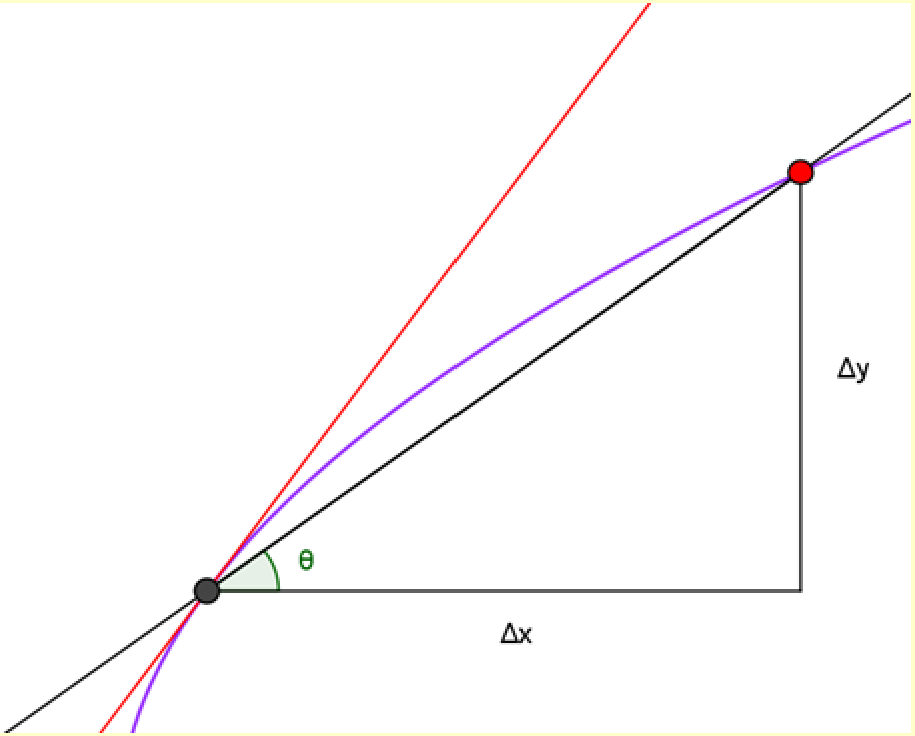
Como “velocidade média”:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Fazendo Δt tender a zero, temos a “velocidade instantânea”:

$$v_i = \frac{ds}{dt}$$

Derivada é uma taxa de variação instantânea.



A taxa de variação média é a tangente do ângulo θ:

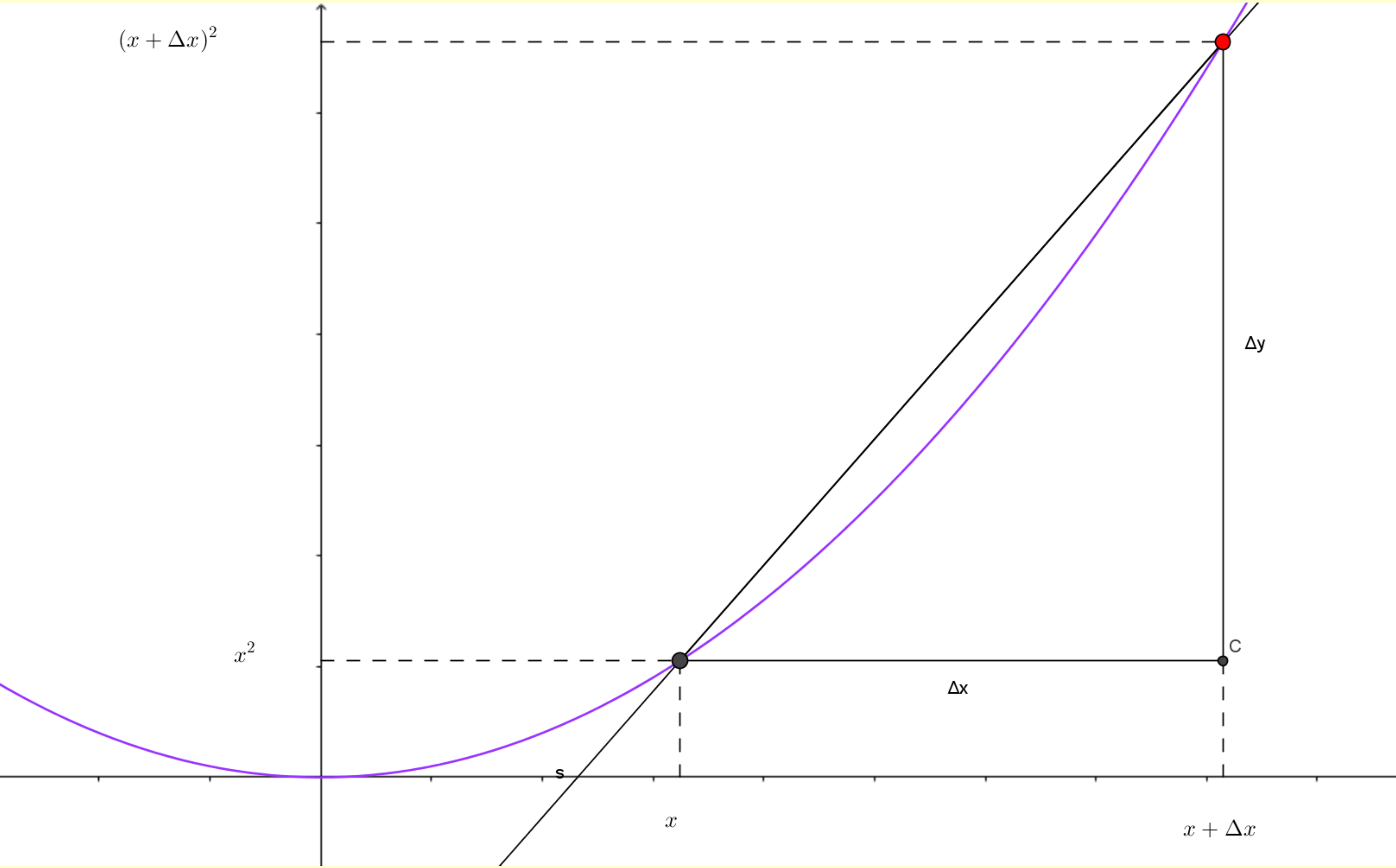
$$tg\theta = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

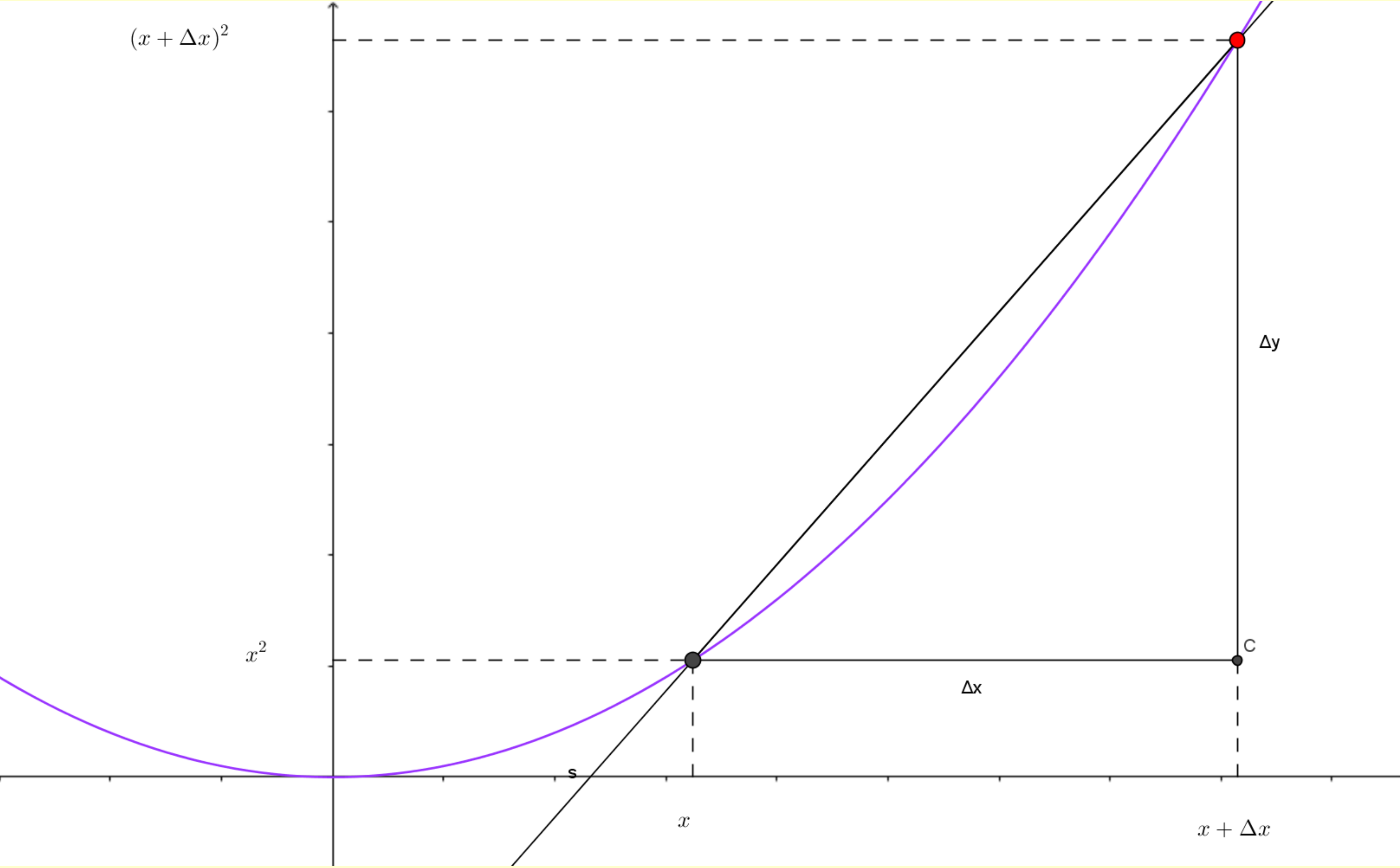
Fazendo $\Delta x \to 0$, temos o coeficiente angular da reta tangente:

$$m = \frac{dy}{dx}$$

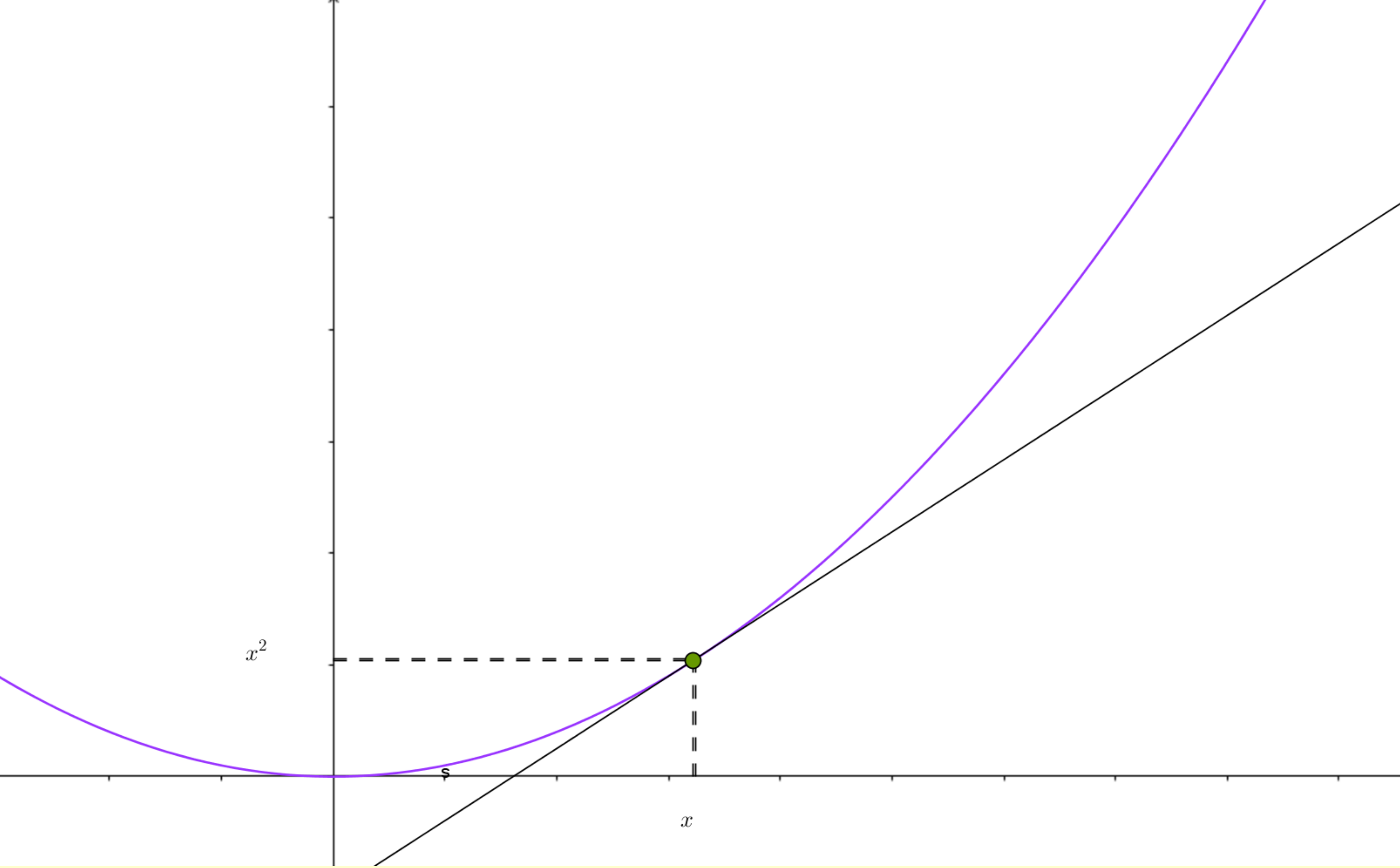
Vamos calcular a expressão de uma derivada:

Tomemos o caso de $y = x^2$.

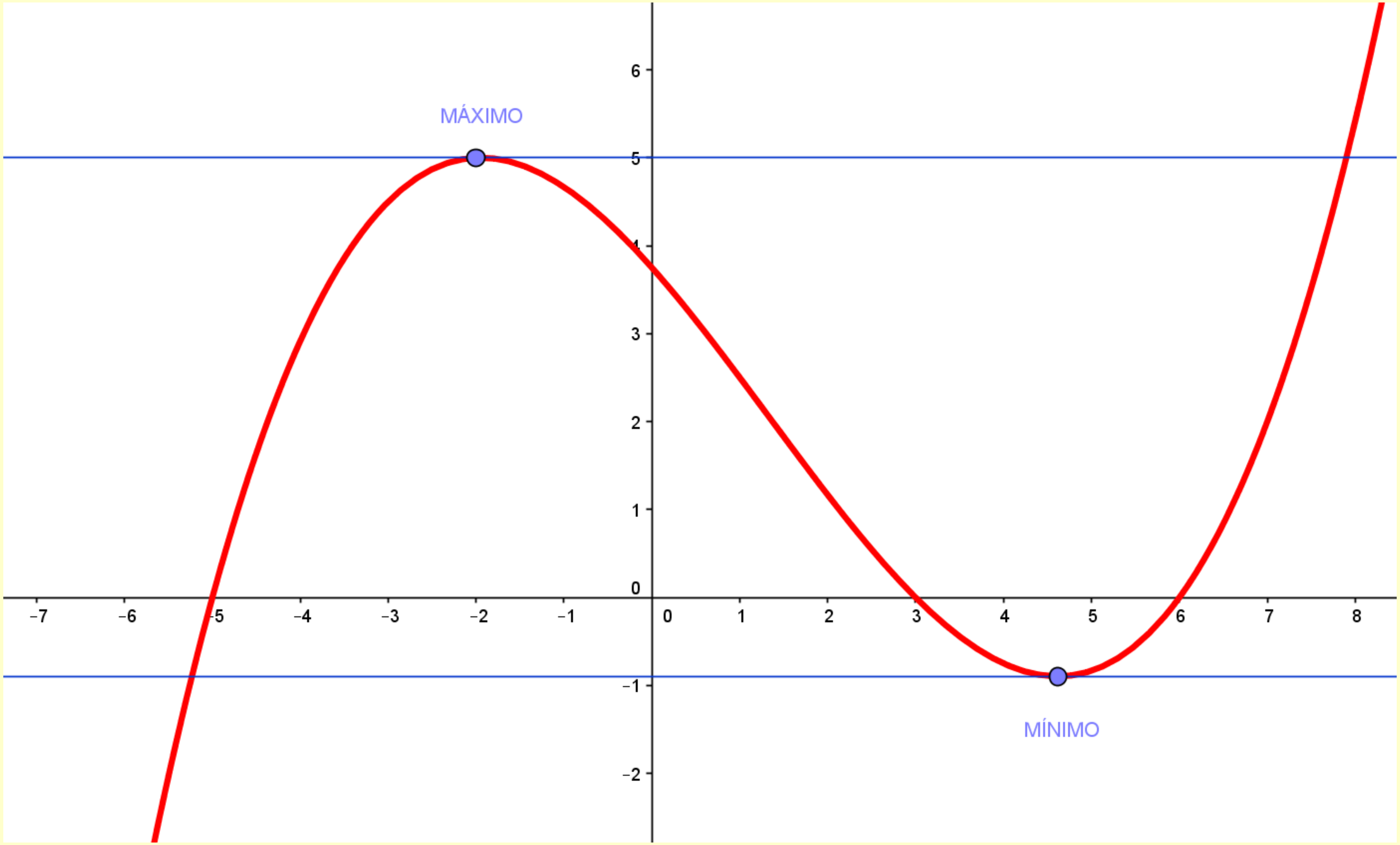




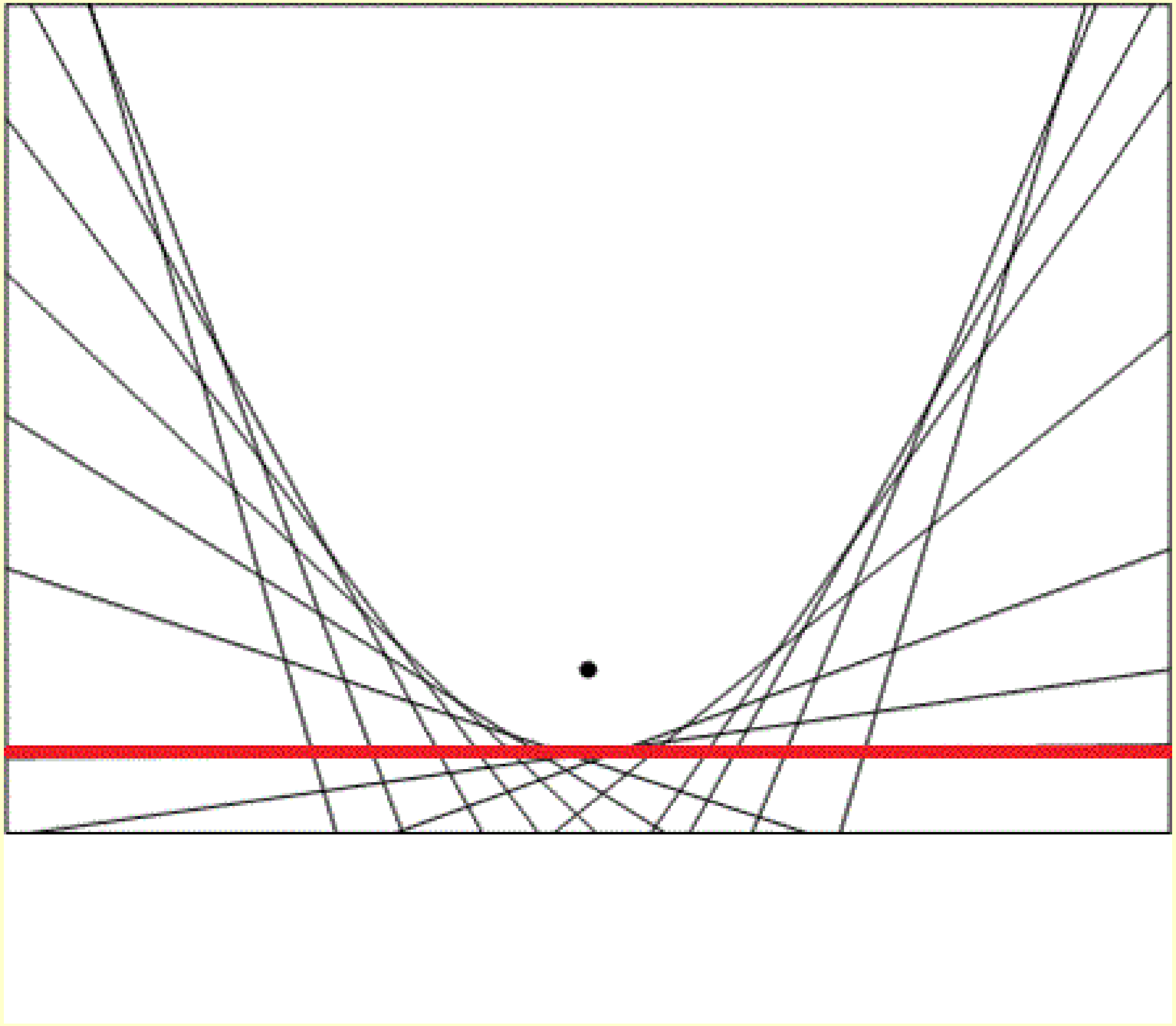
$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2-(x)^2}{\Delta x} = \frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-(x)^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x+\Delta x.$$



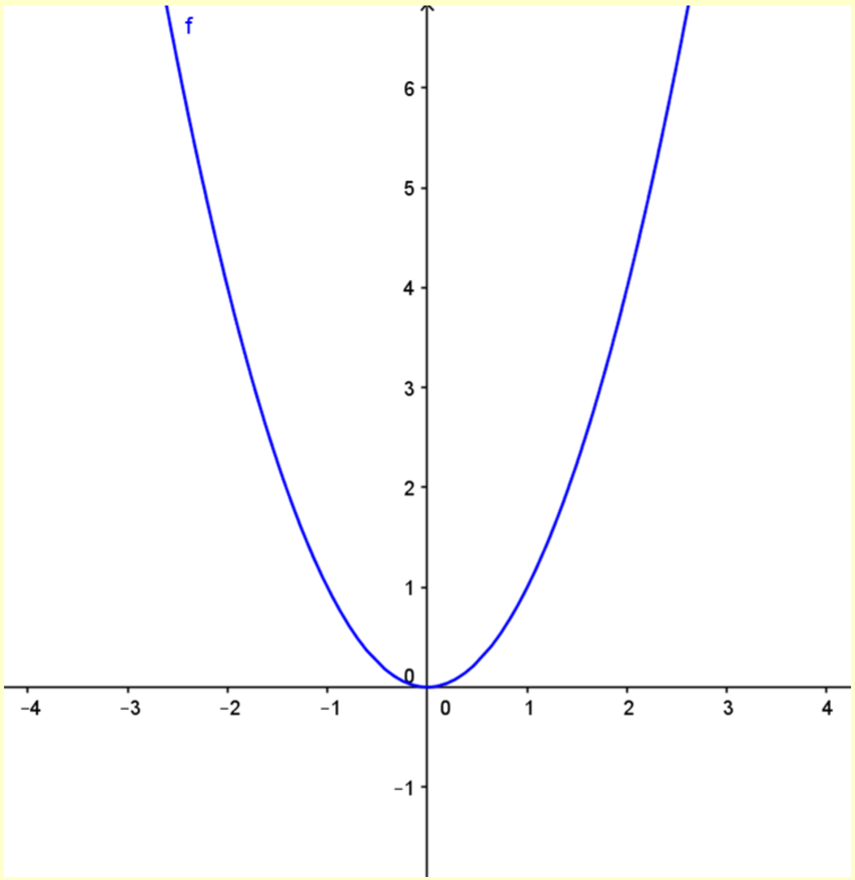
Quando $\Delta x \rightarrow 0$ temos a derivada de $y = x^2$ que é $\frac{dy}{dx} = 2x$.

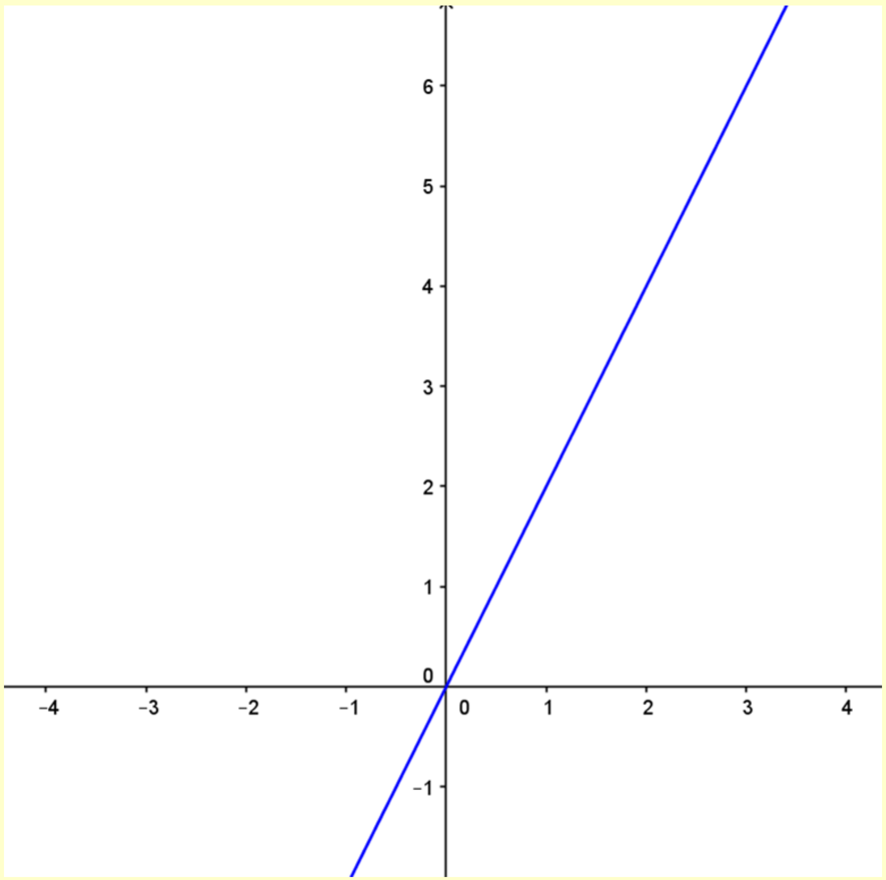


O Teorema de Fermat afirma que se uma função $y=f(x)$ possui um ponto de máximo ou mínimo local em algum x=c, então a derivada da função nesse ponto e zero.

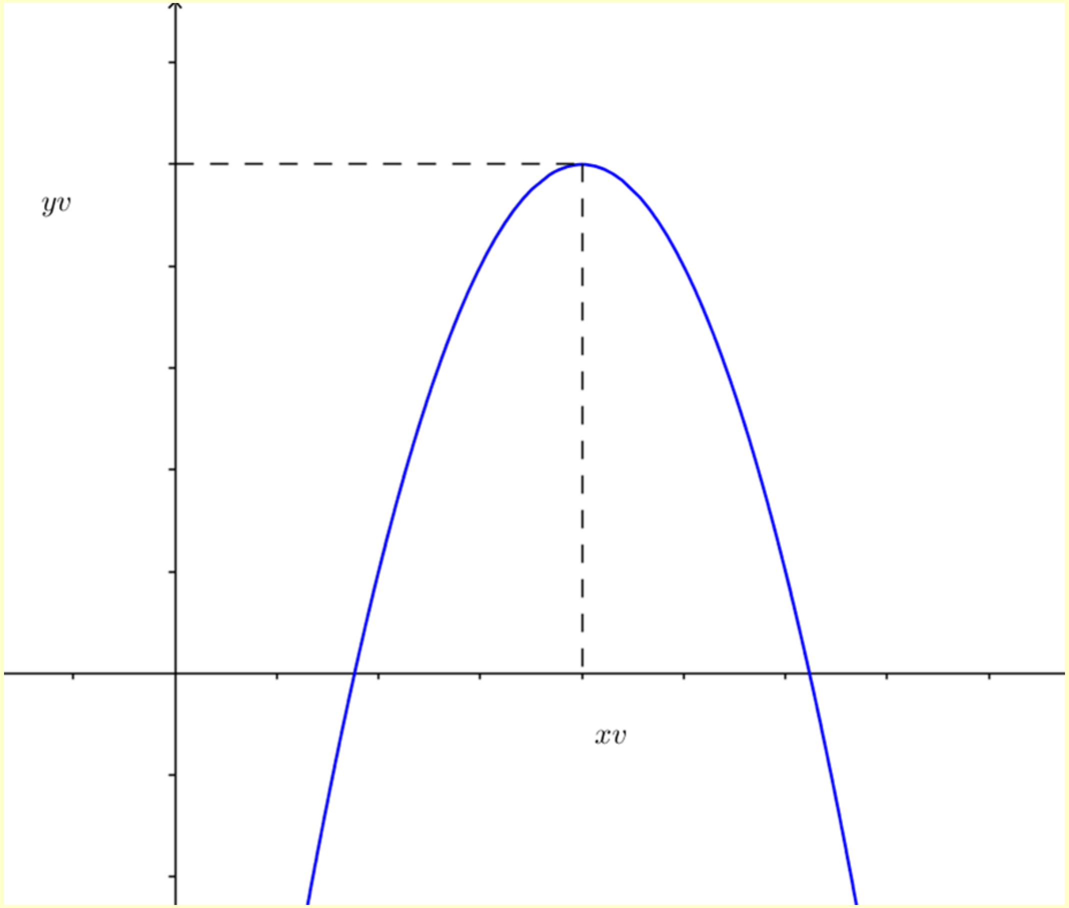


De fato é o que podemos ver na nossa dobradura.

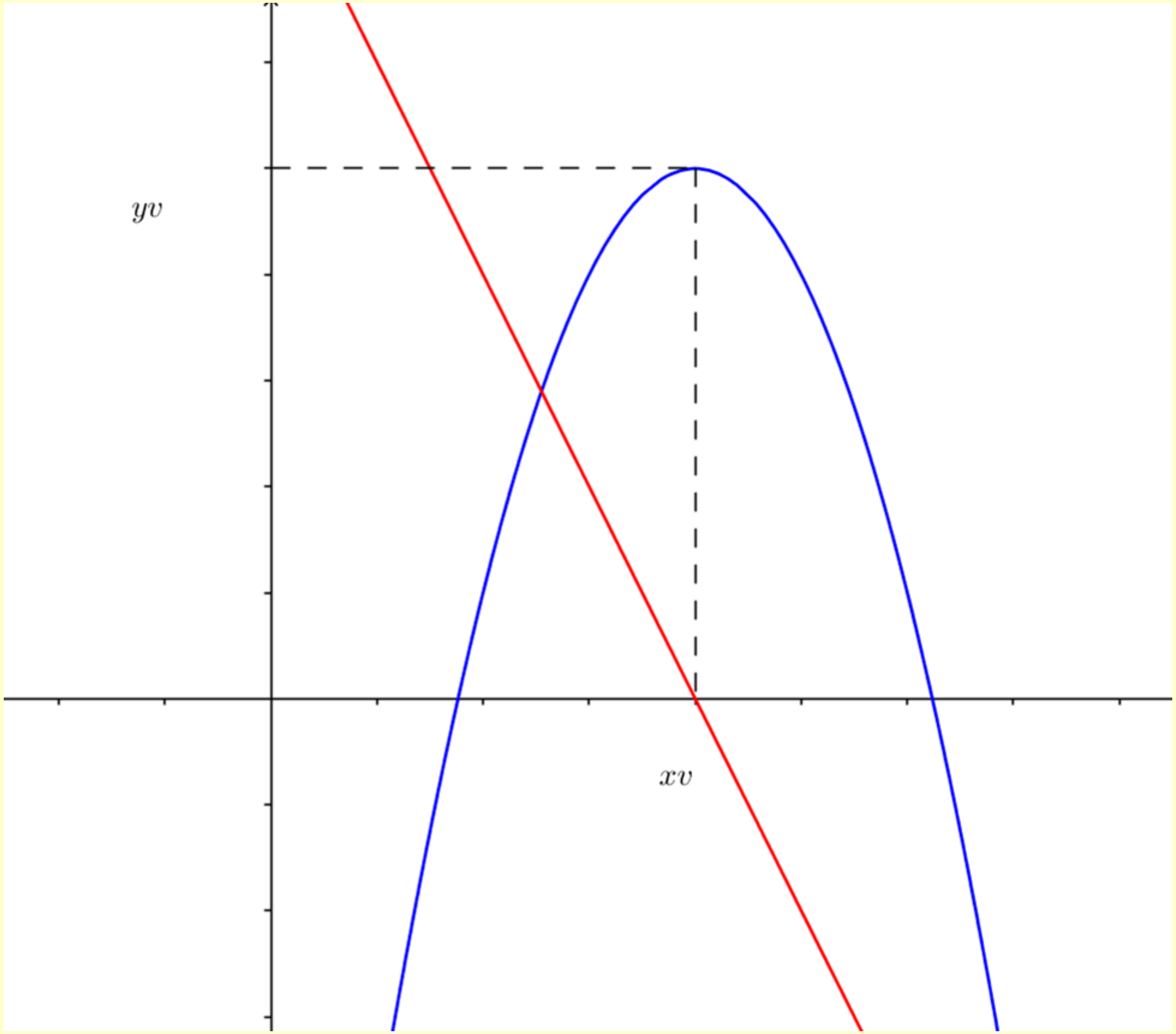




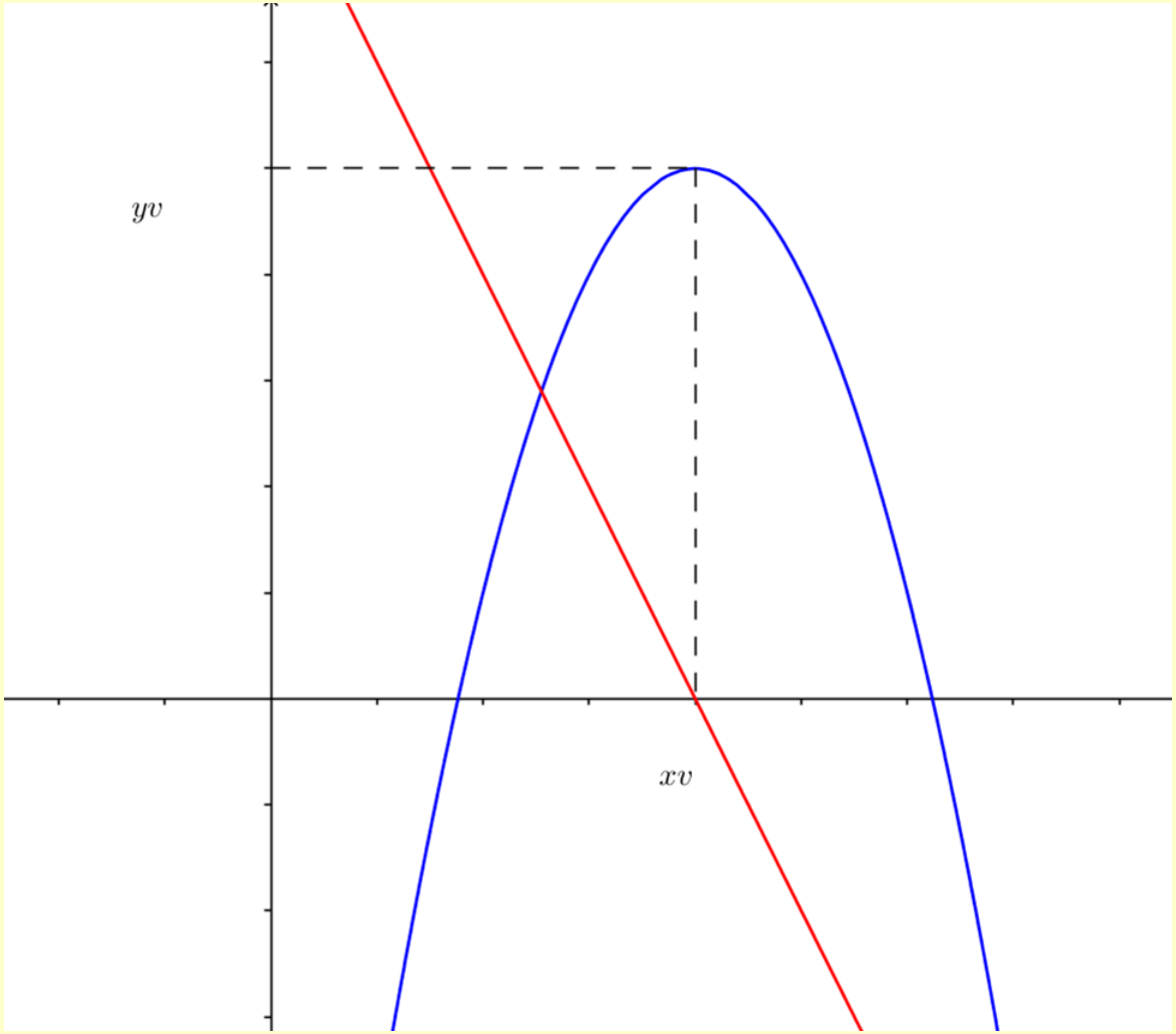
A função afim $y' = 2x$, derivada da função $y = x^2$, tem zero no próprio zero.



Em uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$,



Em uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, a derivada é a função $y' = 2ax + b$.



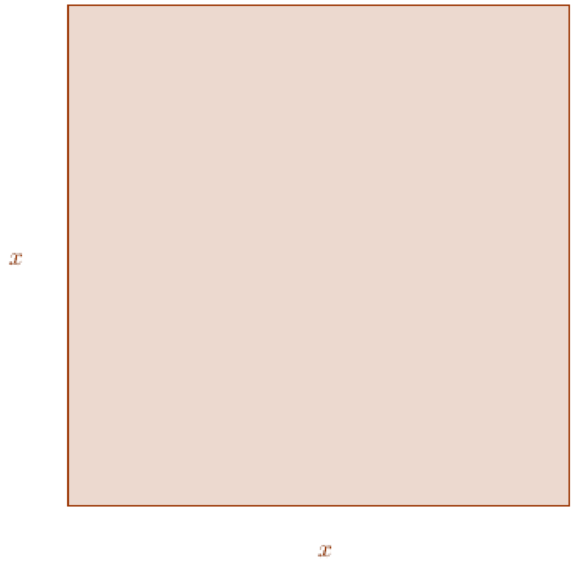
Fazendo $y' = 0$, temos $2ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$, que é a expressão do x do vértice.

A matemática grega considerava o efeito do movimento e das transformações nas formas geométricas.

Como aumenta a área de um quadrado quando seu lado aumenta?

O aumento instantâneo da área do quadrado corresponde a duas vezes o lado.

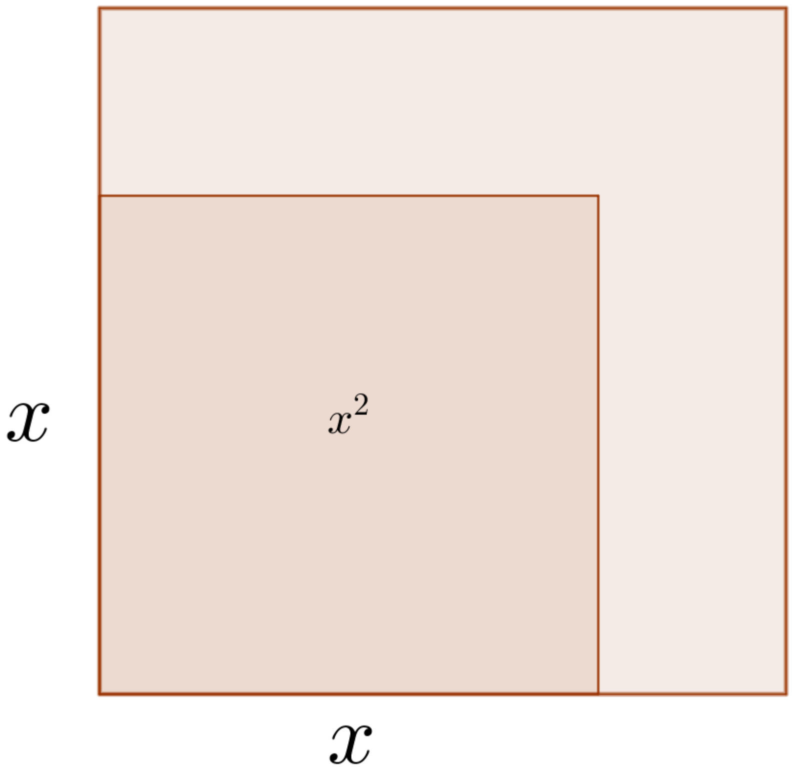
A taxa de variação instantânea da área é 2*x*.



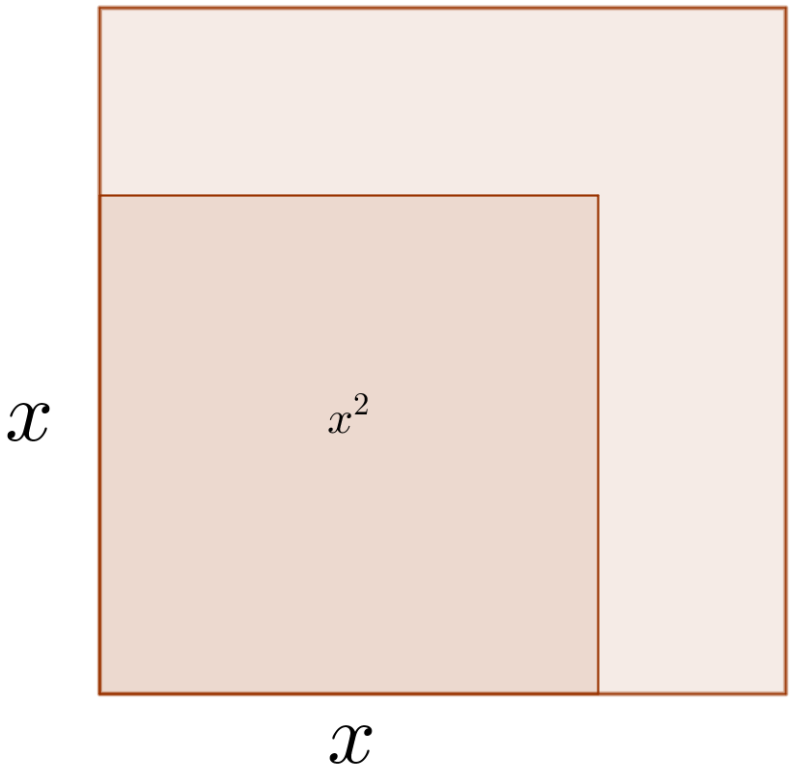
$$A(x) = x^2$$

$$A'(x) = \frac{dA}{dx} = 2x$$

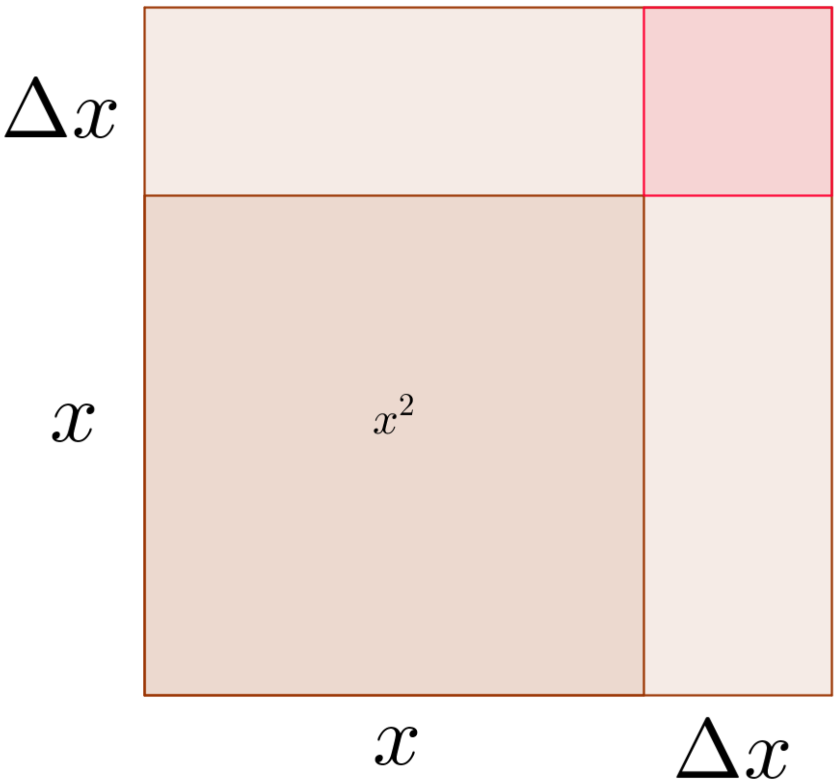
O aumento da área é a área da figura em forma de “L”.



O aumento da área é a área da figura em forma de “L”.

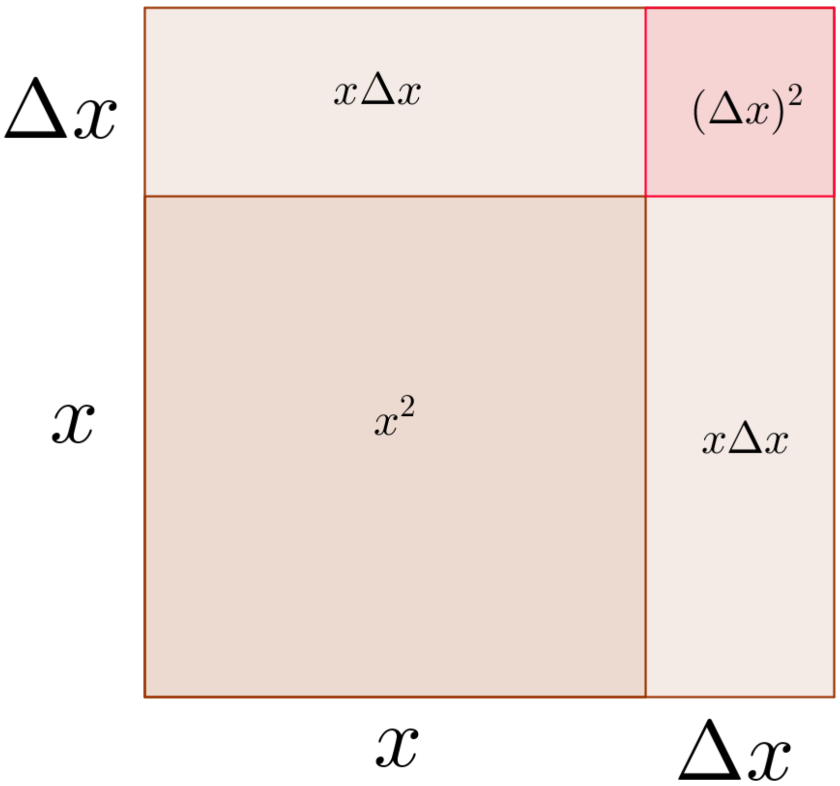


Essa área, ΔA, é dada por



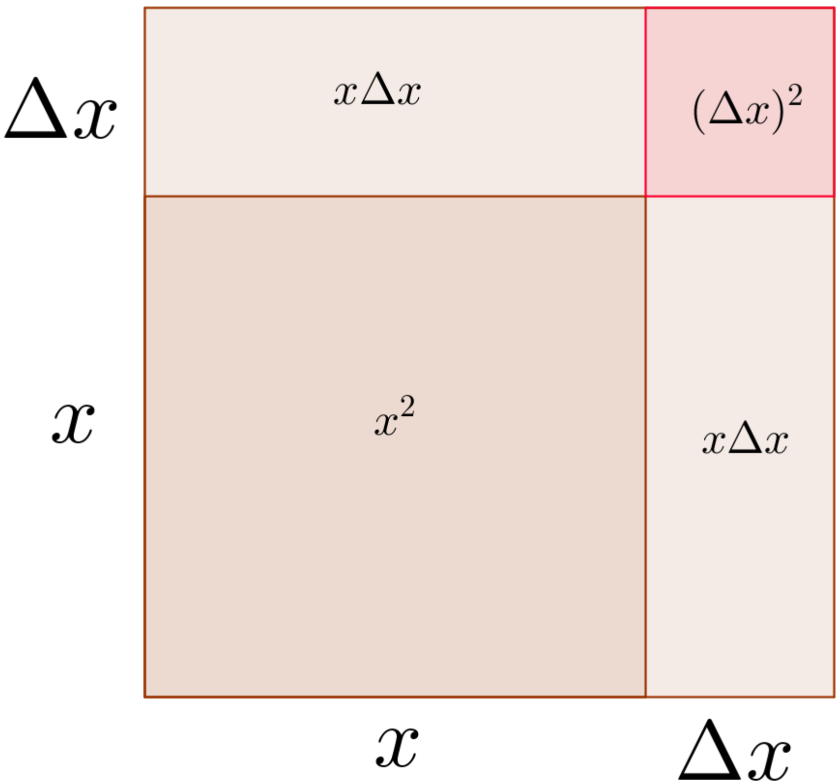
Essa área, ΔA, é dada por

$$\Delta A = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$



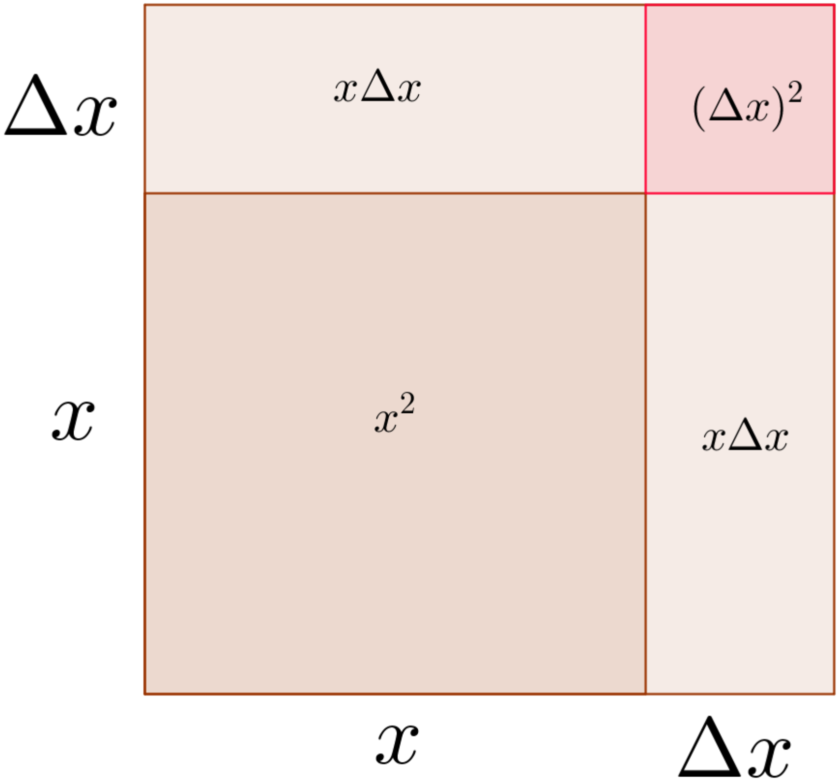
A taxa de aumento da área é

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$



A taxa de aumento da área é

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$



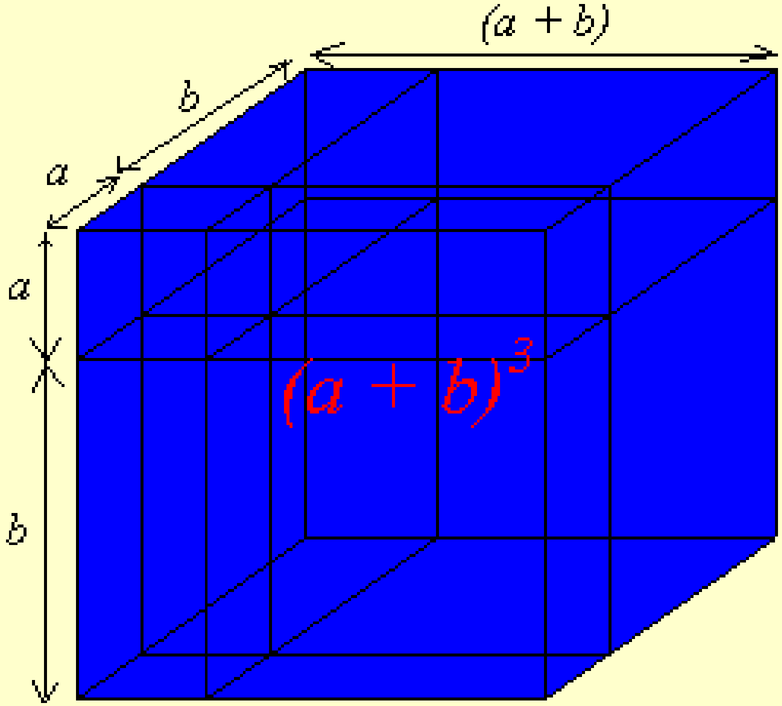
Fazendo $\Delta x \to 0$,

temos $\frac{\Delta A}{\Delta x} \to 2x$.

Portanto,

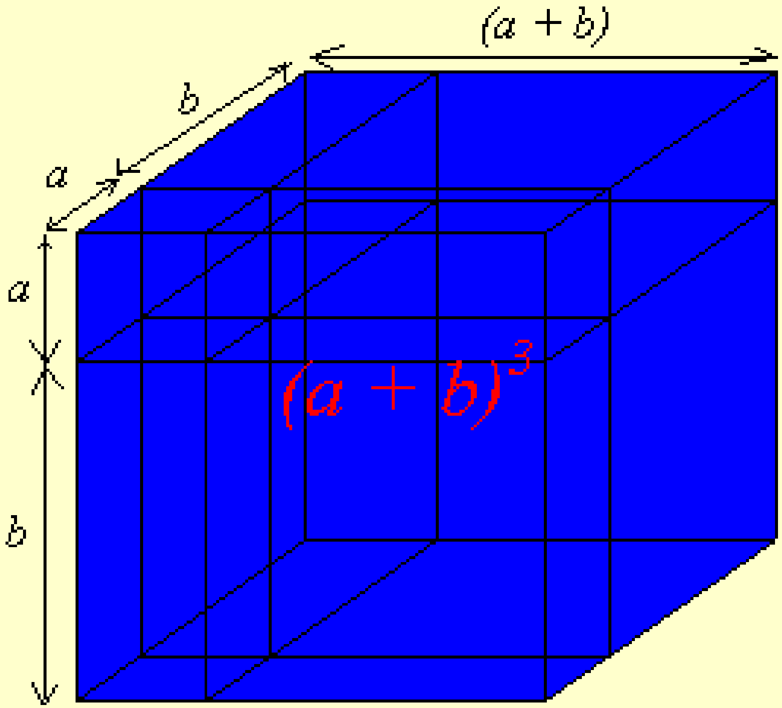
$$\frac{dA}{dx} = 2x.$$

No caso do volume do cubo de aresta x, cujo volume é $V(x) = x^3$, a taxa de variação instantânea é $3x^2$.



A taxa de variação do volume do cubo é

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^3-(x)^3}{\Delta x} = \frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3)}{\Delta x}$$



Fazendo $\Delta x \to 0$,

temos $\frac{\Delta V}{\Delta x} \to 3x^2$.

Portanto,

$$\frac{dA}{dx} = 3x^2.$$

Como aumenta a área de um círculo quando seu raio *r* aumenta?

A taxa de aumento da área do círculo é

$$\frac{\Delta A}{\Delta r} = \frac{\pi(r+\Delta r)^2 - \pi(r)^2}{\Delta r} = \frac{2\pi r \Delta r + (\Delta r)^2}{\Delta r}$$

Fazendo $\Delta r \to 0$,

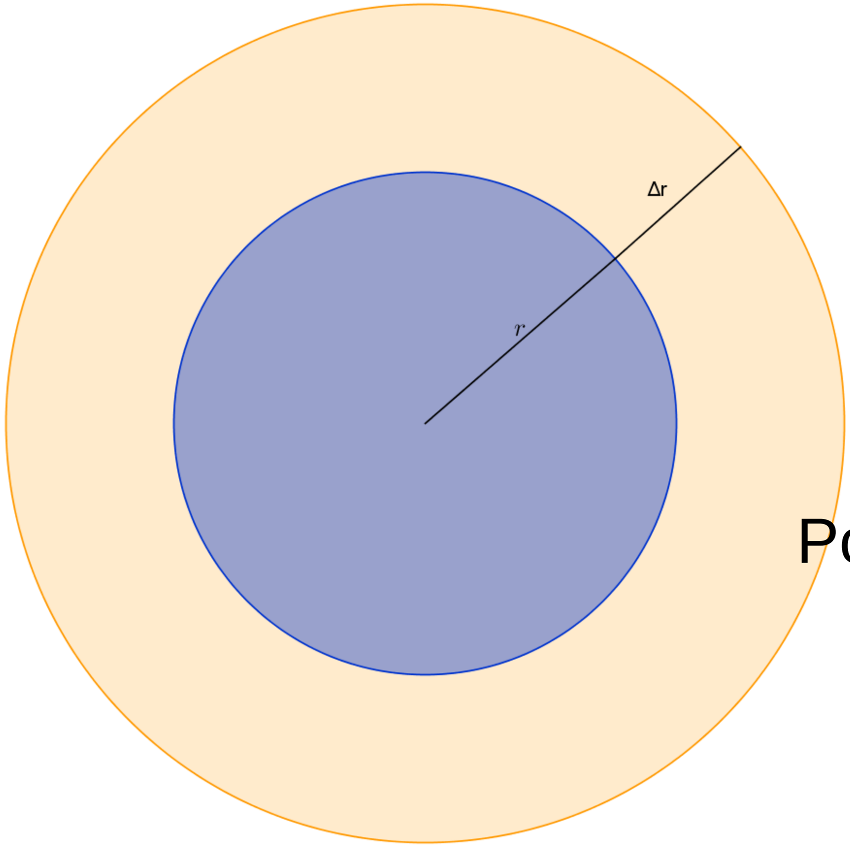
temos $\frac{\Delta A}{\Delta r} \to 2\pi r$.

Portanto,

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r.$$

A taxa de aumento da área do círculo é

$$\frac{\Delta A}{\Delta r} = \frac{\pi(r+\Delta r)^2 - \pi(r)^2}{\Delta r} = \frac{2\pi r\Delta r + \pi(\Delta r)^2}{\Delta r}$$



Fazendo $\Delta r \to 0$,

temos $\frac{\Delta A}{\Delta r} \to 2\pi r$.

Portanto,

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r.$$

Para uma esfera de raio r, cujo volume é dado por $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, a taxa de variação é

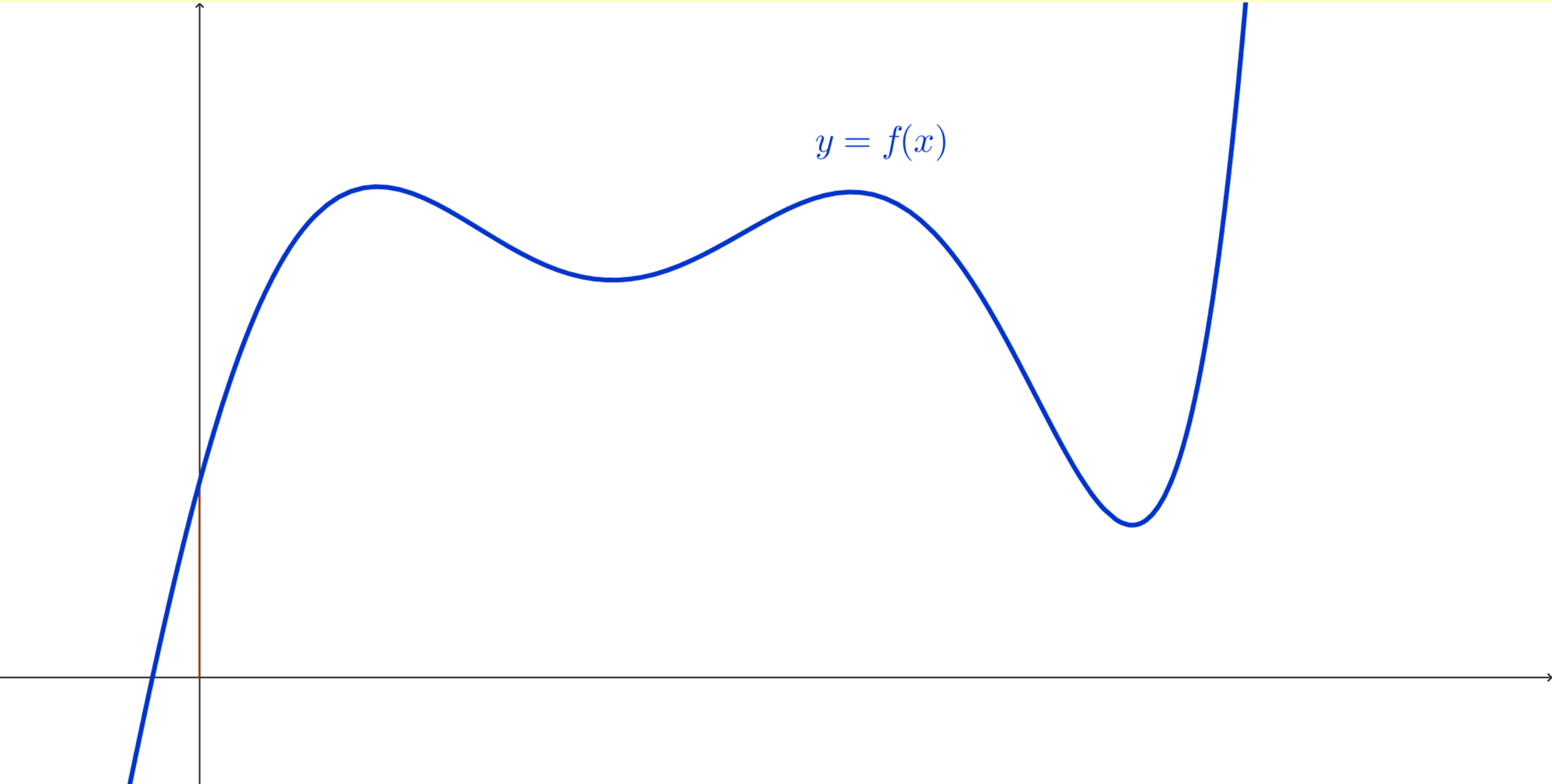
$$\frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{\frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi(r)^3}{\Delta r} = \frac{4\pi\left(r^2\Delta r + r(\Delta r)^2 + \frac{1}{3}(\Delta r)^3\right)}{\Delta r}$$

Fazendo $\Delta r \to 0$,

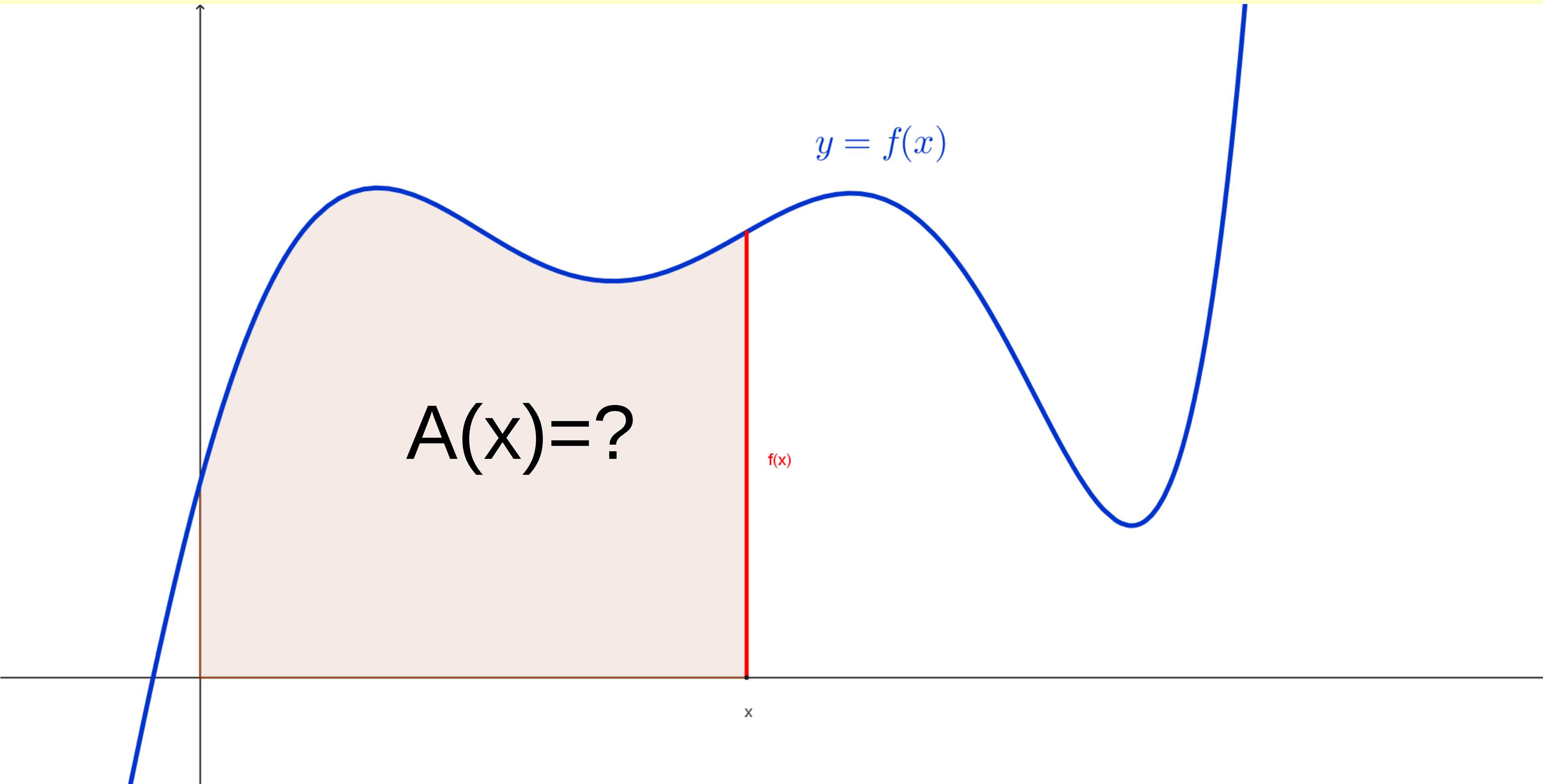
temos $\frac{\Delta V}{\Delta r} \to 4\pi r^2$.

Portanto, $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$.

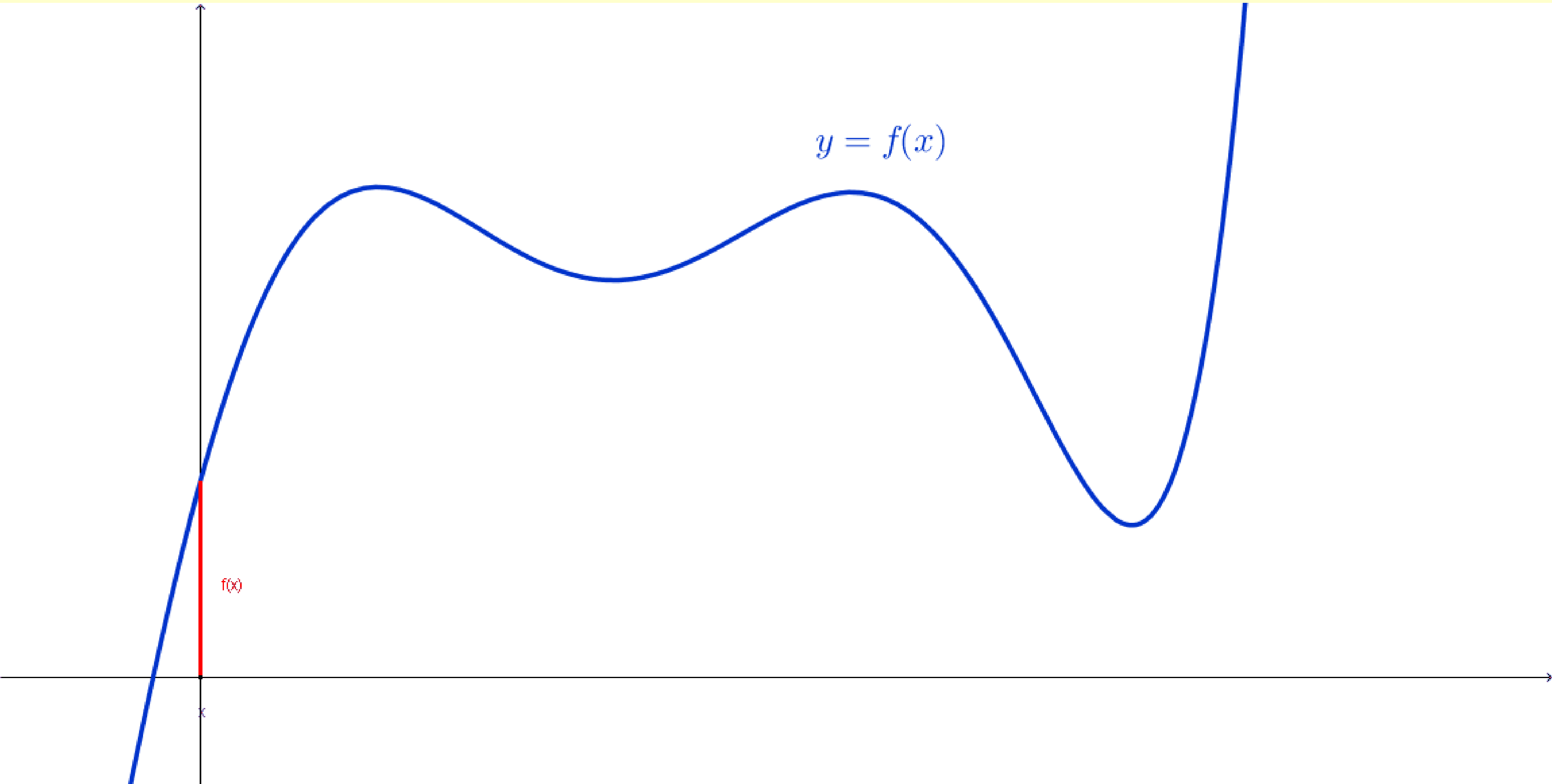
Como varia a área definida sob o gráfico de uma função?



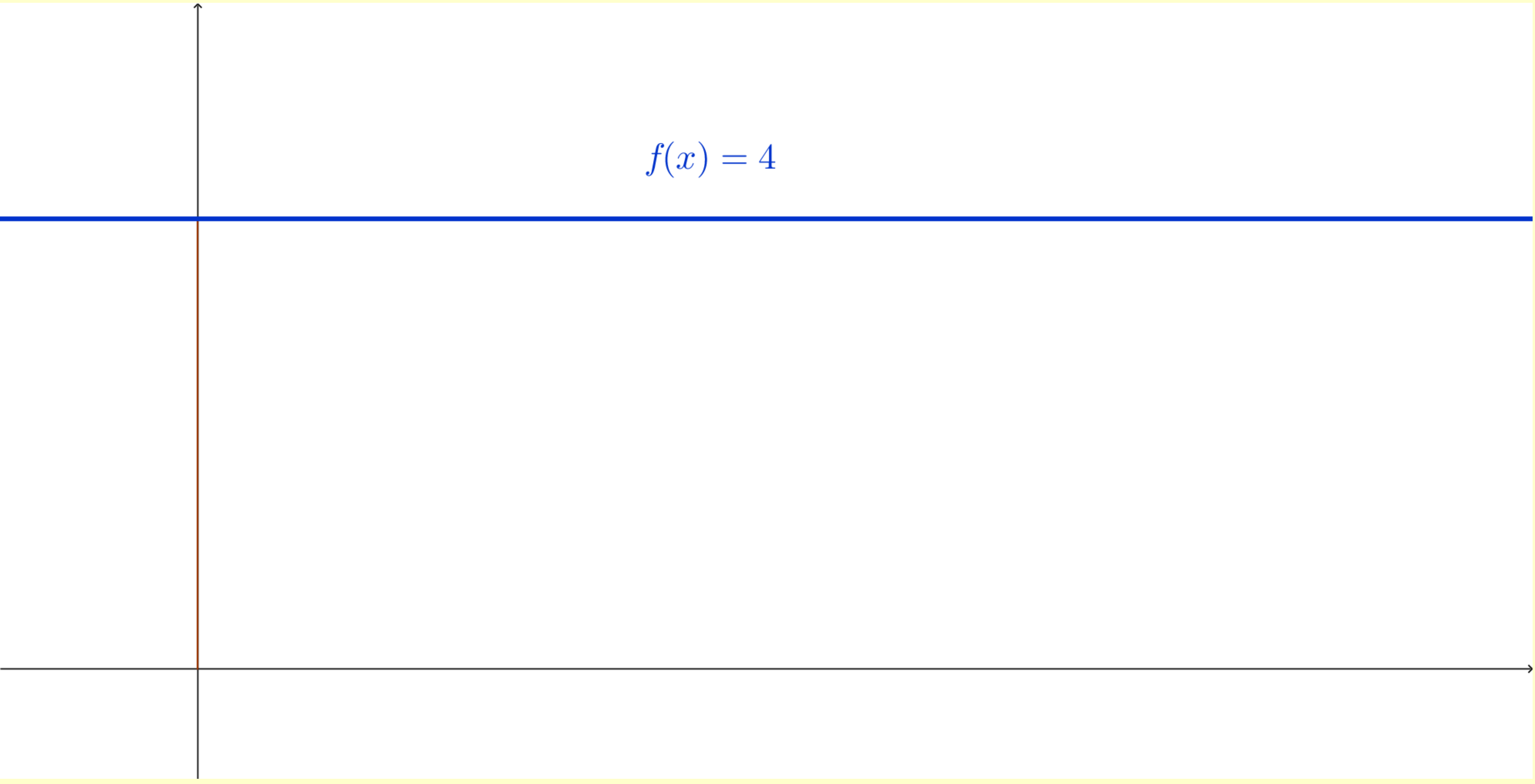
Como varia a área de definida sob o gráfico de uma função?



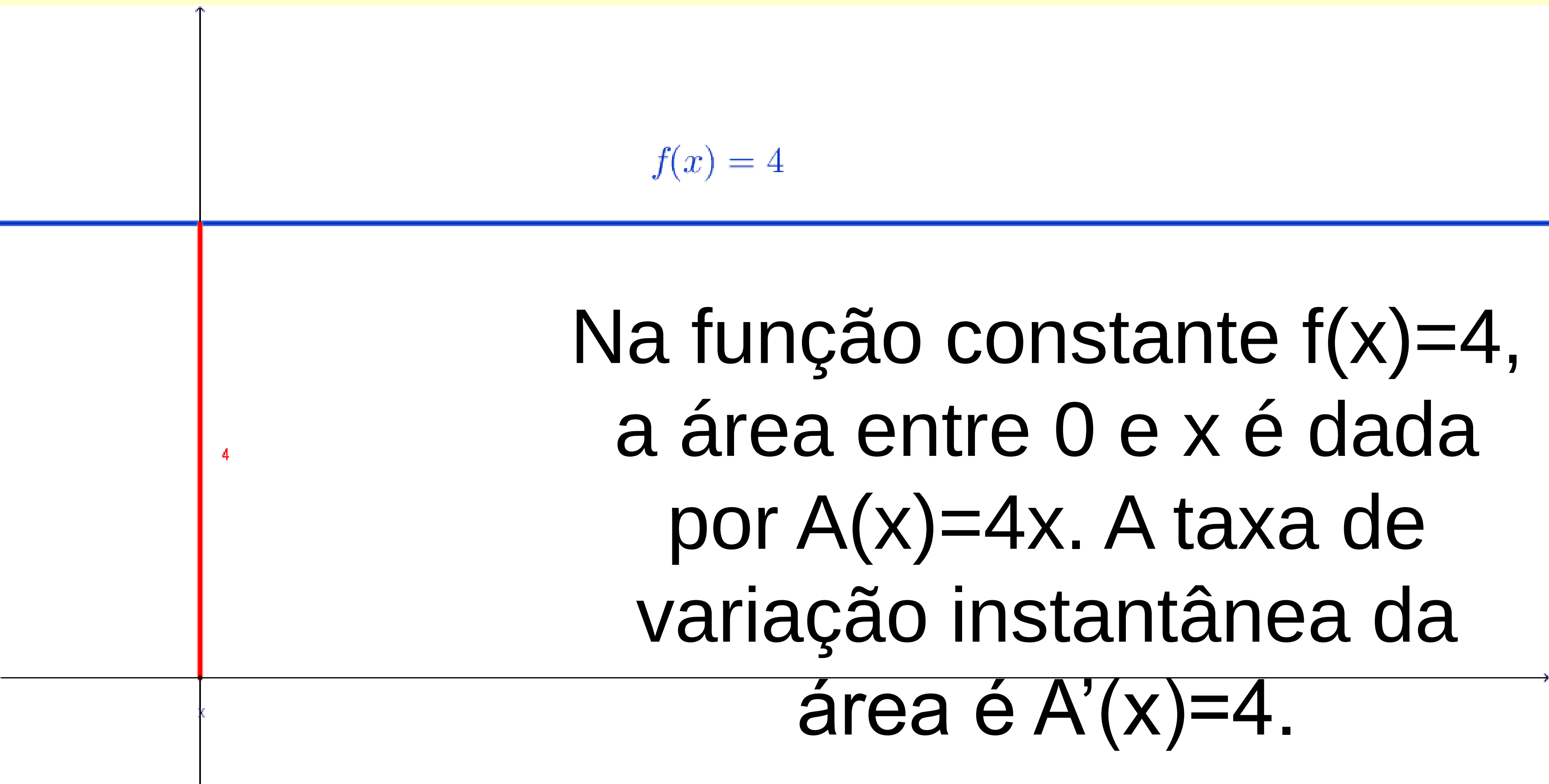
A variação instantânea da área A(x) é A'(x)=f(x).



Como varia a área de definida sob o gráfico de uma função?

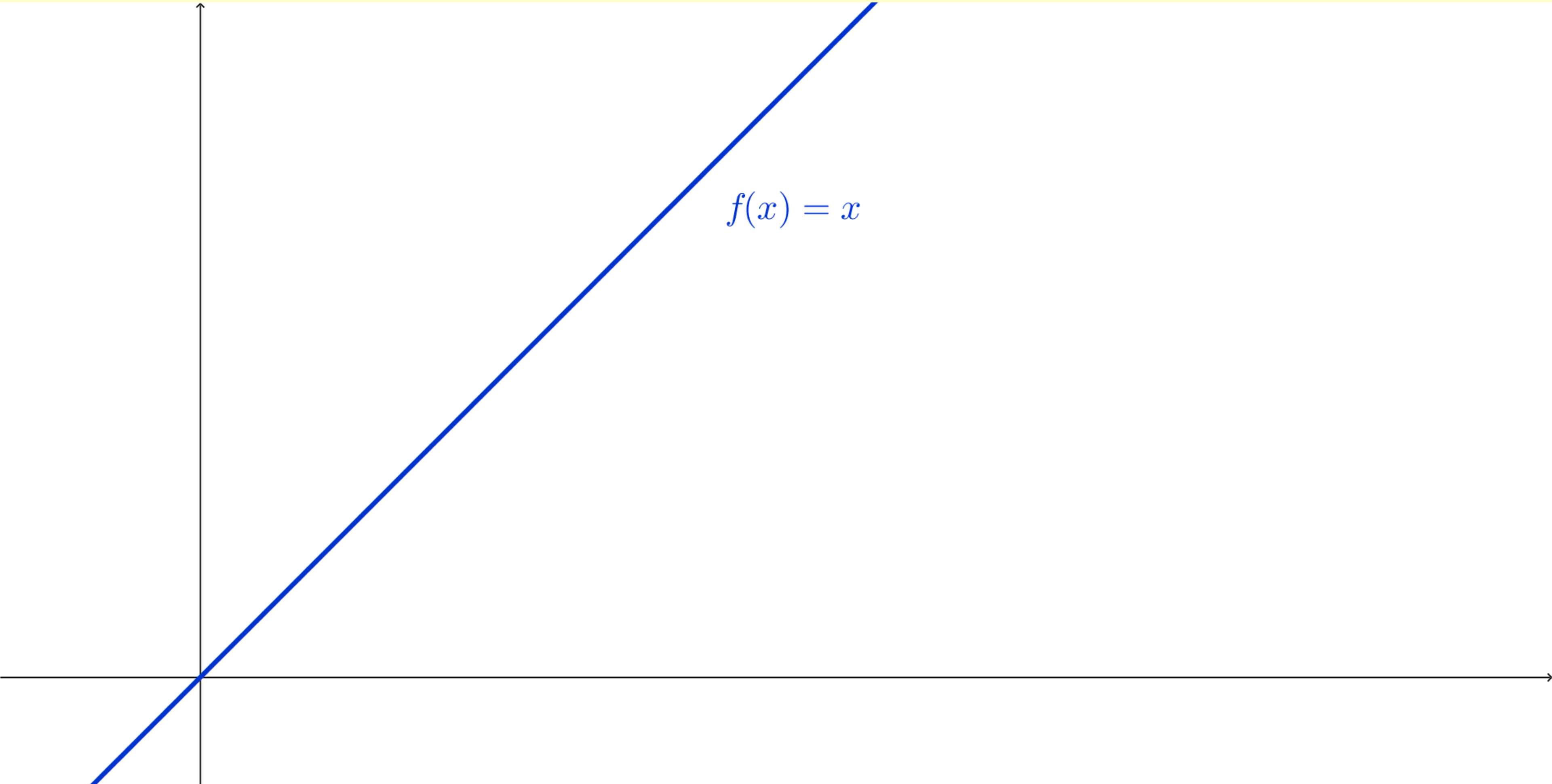


Como varia a área de definida sob o gráfico de uma função?

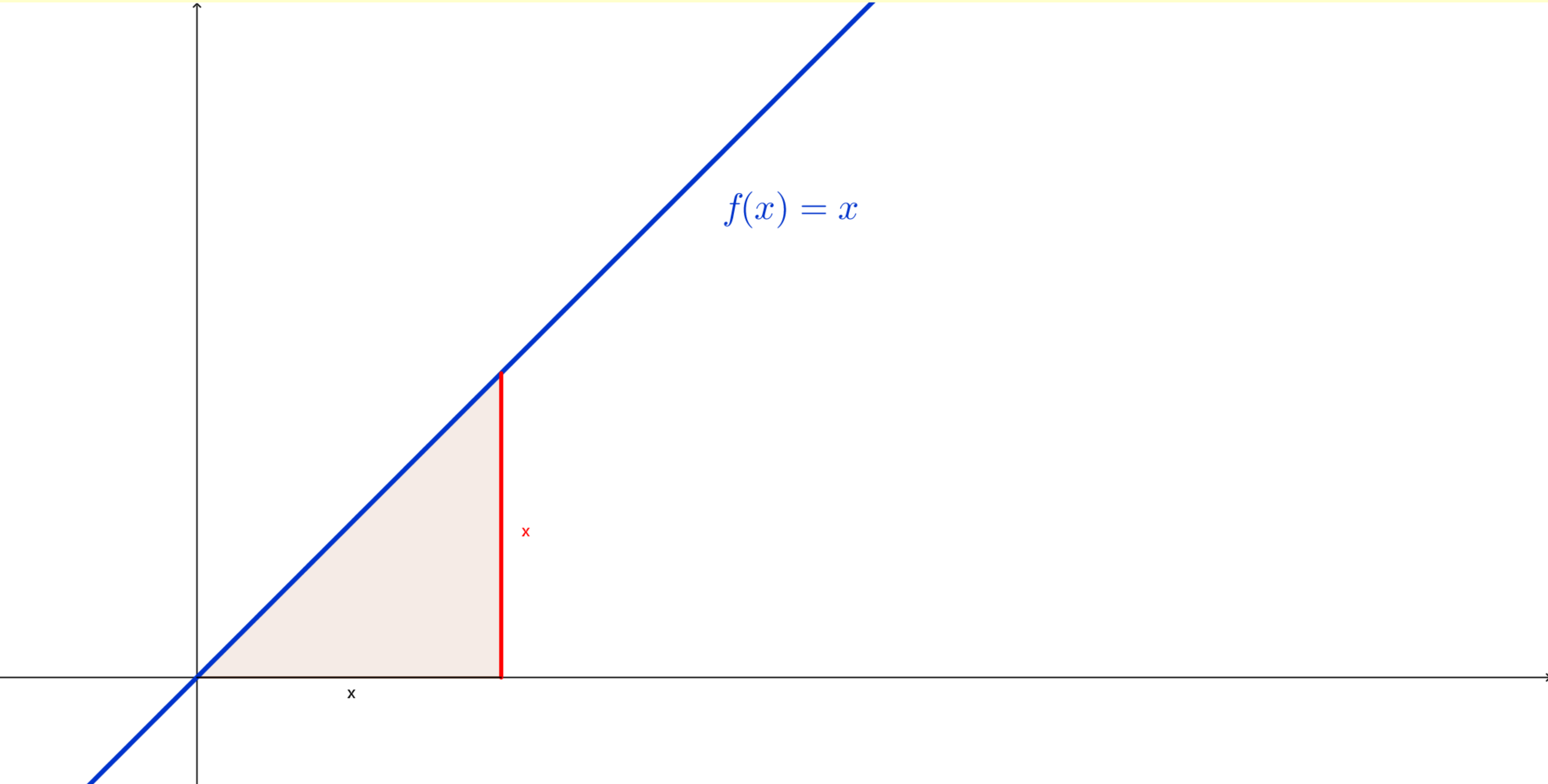


Na função constante f(x)=4, a área entre 0 e x é dada por A(x)=4x. A taxa de variação instantânea da área é A'(x)=4.

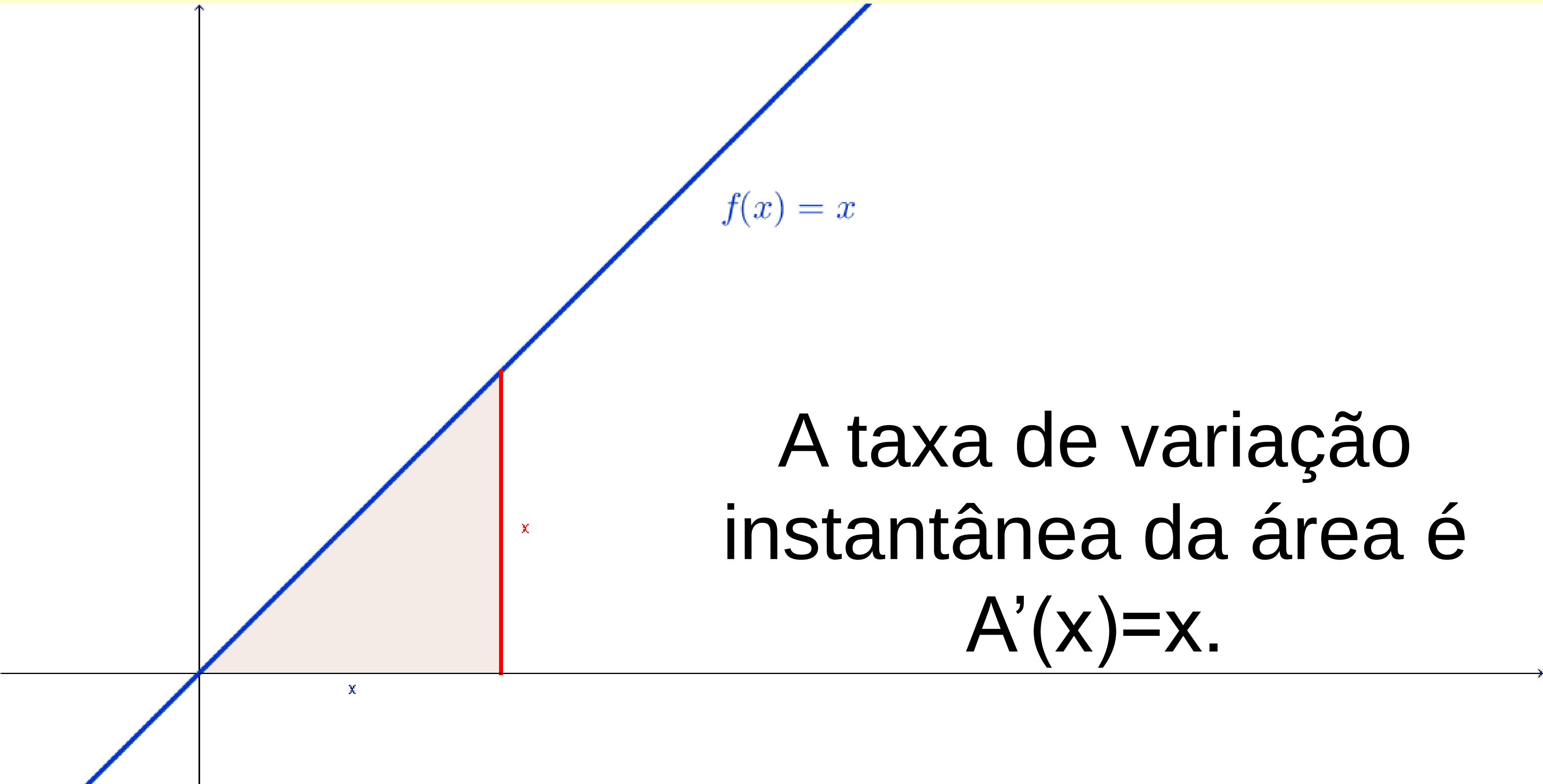
Na função linear f(x)=x, a área entre 0 e x é $A(x) = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$.



Na função linear f(x)=x, a área entre 0 e x é $A(x) = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$.



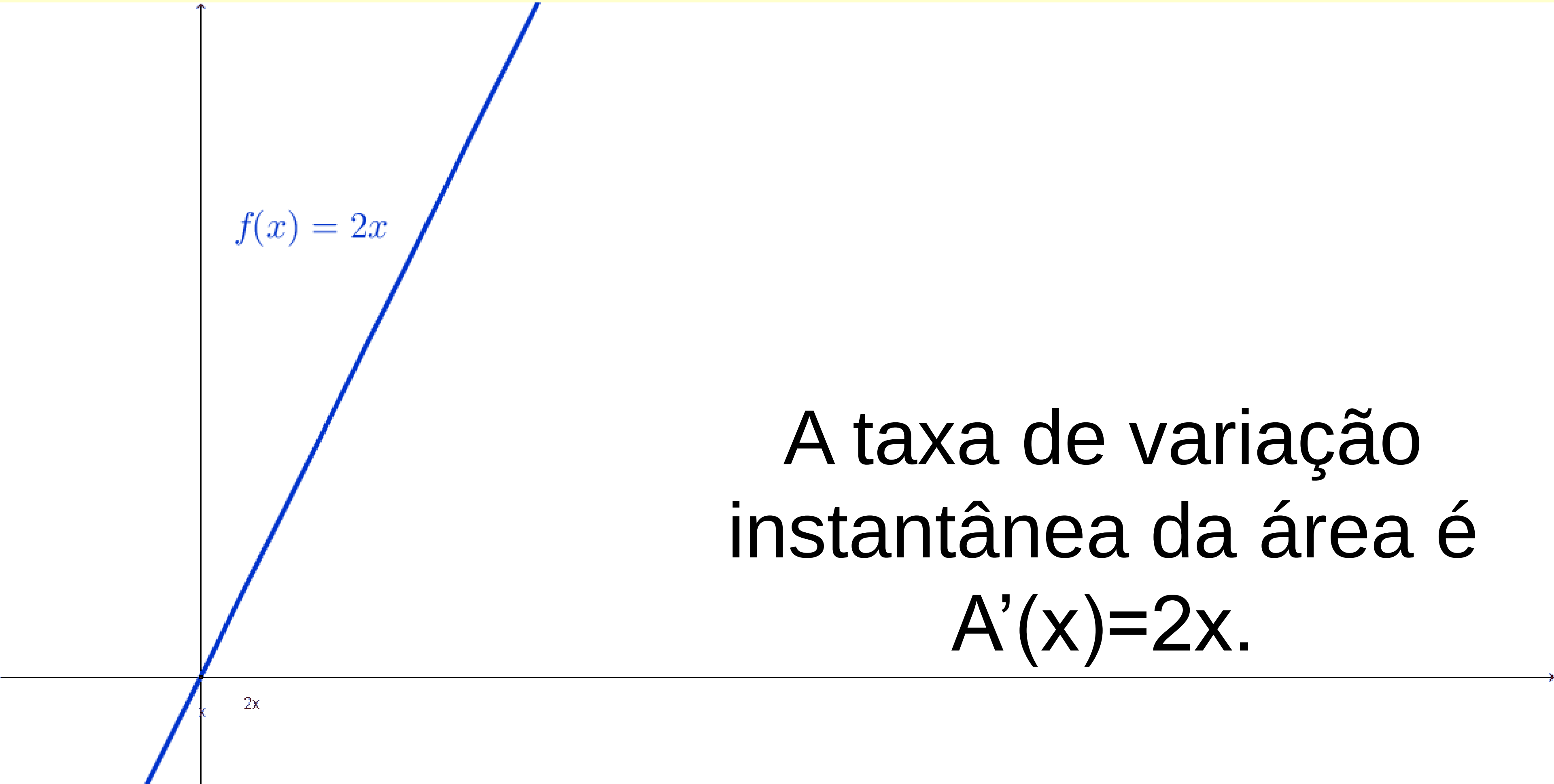
Na função linear f(x)=x, a área entre 0 e x é $A(x) = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$.



A taxa de variação instantânea da área é A’(x)=x.

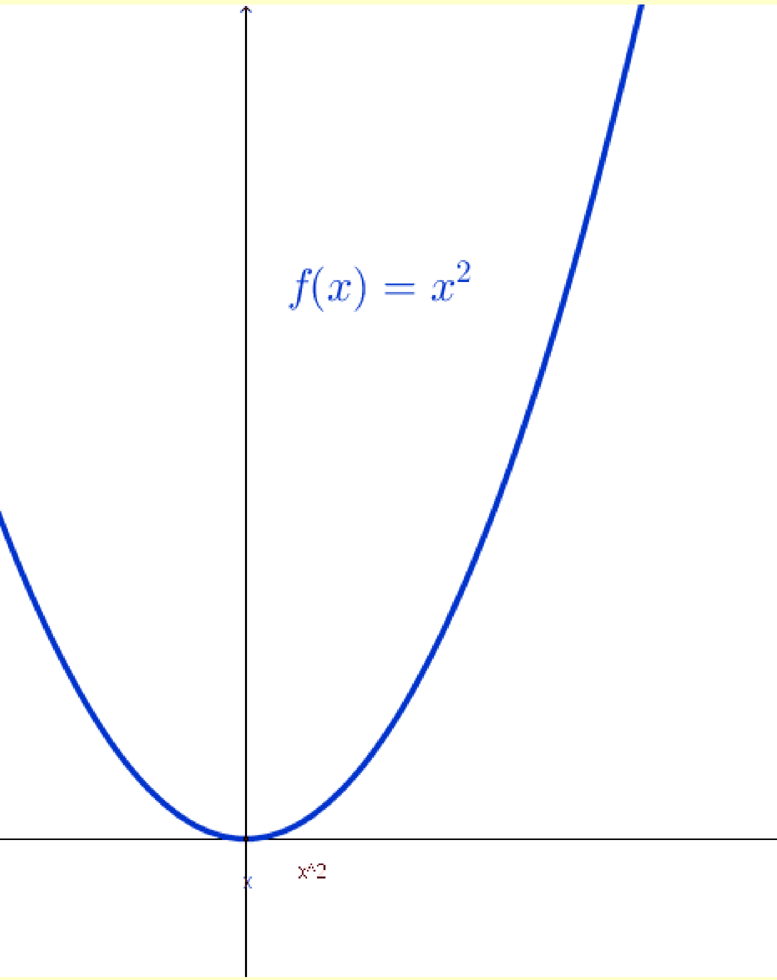
Na função f(x)=2x, a área entre 0 e x é

$$A(x) = \frac{x \cdot 2x}{2} = x^2.$$



A taxa de variação instantânea da área é A’(x)=2x.

Na função $f(x) = x^2$, não conhecemos a área entre 0 e x.

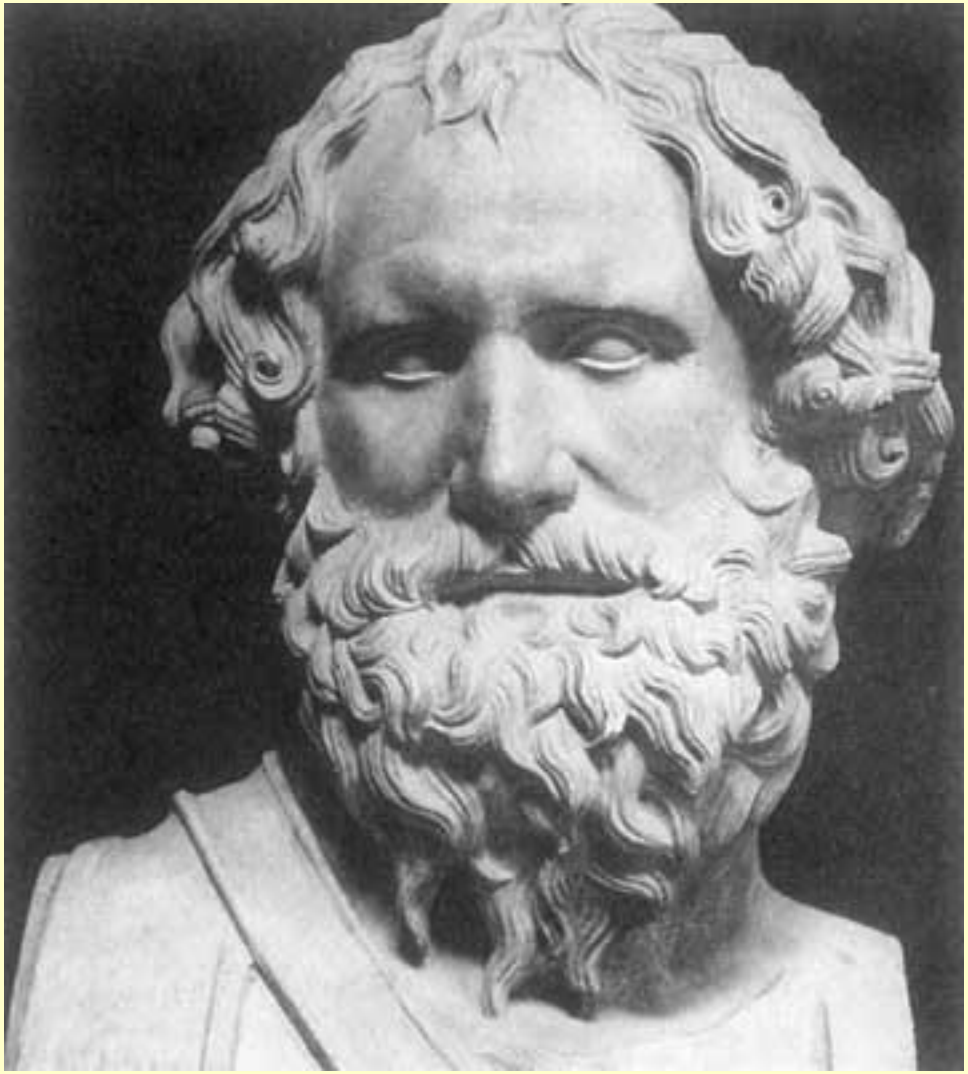


Mas conhecemos a taxa de variação instantânea dessa área:

$$A'(x) = x^2.$$

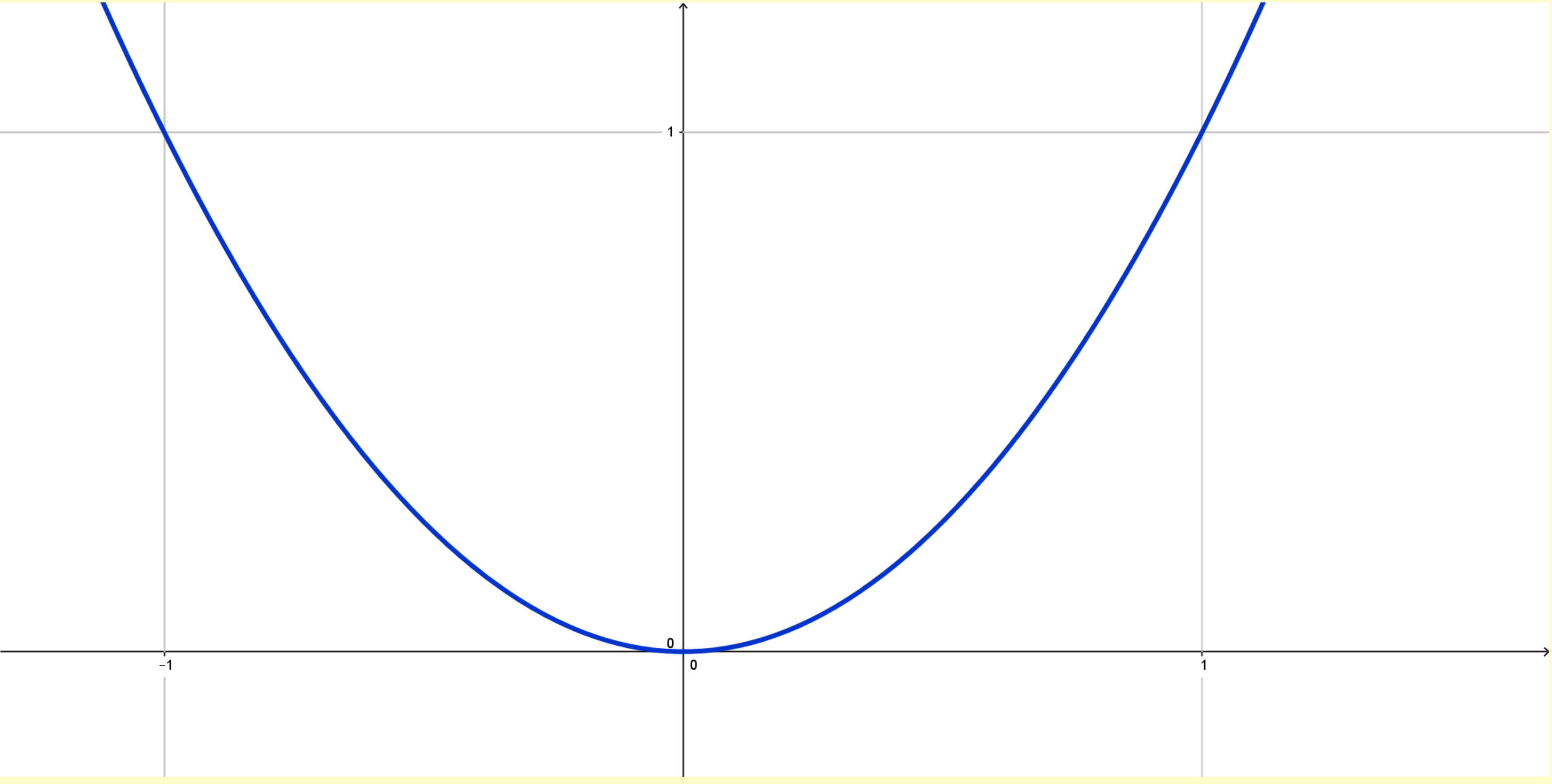
Descobrir a função área a partir da sua taxa de variação instantânea é integrar a função.

Arquimedes aplicou a ideia da decomposição e composição de figuras e calculou a primeira integral, da função $f(x) = x^2$.

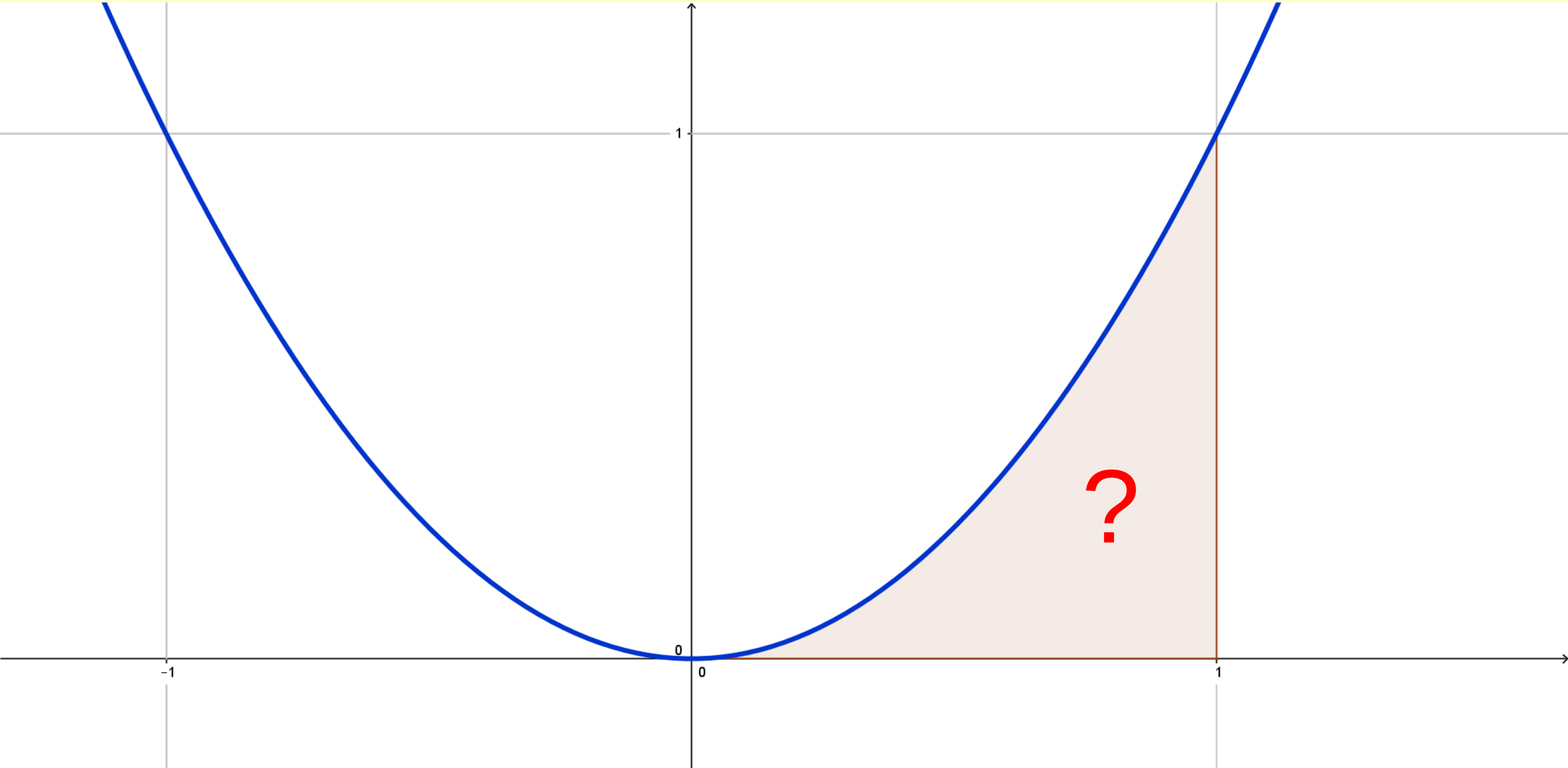


Arquimedes de Siracusa (287-212 aC)

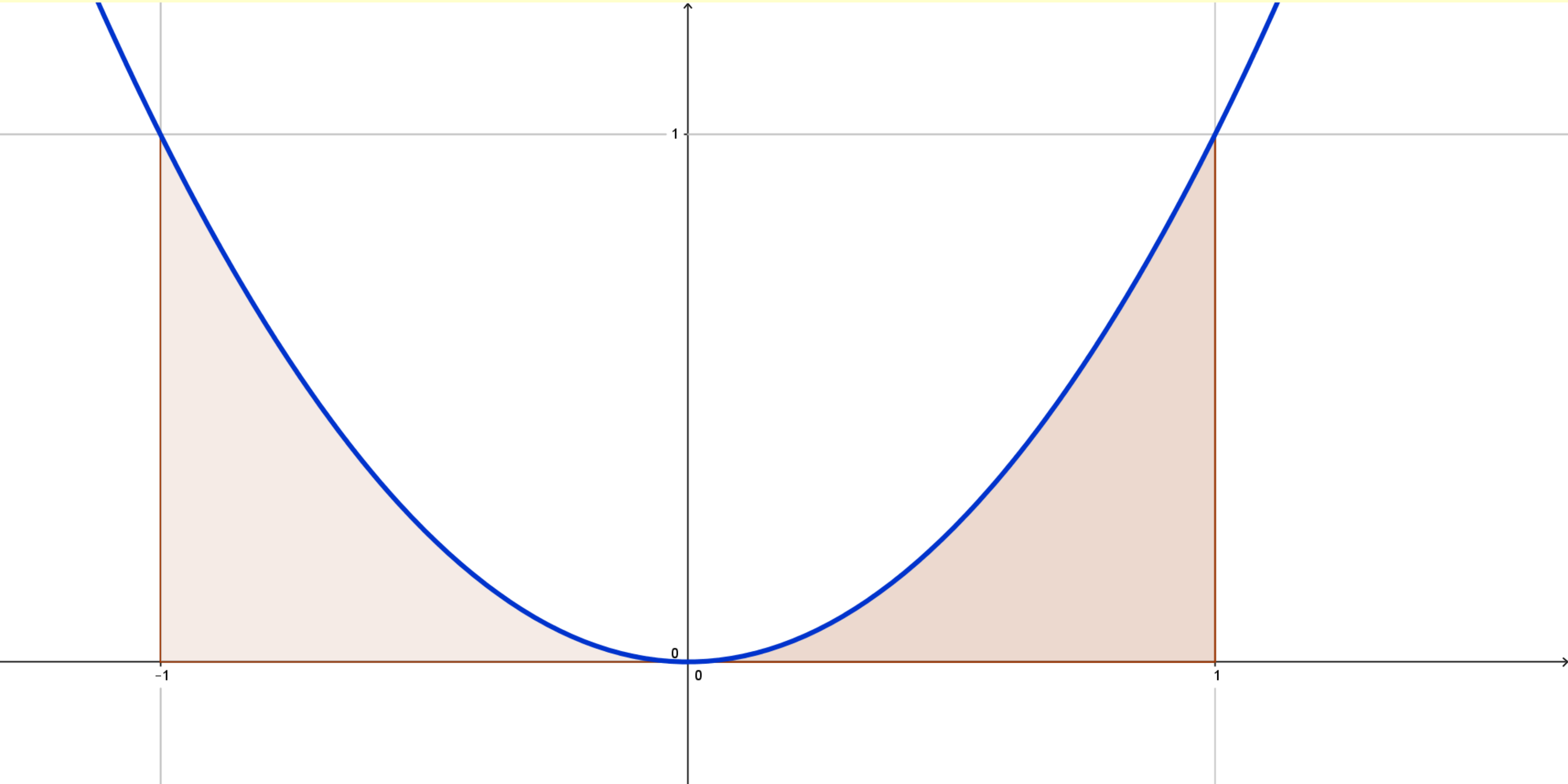
O problema resolvido por Arquimedes pode ser entendido como:
Sob o gráfico da função $f(x) = x^2$, qual a área entre 0 e 1?



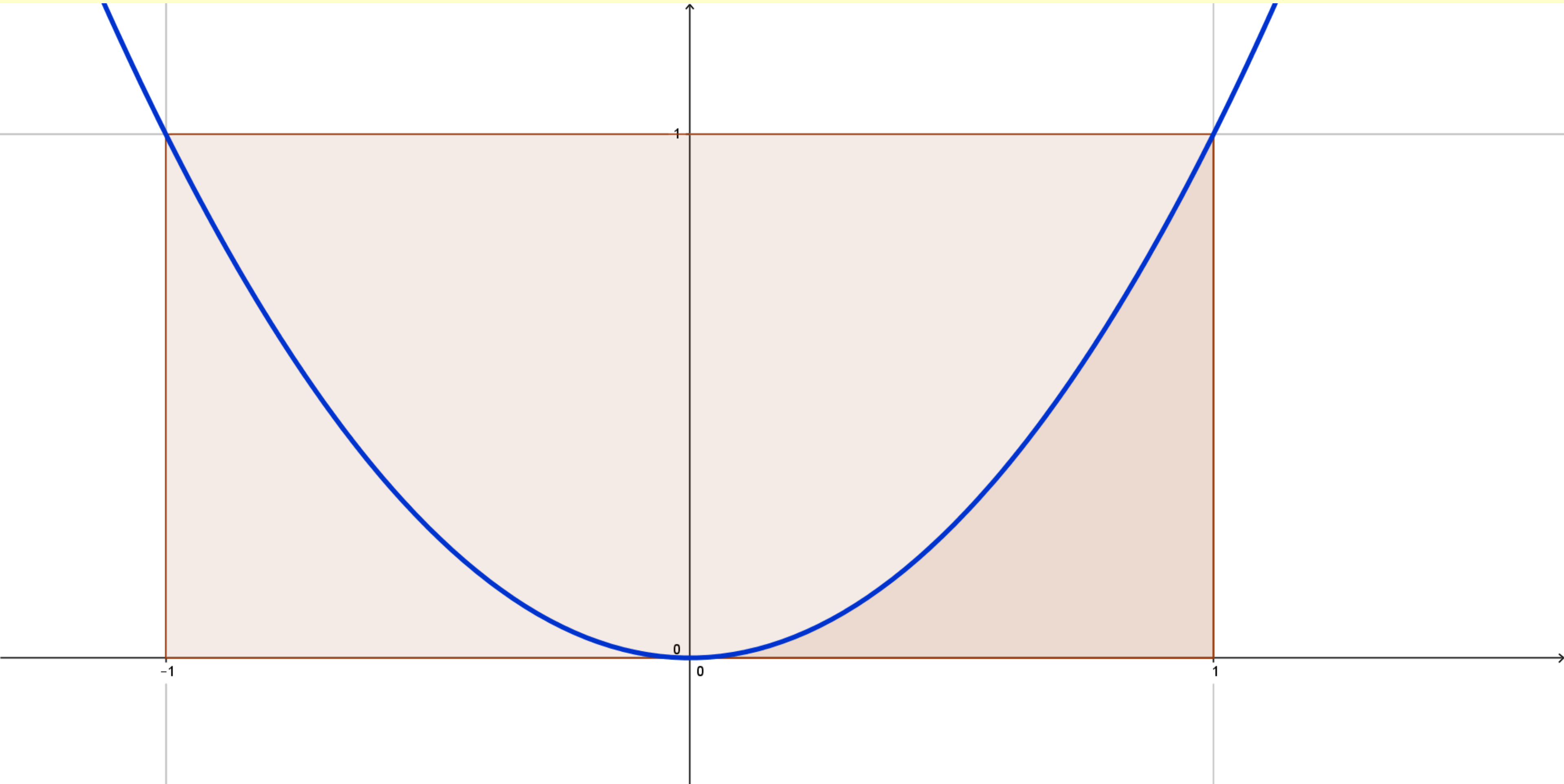
O problema resolvido por Arquimedes pode ser entendido como:
Sob o gráfico da função $f(x) = x^2$, qual a área entre 0 e 1?



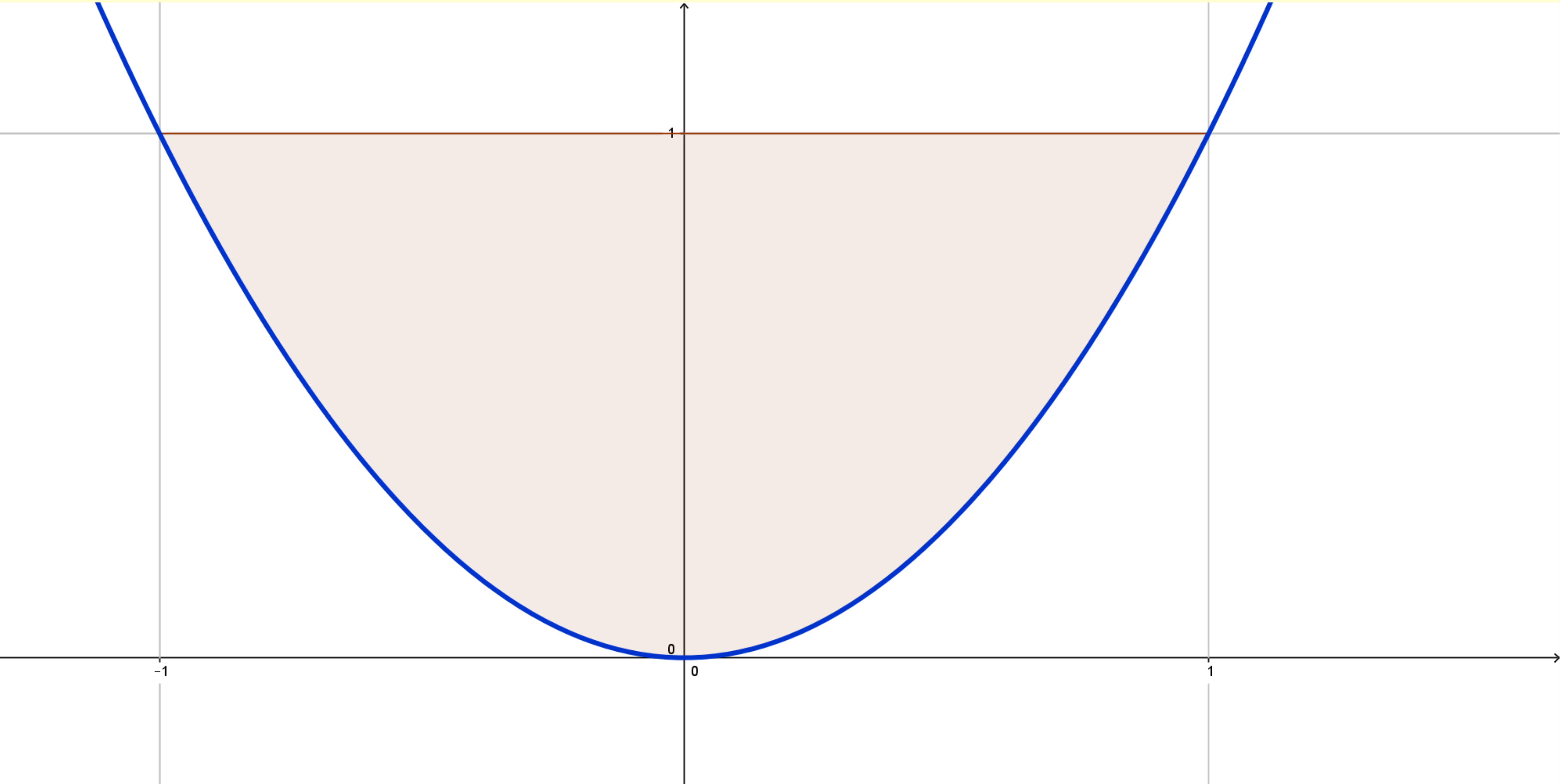
Por simetria, sabemos que a área entre 0 e 1 é igual à área entre -1 e 0.



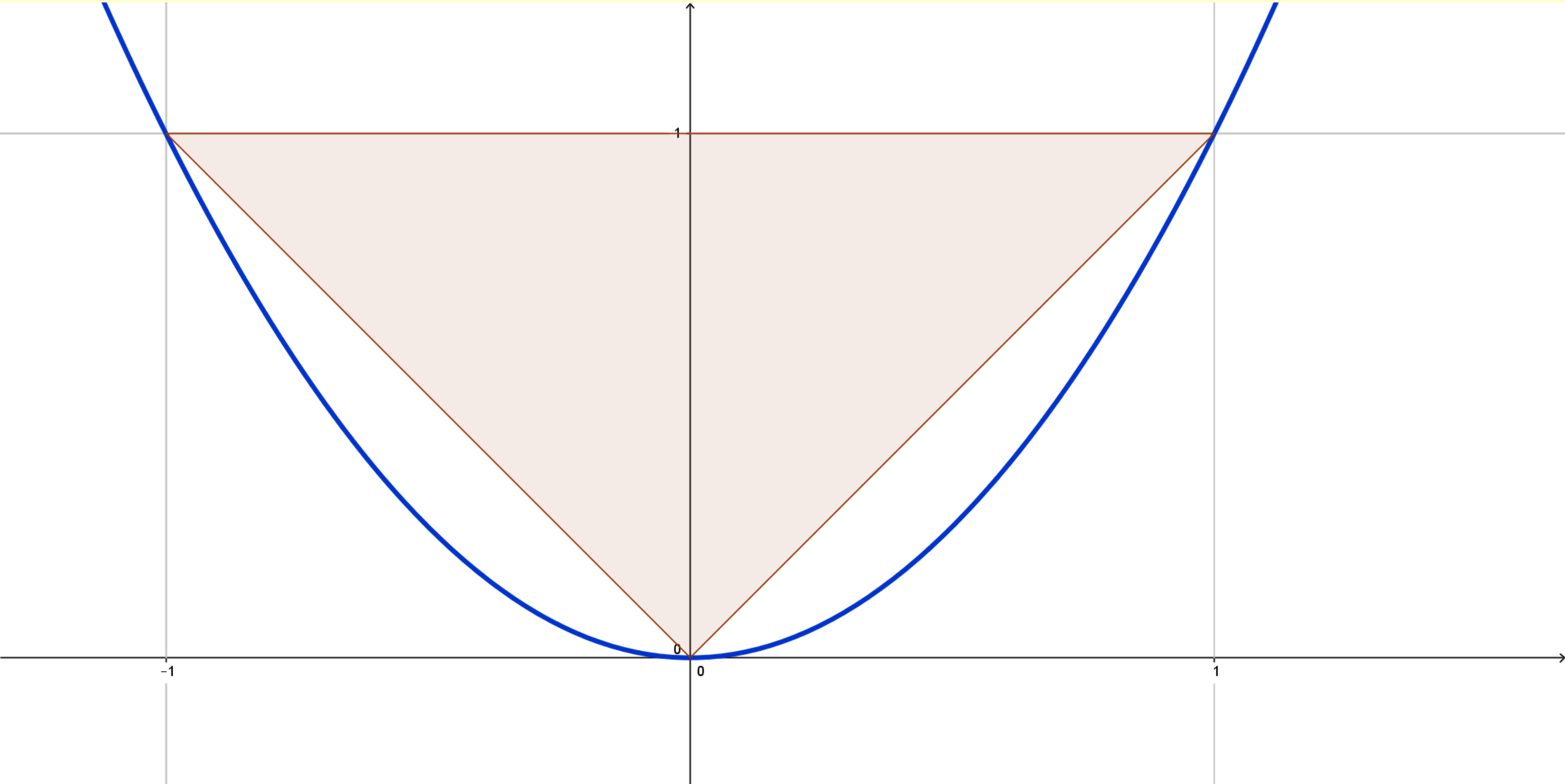
O retângulo abaixo tem área 2.



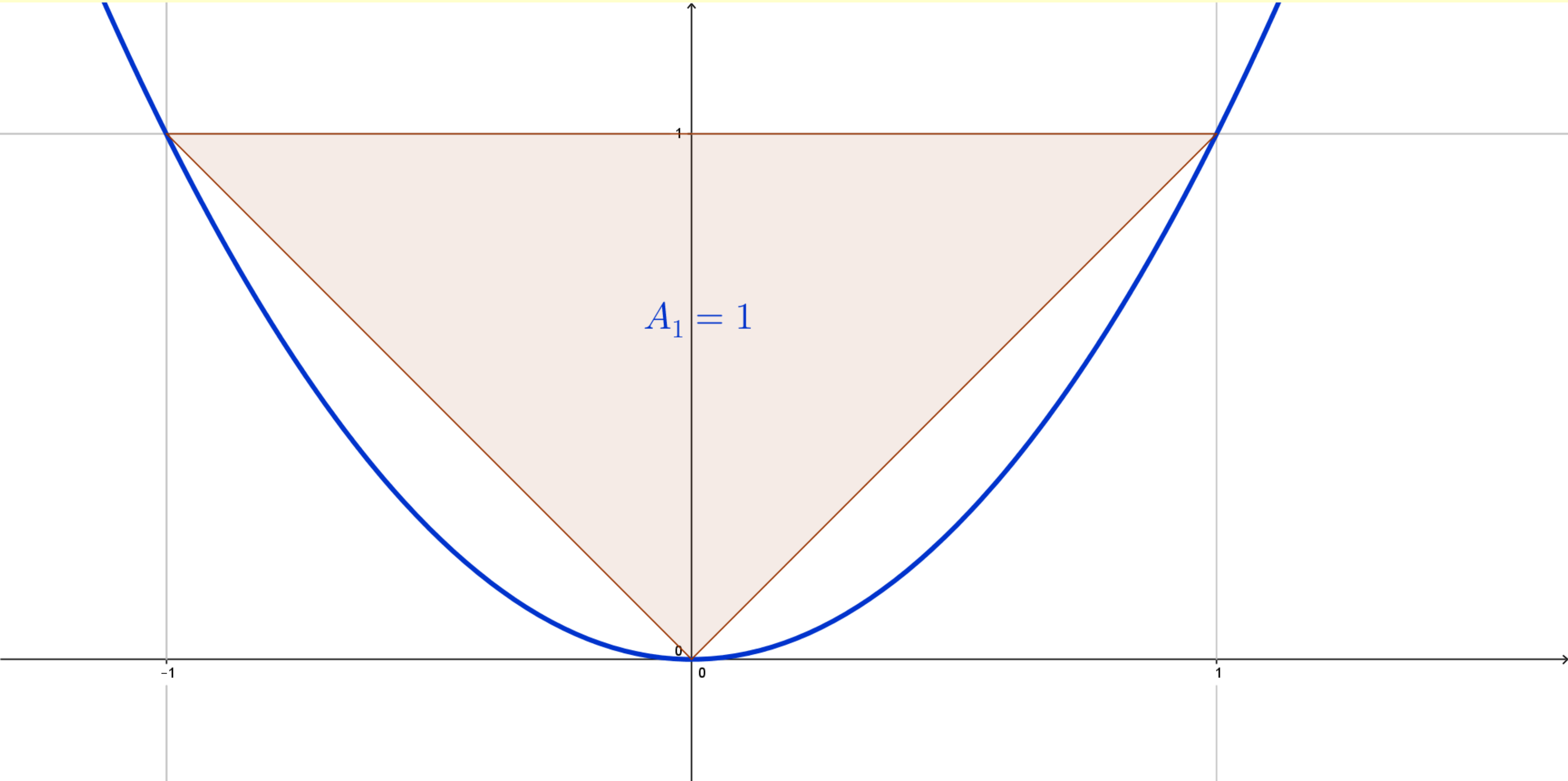
Para encontrar a área sob o gráfico basta encontrar a área da forma abaixo, chamada de segmento parabólico.



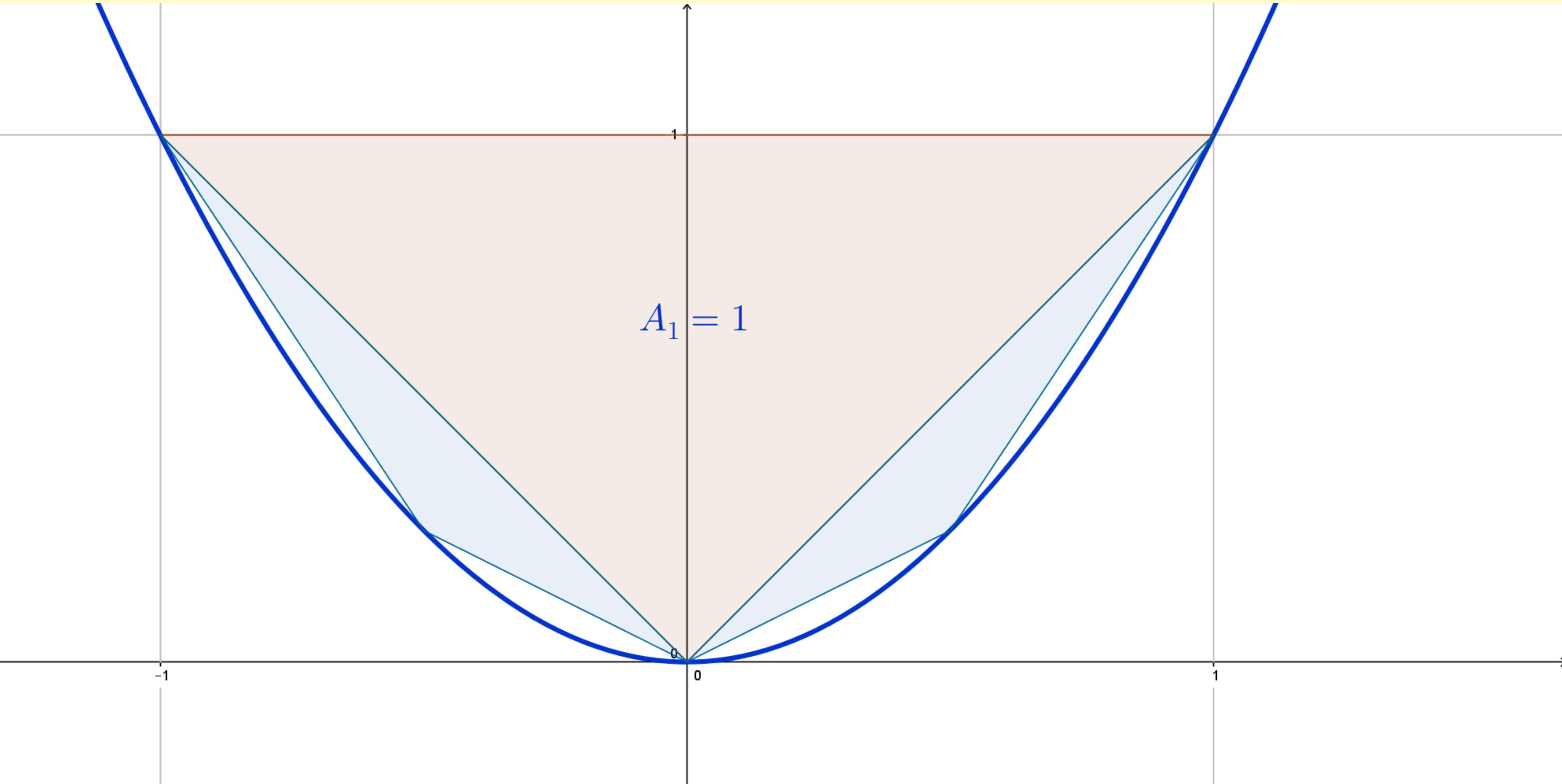
Como Arquimedes resolveu isso?
Inserindo um triângulo no segmento parabólico.



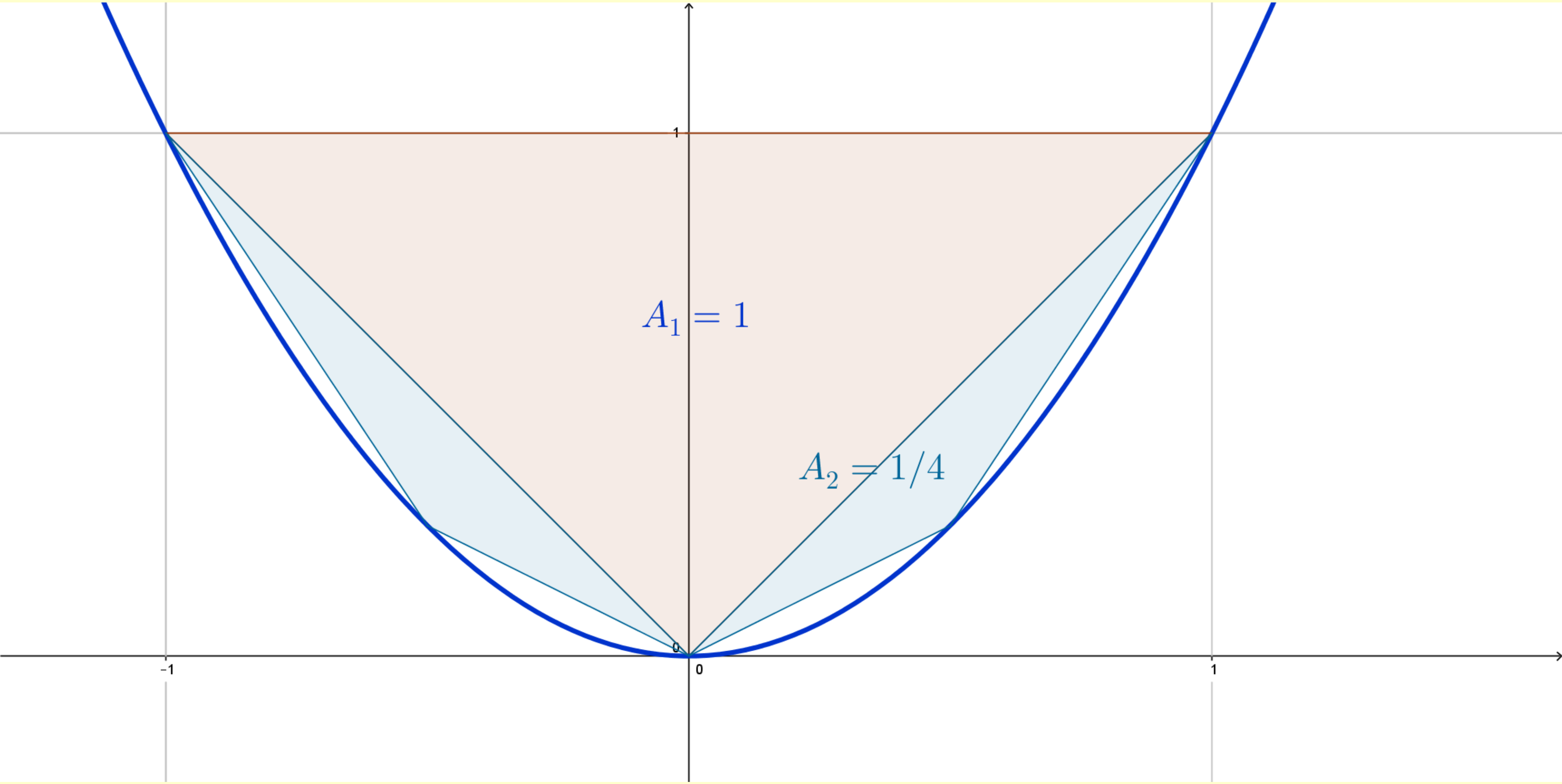
Esse triângulo tem área 1, pois é metade do retângulo de área 2.



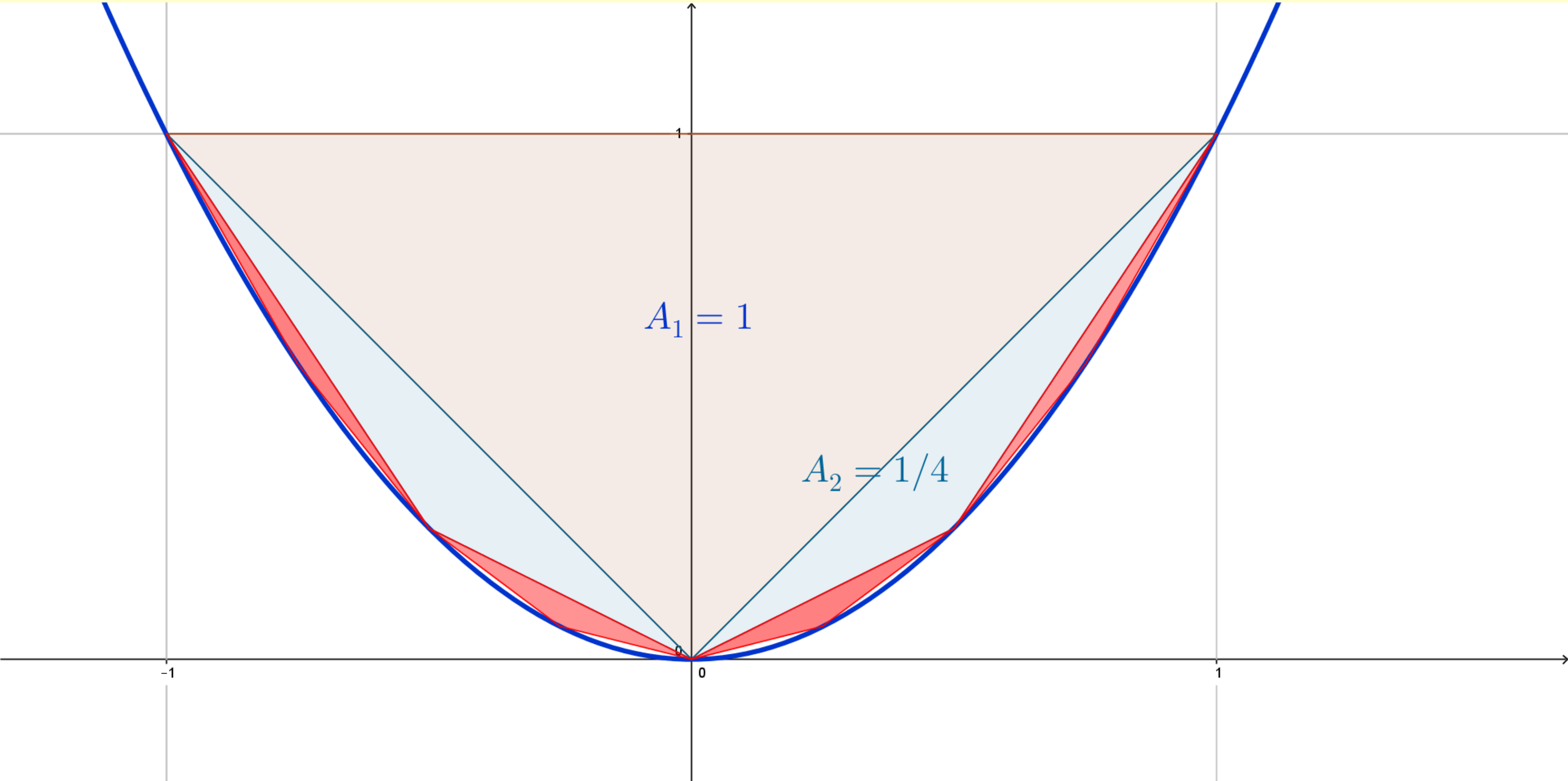
Falta ainda um pedaço da área do segmento. Arquimedes inseriu mais dois triângulos ali.



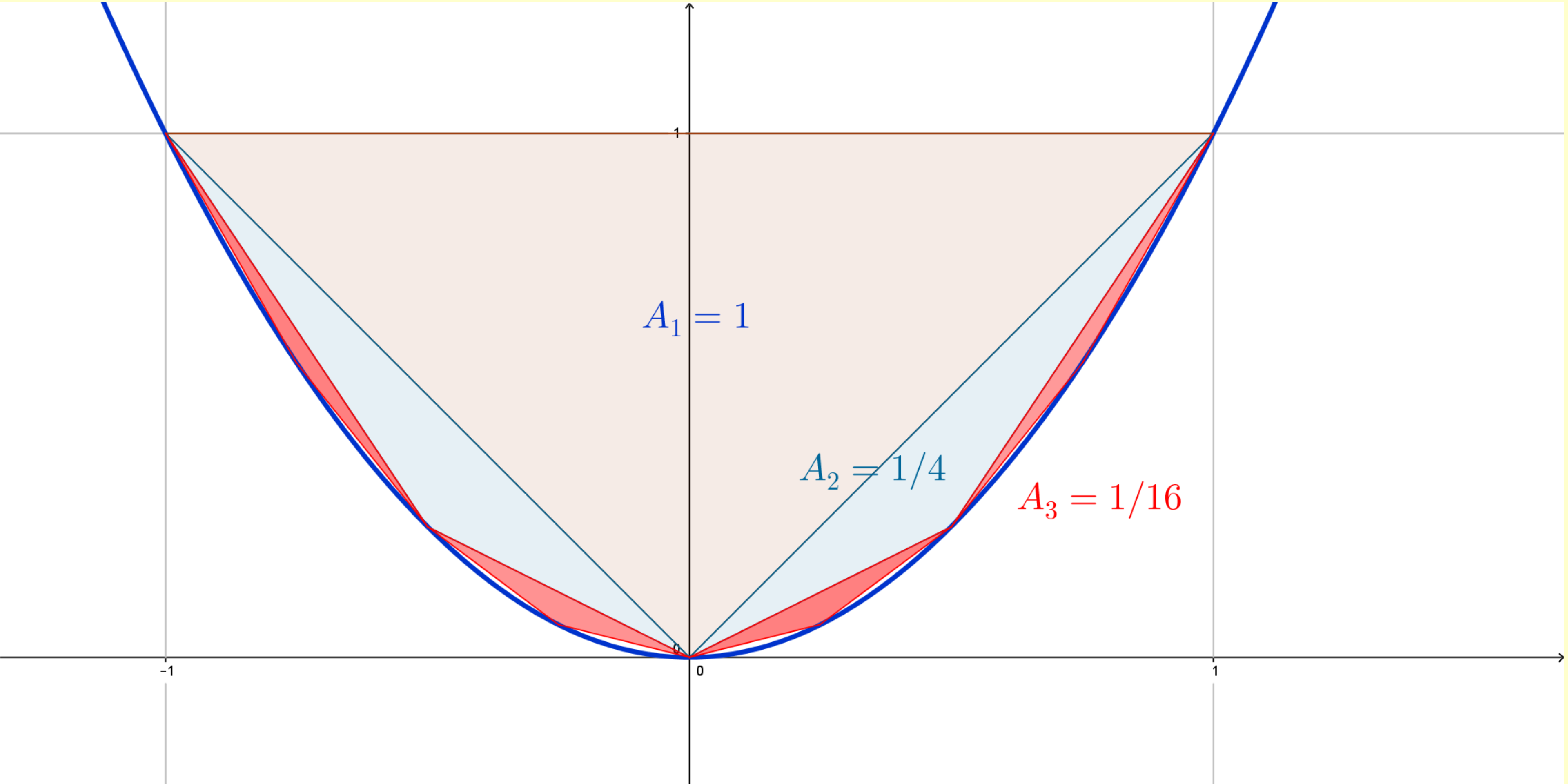
A soma das áreas desses triângulos é ¼ (pode-se mostrar isso).



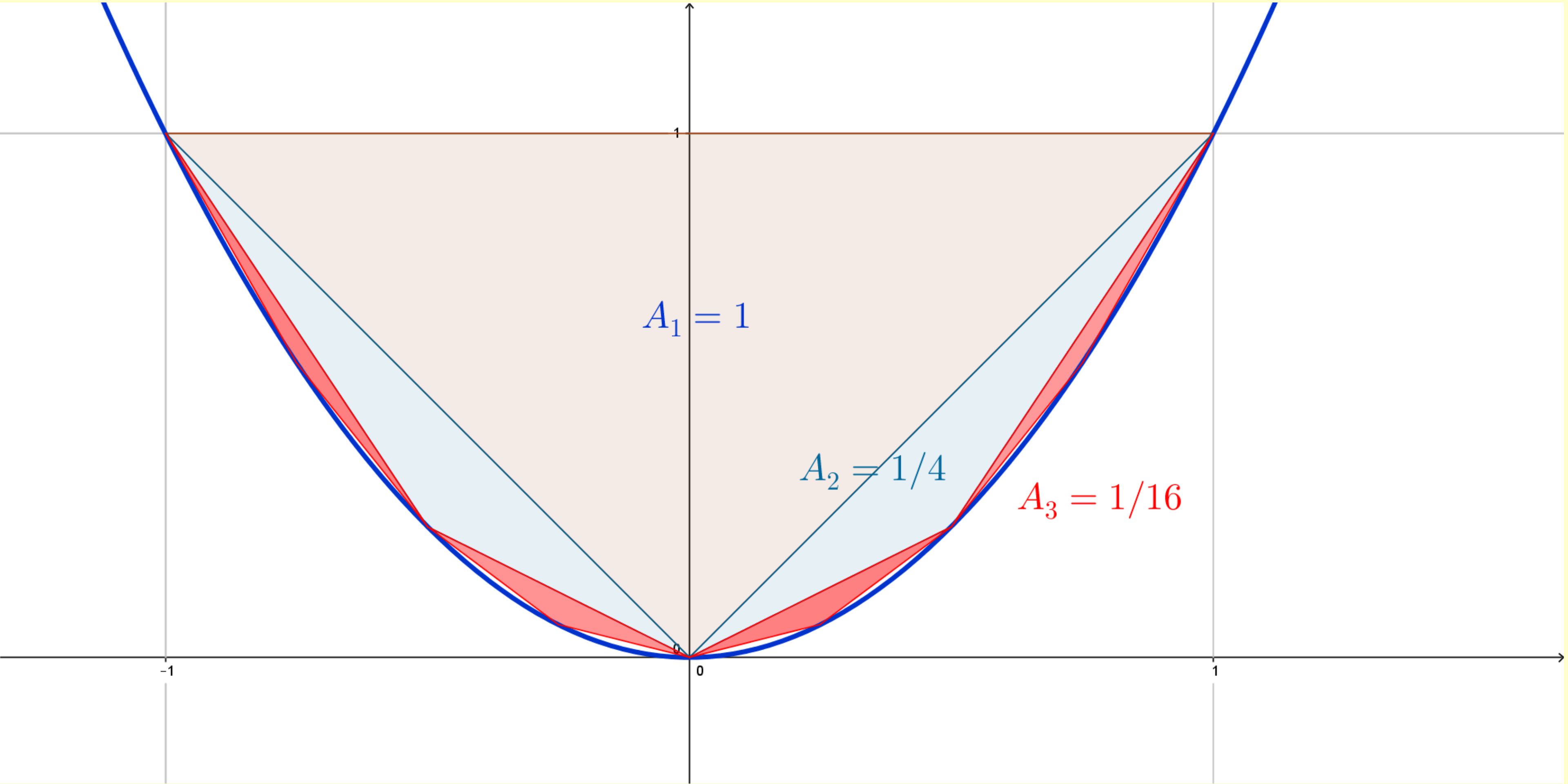
Ainda falta um pedaço da borda.
Arquimedes inseriu outros 4 triângulos.



Pode-se mostrar que a soma das áreas dos triângulos vermelhos é 1/16.

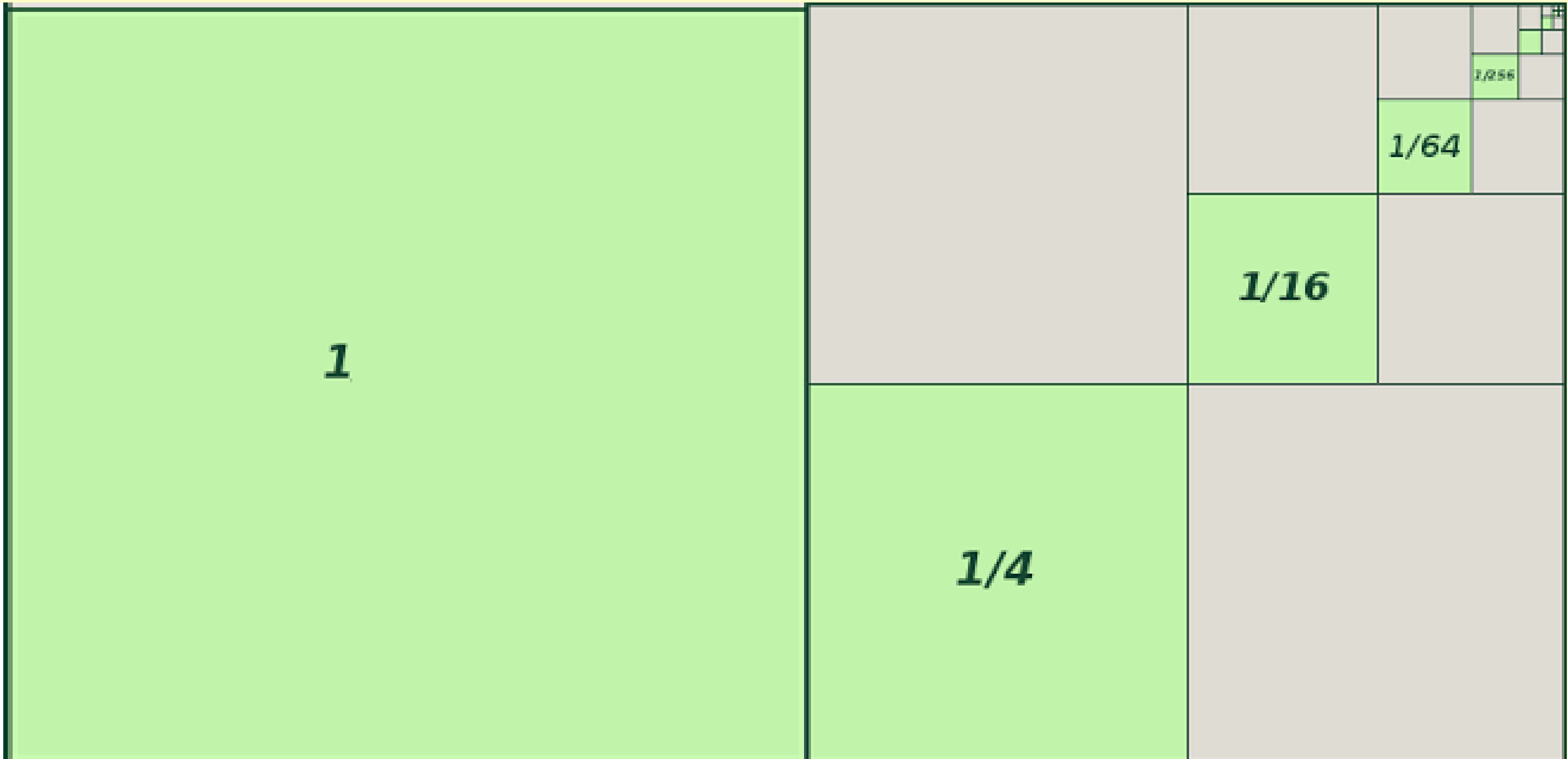


Arquimedes viu que que a área do segmento é dada pela soma de uma PG infinita.



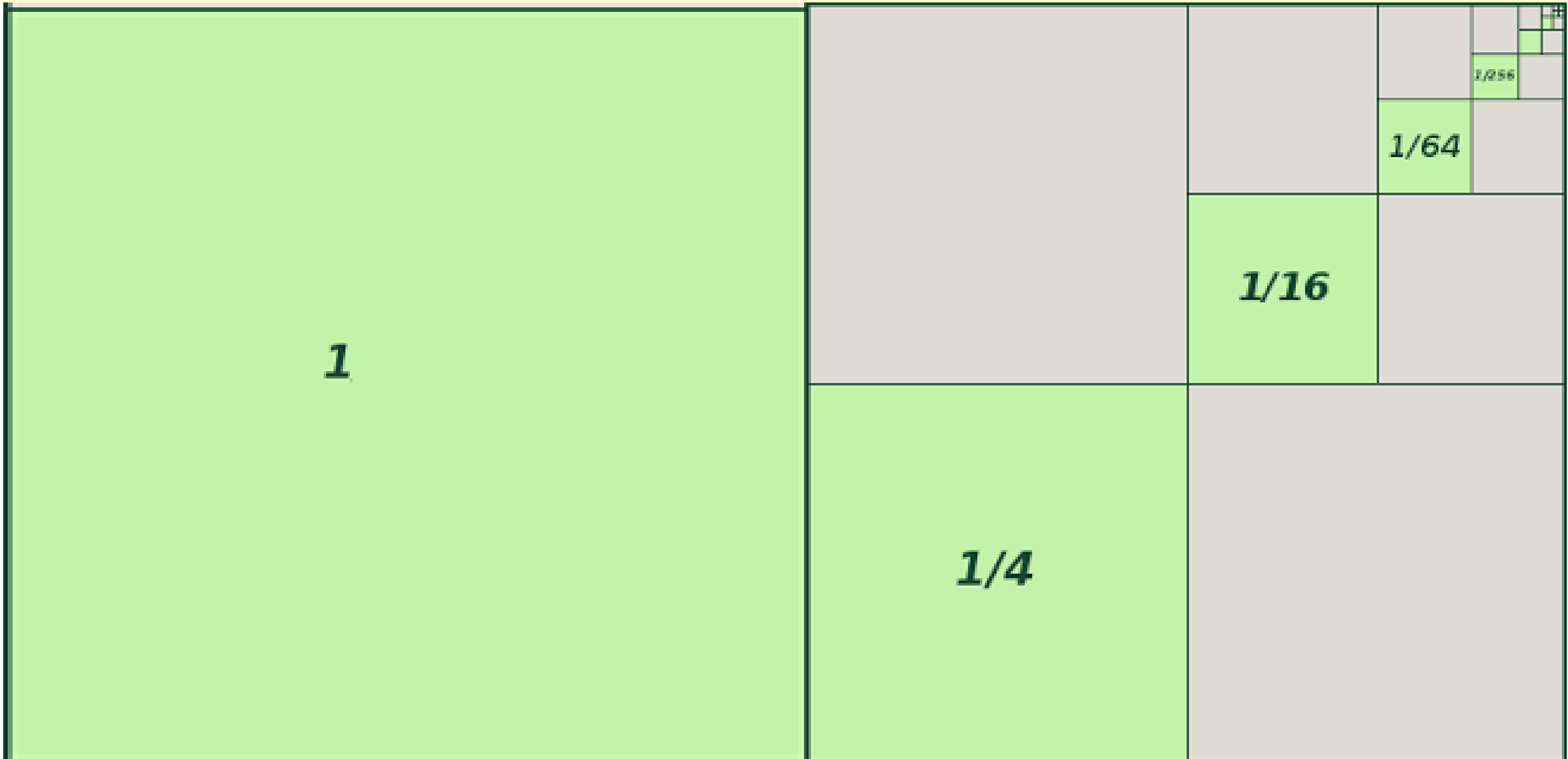
Arquimedes viu que que a área do segmento é dada pela soma de uma PG infinita:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots =$$

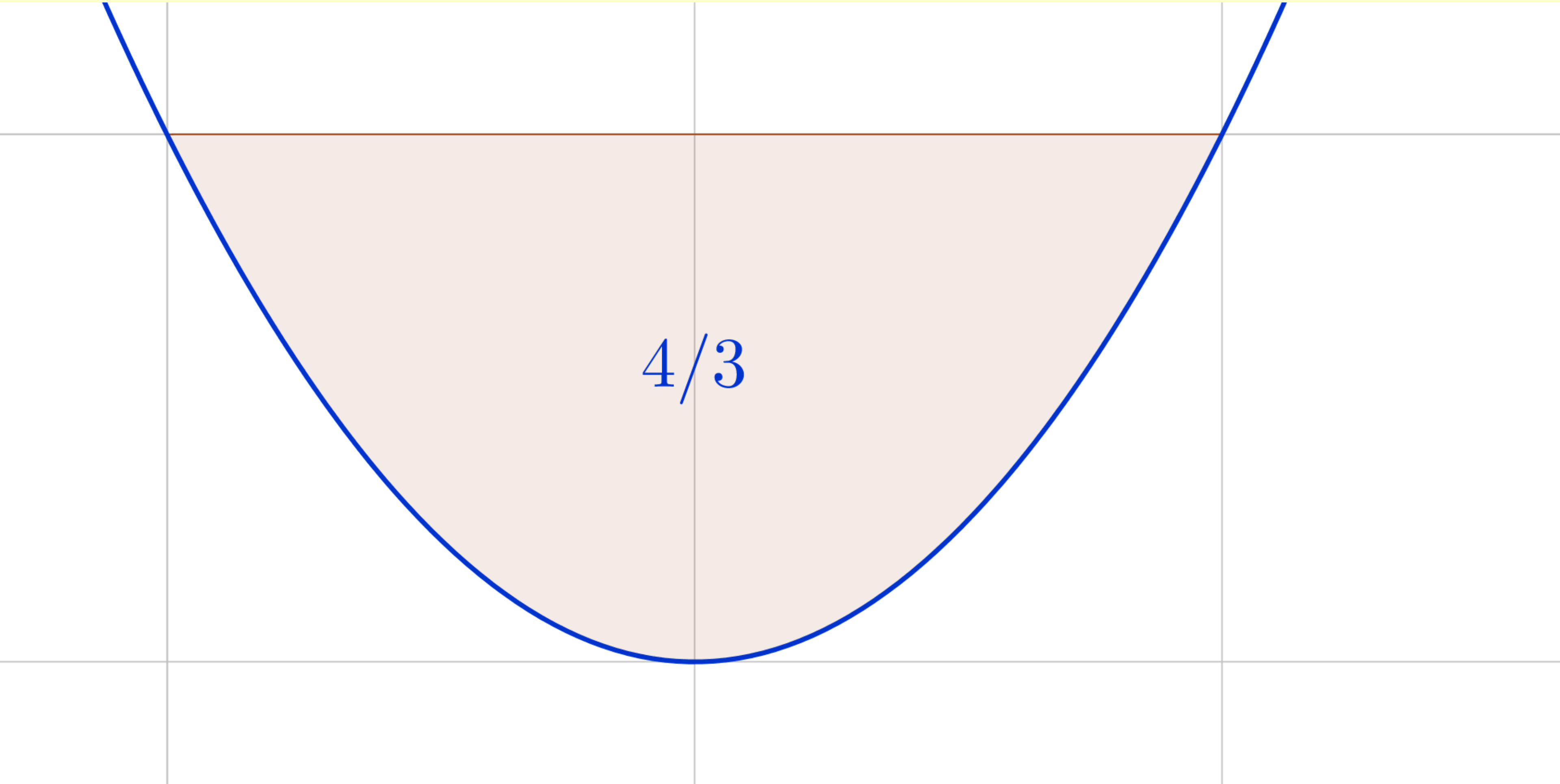


Arquimedes viu que que a área do segmento é dada pela soma de uma PG infinita:

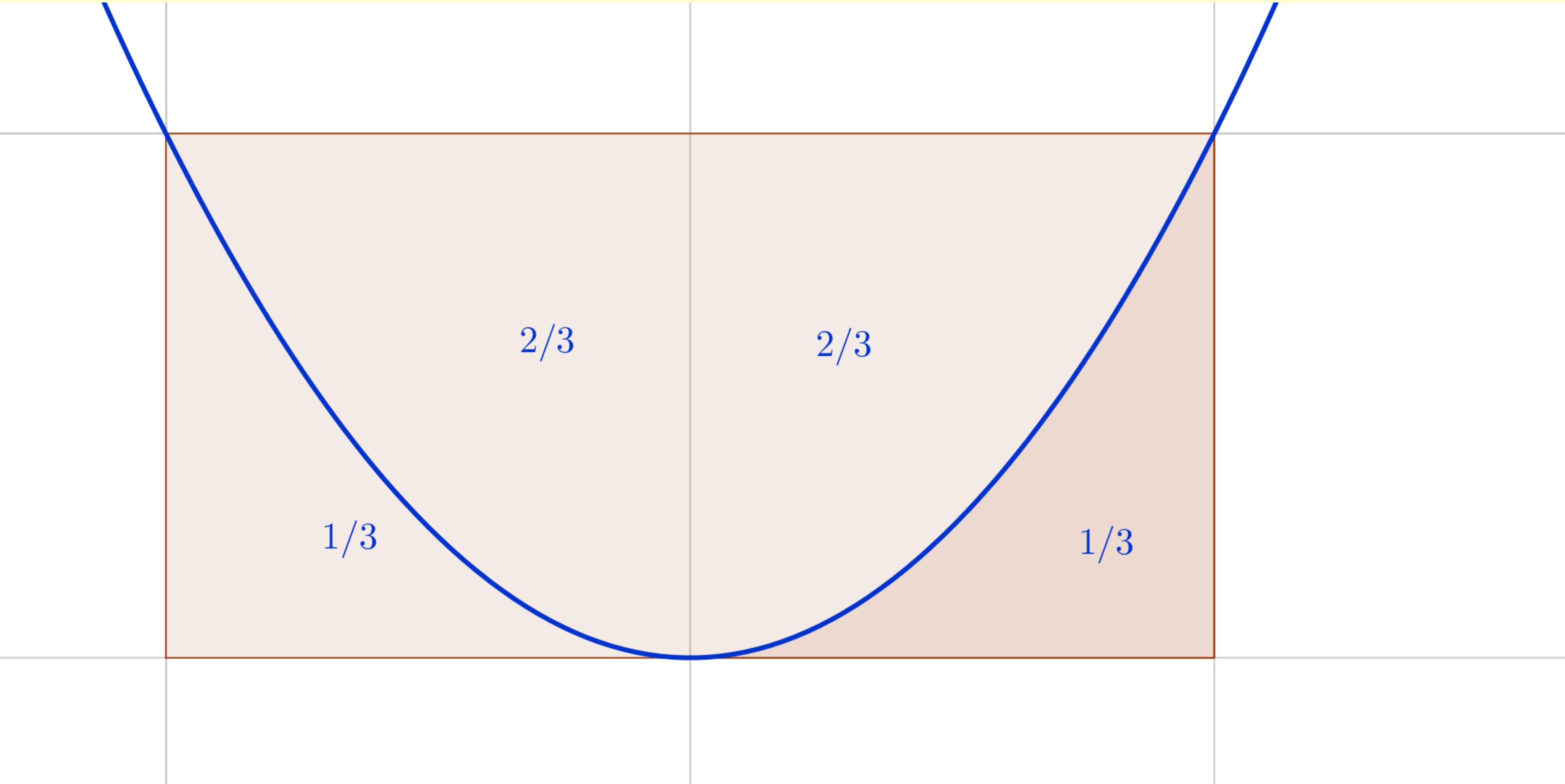
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots = \frac{4}{3}$$



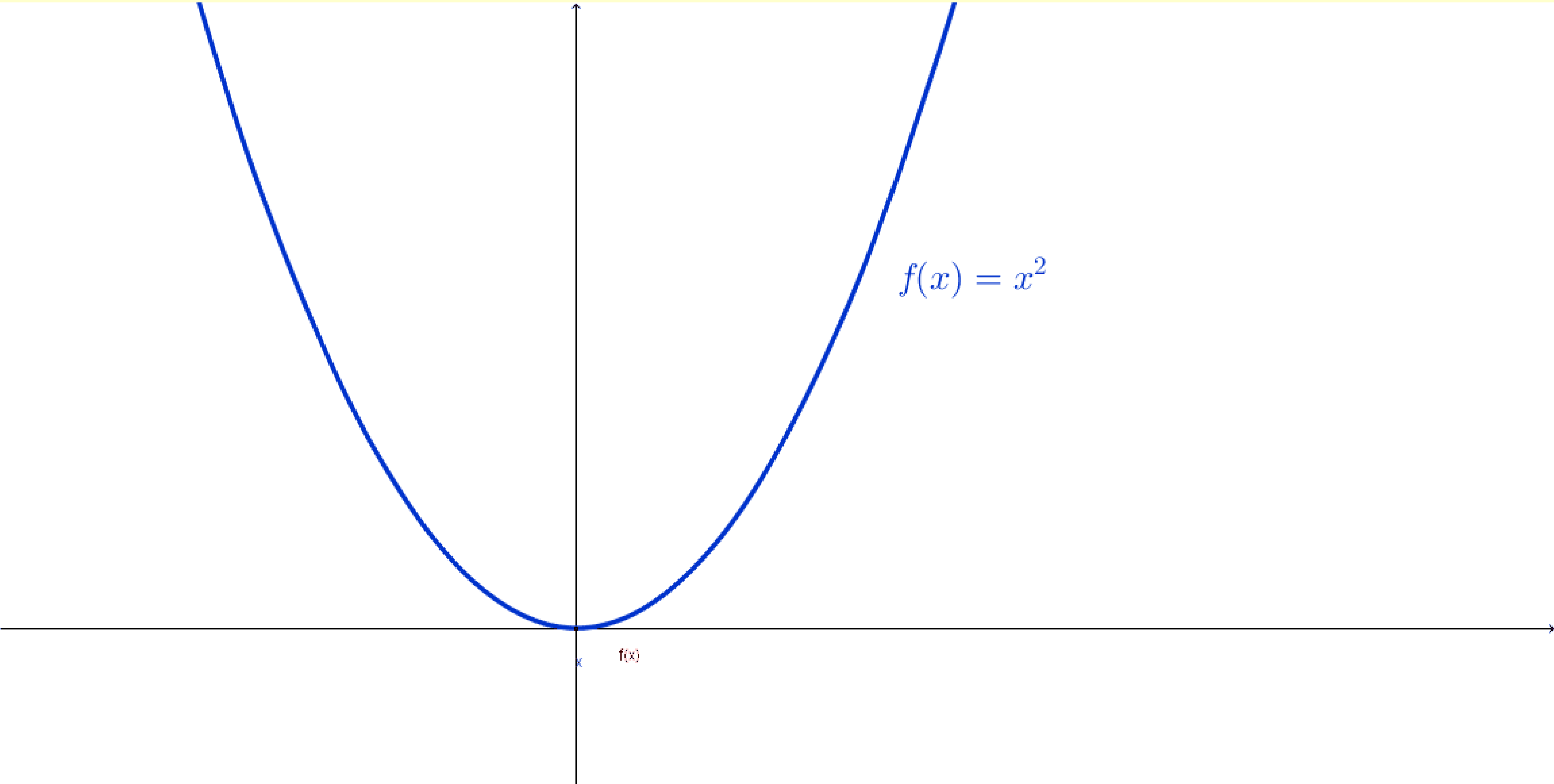
Logo, a área do segmento parabólico é



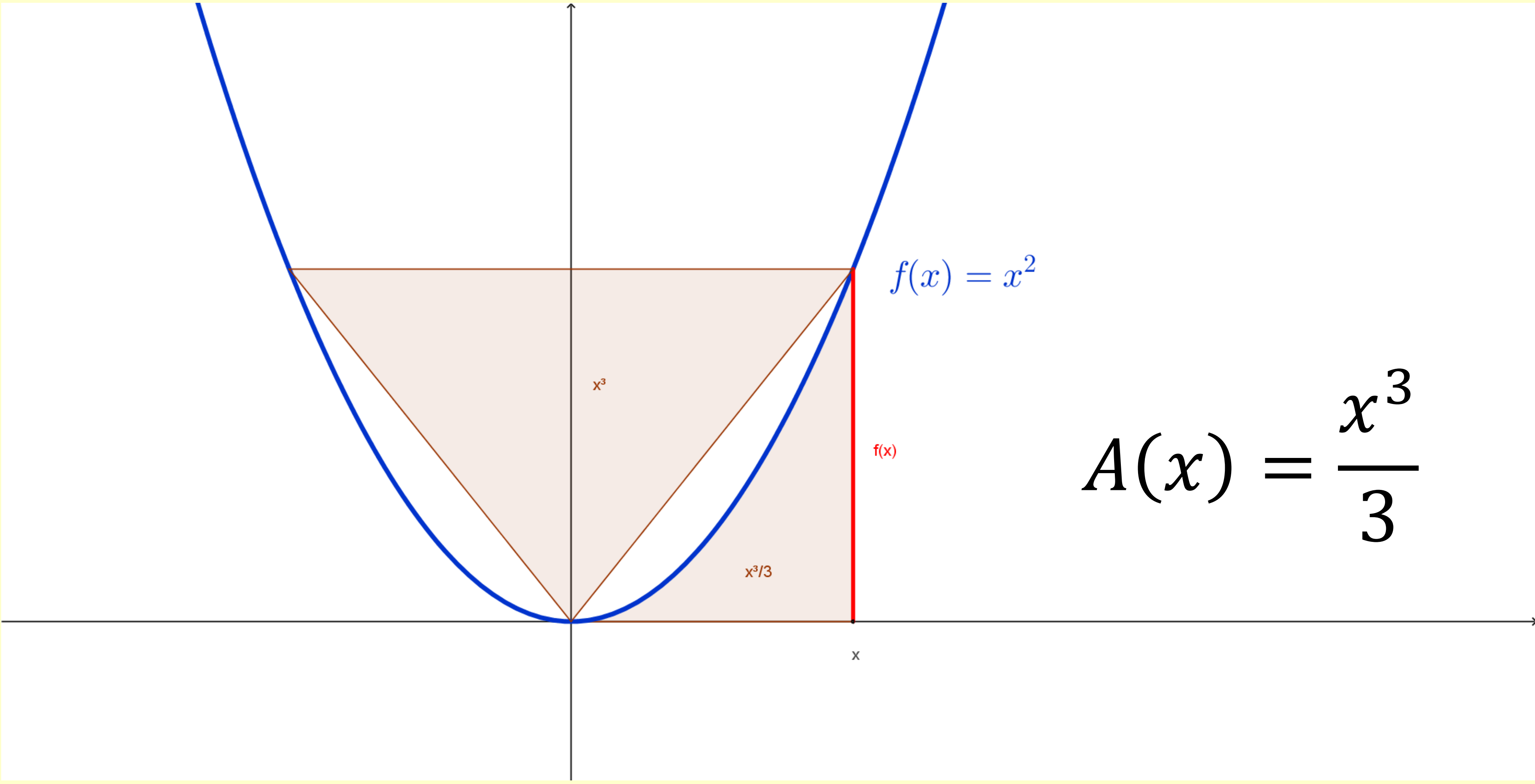
Podemos deduzir que as áreas sob o gráfico são iguais a 1/3.



A área entre 0 e x sob a parábola de equação $y = x^2$ é iguais a 1/3 do triângulo inscrito no segmento parabólico.

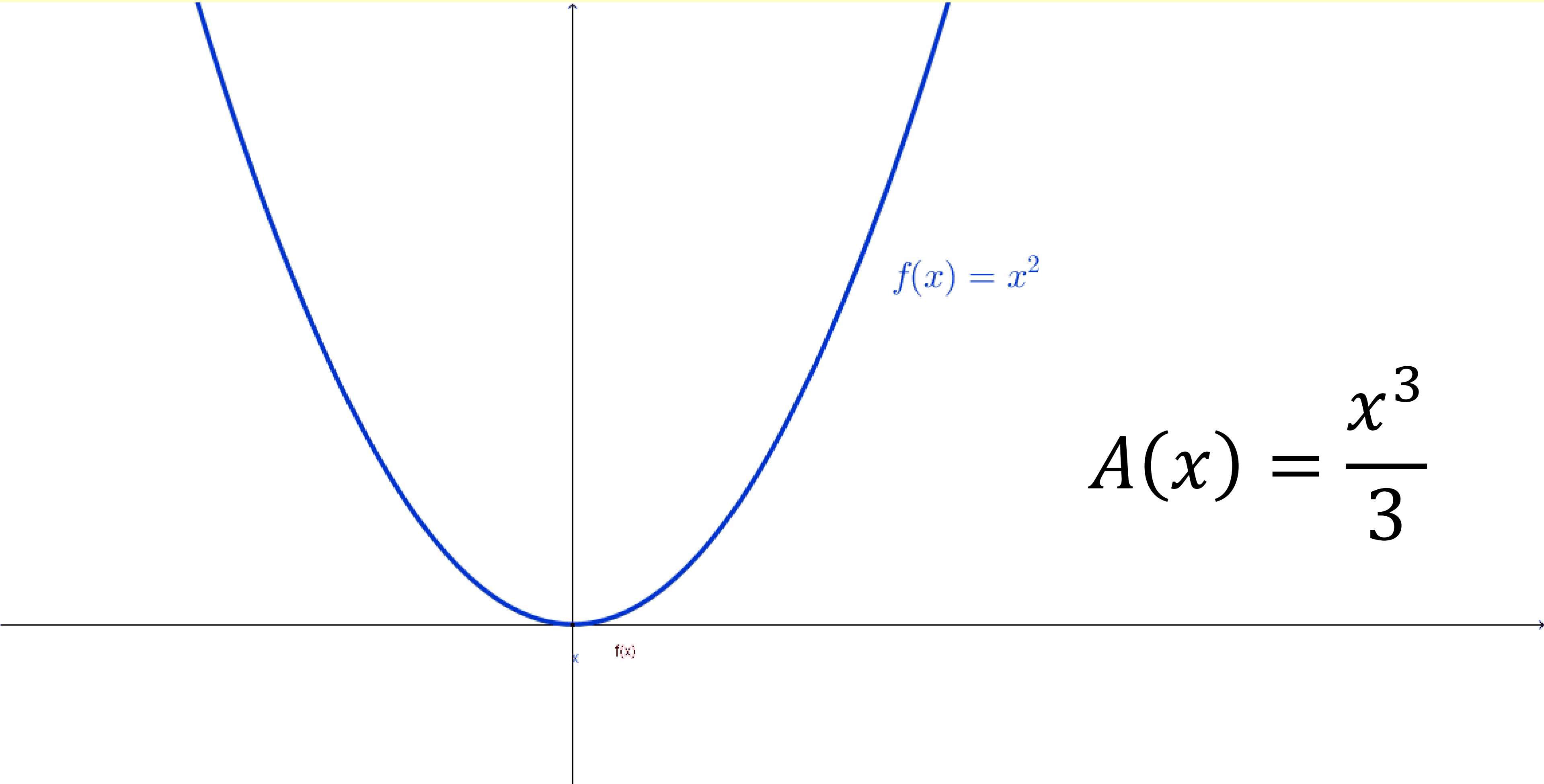


A área entre 0 e x sob a parábola de equação $y = x^2$ é iguais a 1/3 do triângulo inscrito no segmento parabólico.



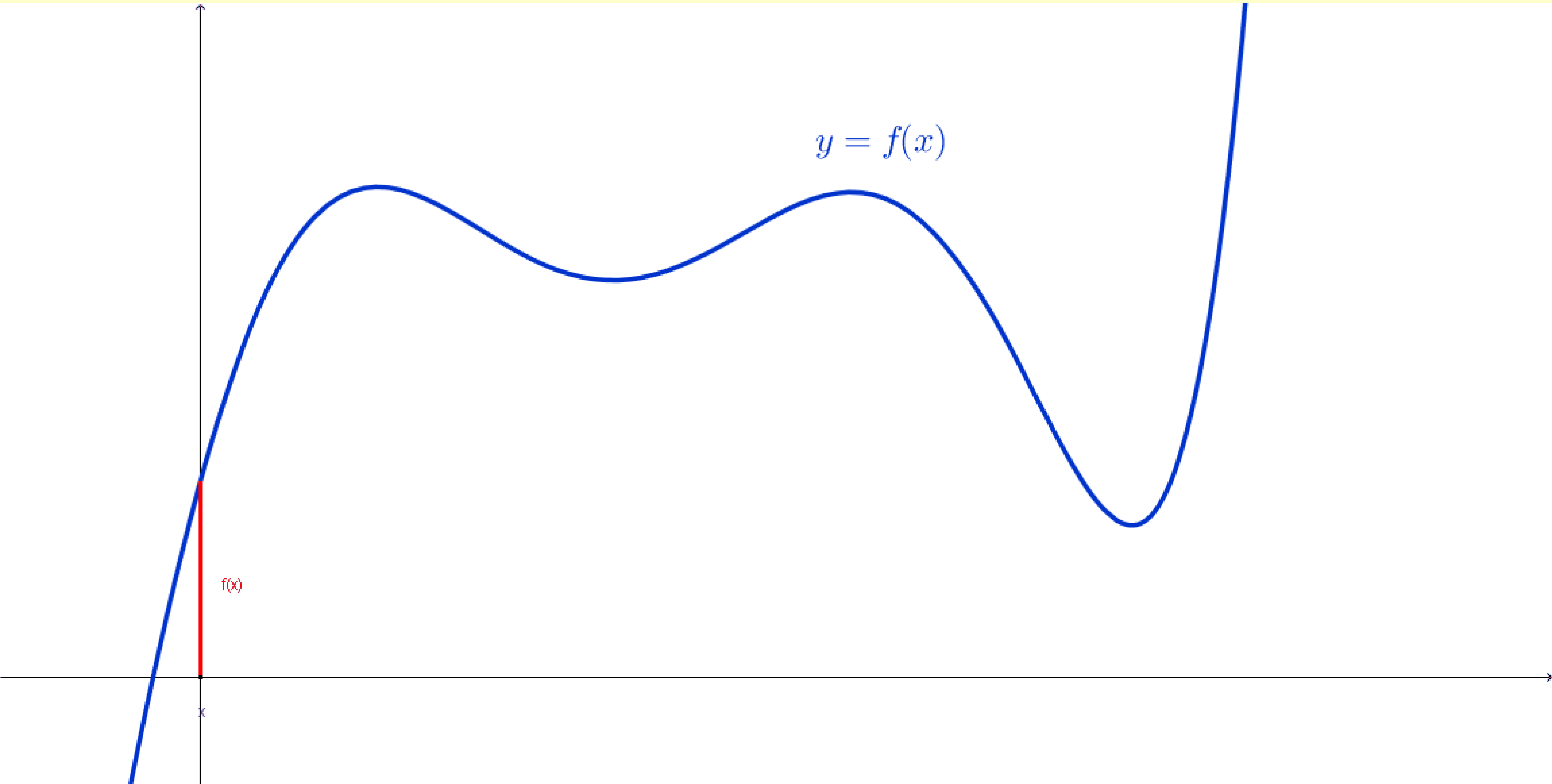
$$A(x) = \frac{x^3}{3}$$

Essa é a primeira integral da história

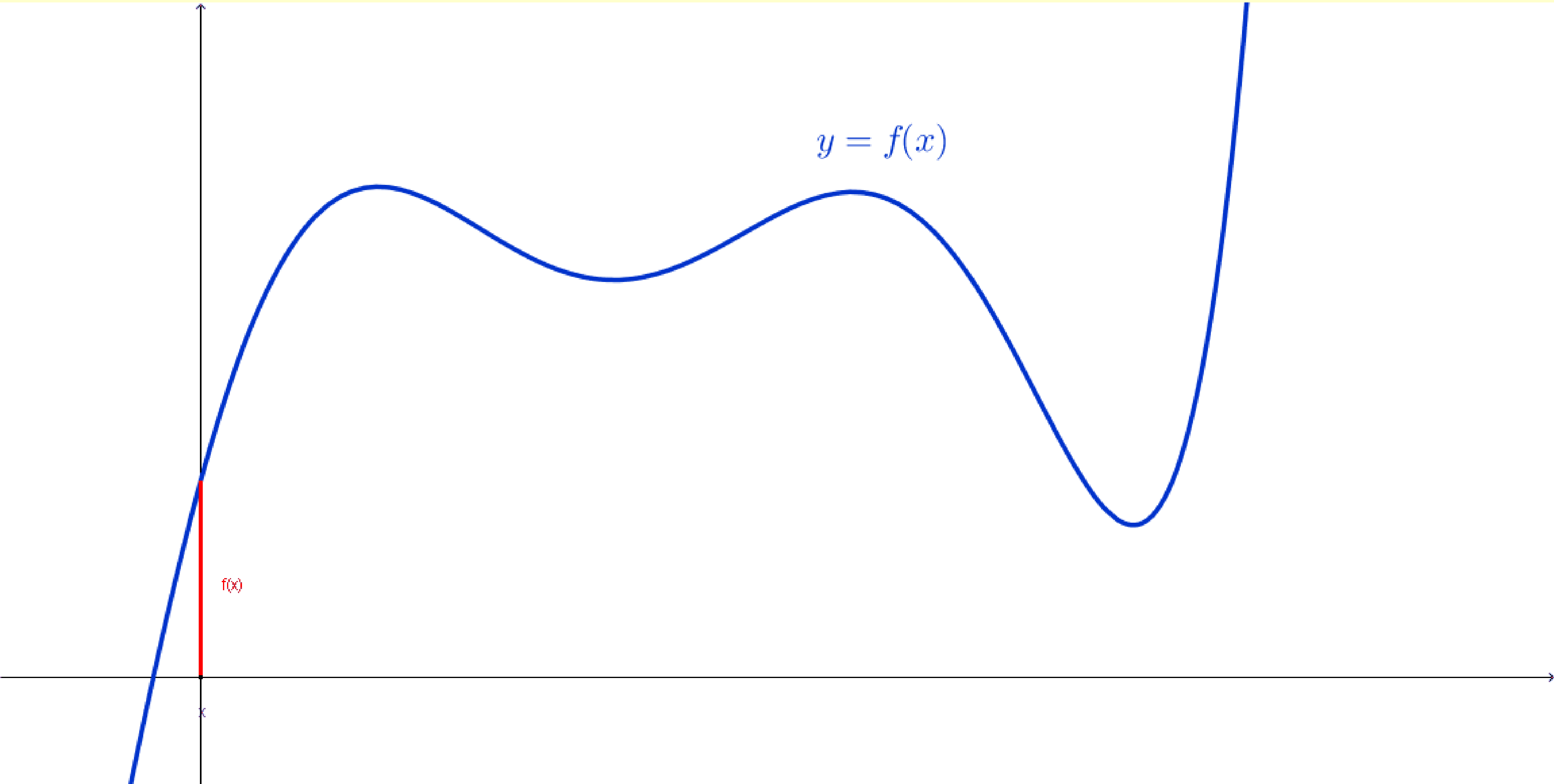


$$A(x) = \frac{x^3}{3}$$

A variação instantânea da área A(x) é A'(x)=f(x).



A derivada da função área A(x) é a própria função f(x):
A’(x)=f(x).



Newton teria criado o Cálculo Diferencial e Integral entre 1665 e 1666, quando o Trinity College foi fechado por causa da peste.

Sir Isaac Newton (1642-1727)

Newton deixou cerca de 5000 páginas de manuscritos sem publicação.

Sir Isaac Newton (1642-1727)

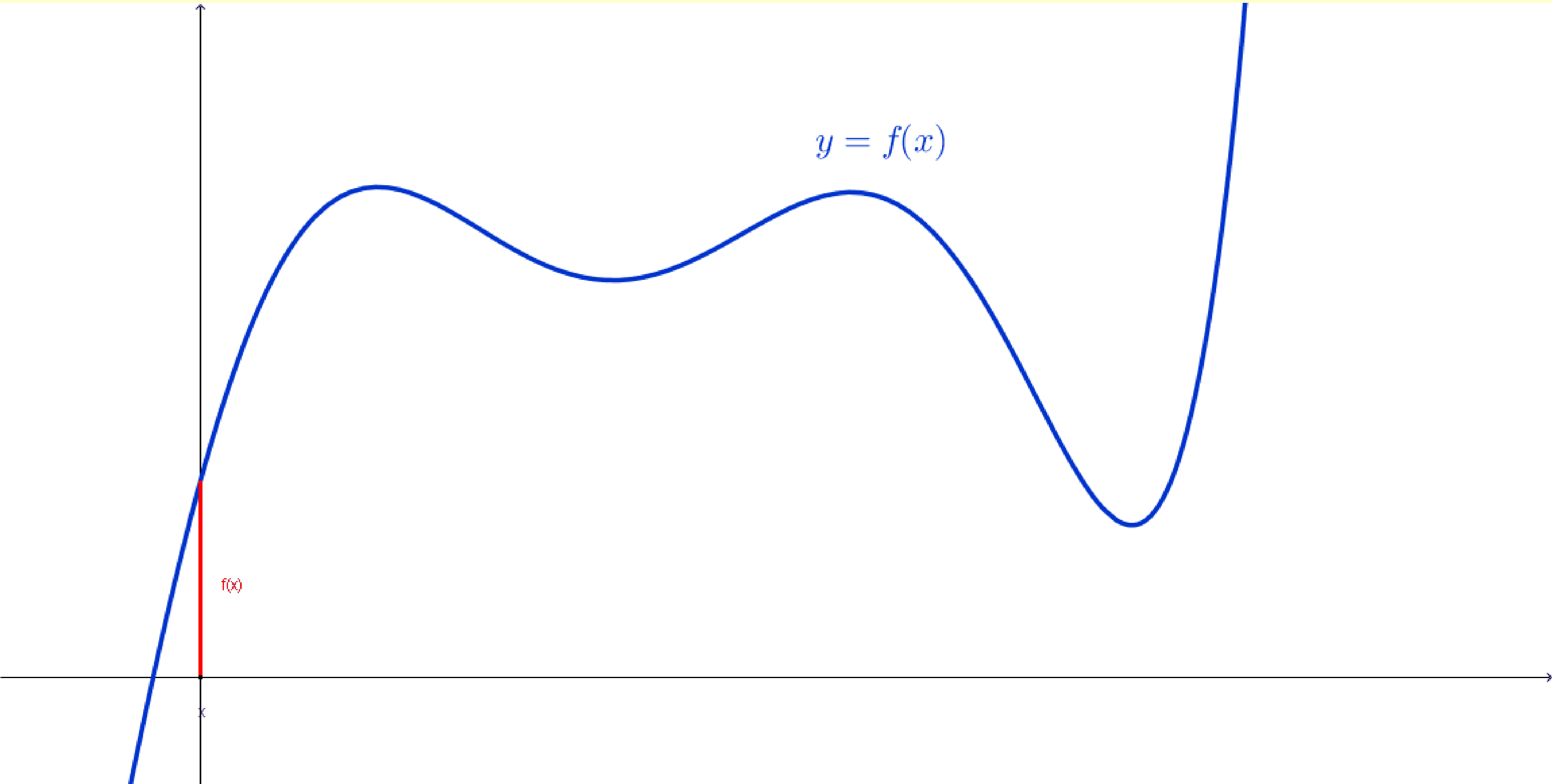
Em 1673 Leibniz viajou a Londres, onde comprou um livro de Barrow e tornou-se membro da Royal Society. É possível que tenha lido manuscritos de Newton.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

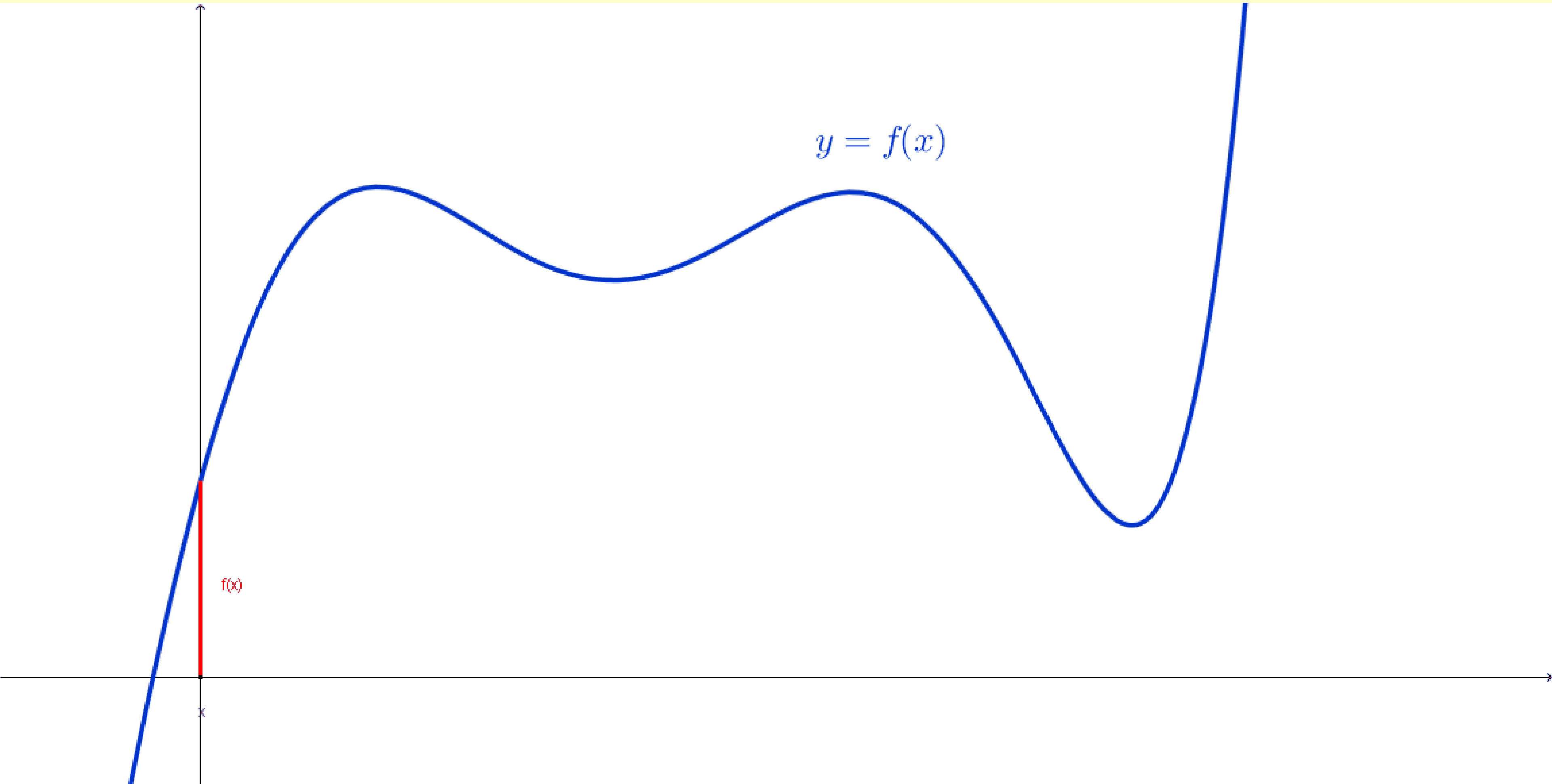
Em 1676 Leibniz cria o Cálculo com uma notação bem diferente de Newton. Sua notação prevaleceu até hoje.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

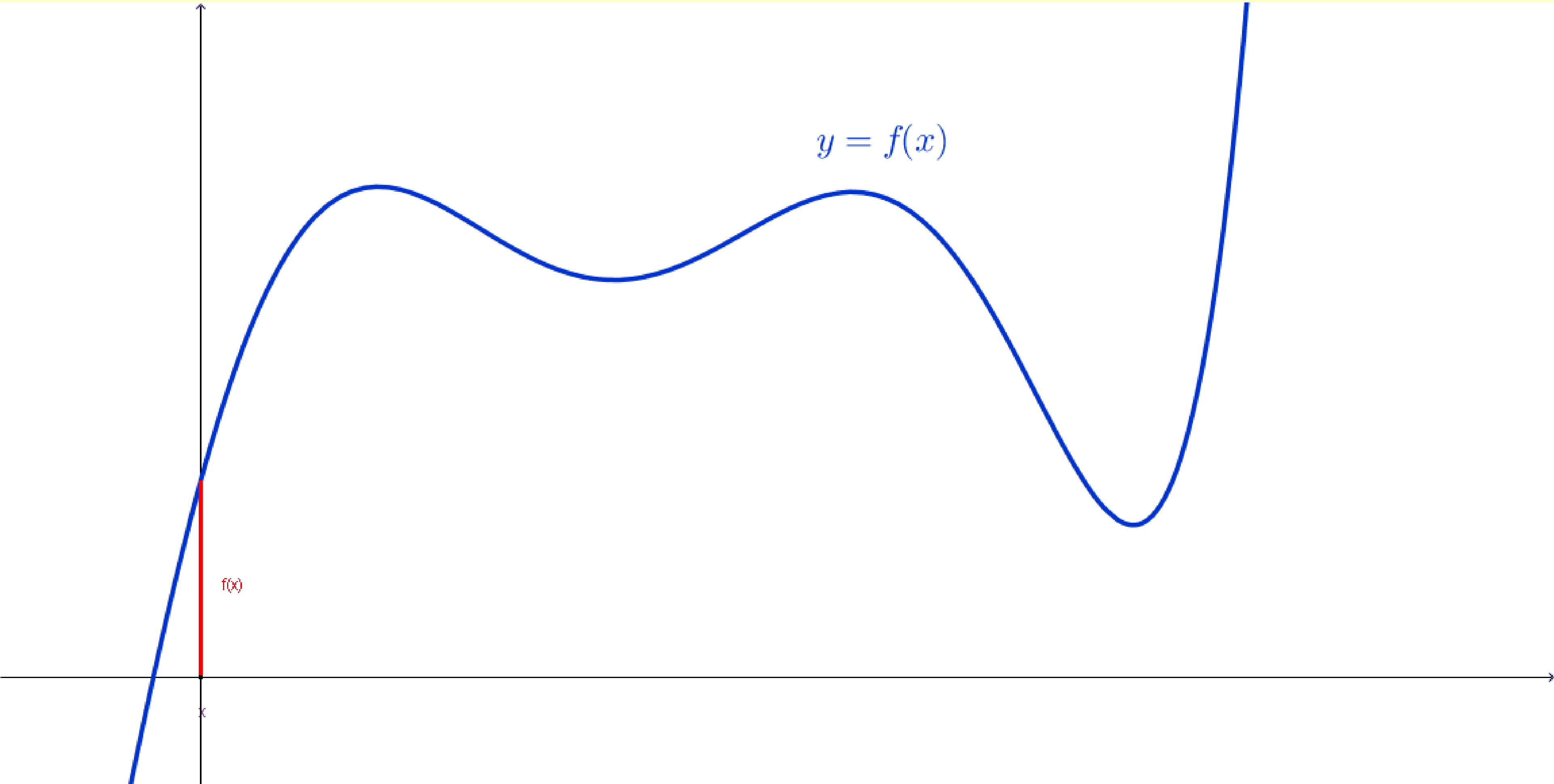
A variação instantânea da área A(x) é A’(x)=f(x).



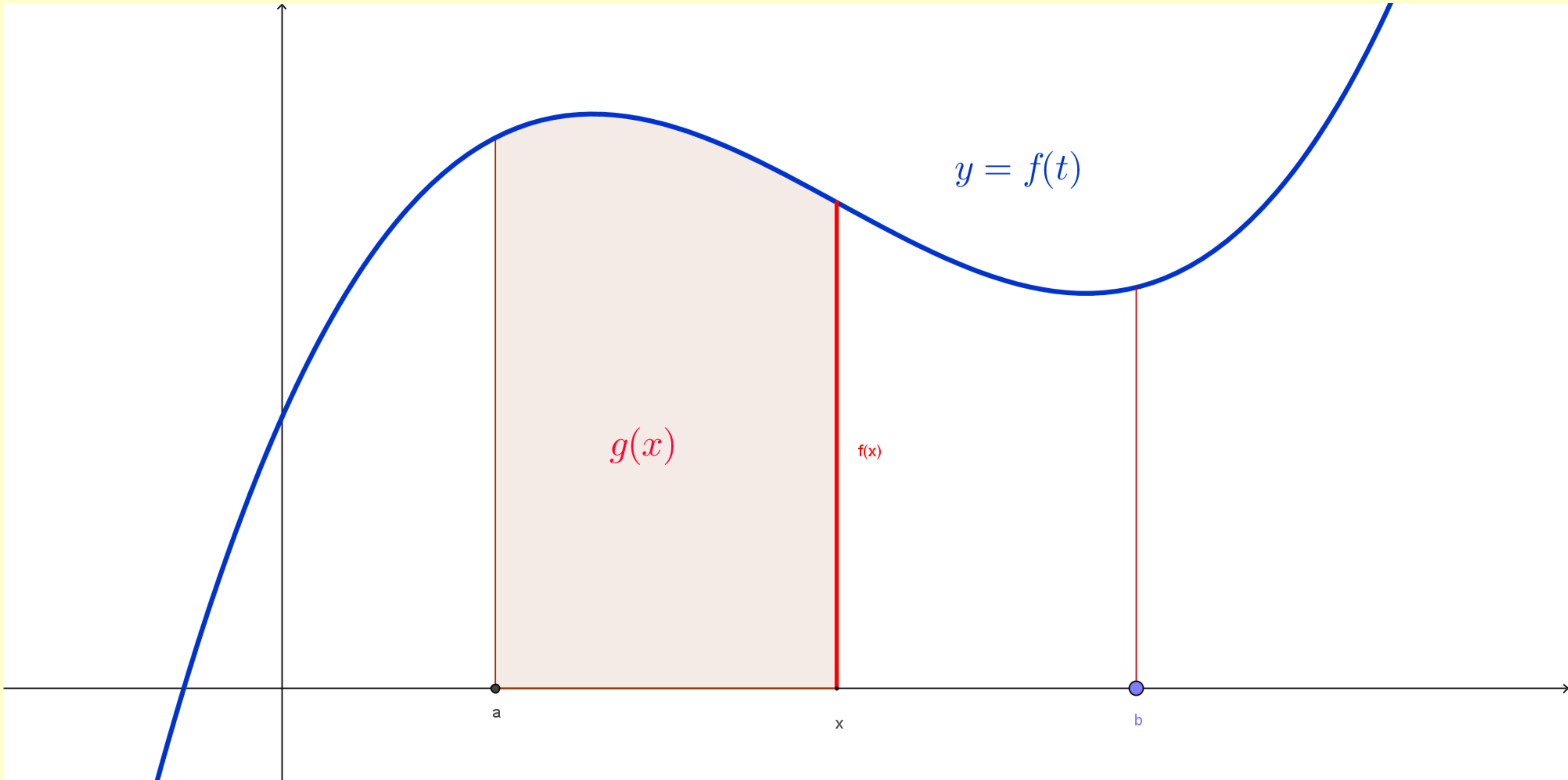
A derivada da função área A(x) é a própria função f(x):
A'(x)=f(x).



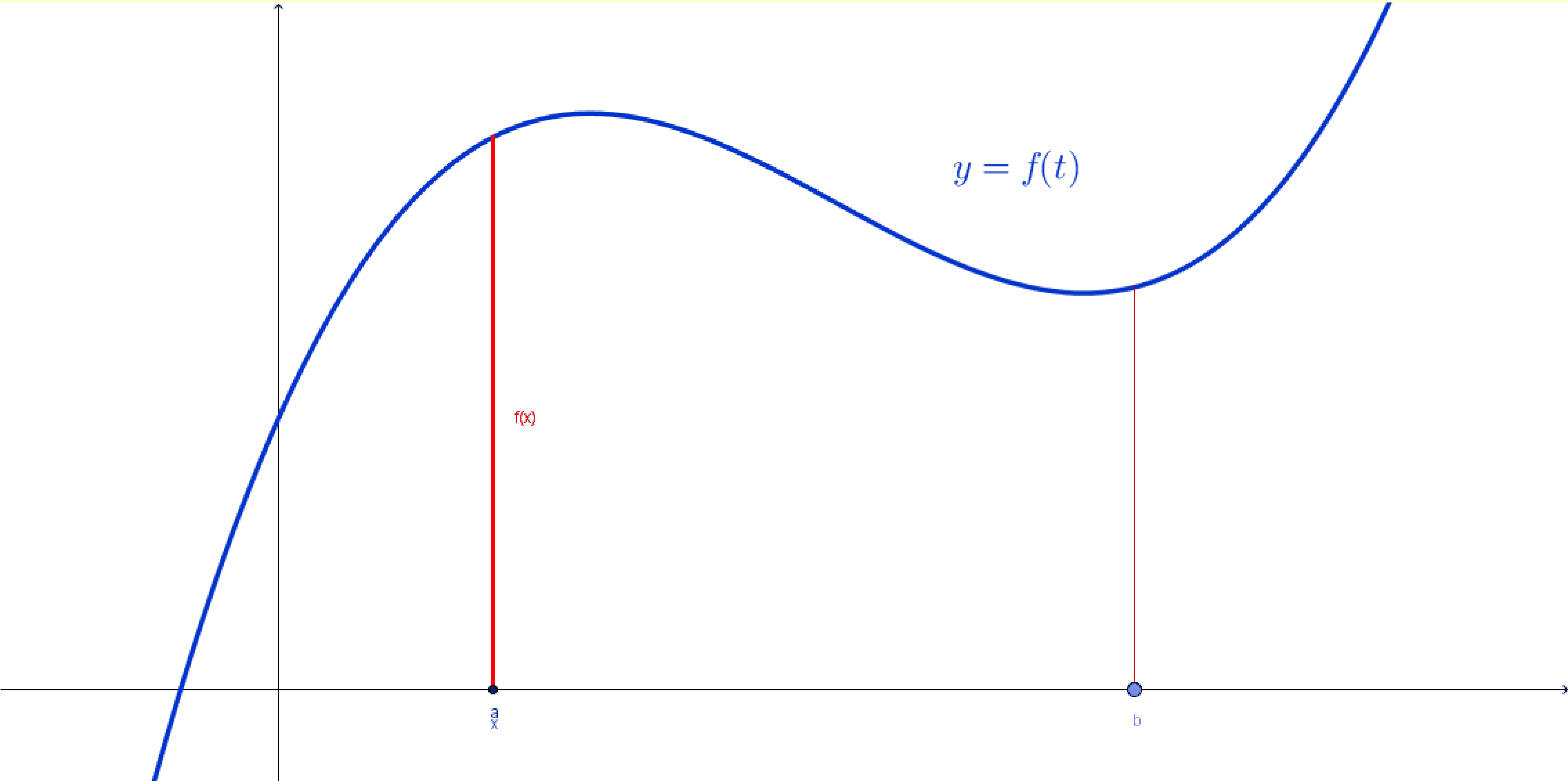
Se $A'(x) = f(x)$, (f é derivada de A)
então $A(x) = \int f(x)dx = F(x)$
(F é primitiva de f).



Dada uma função $y = f(t)$ continua em [a,b], definimos a função $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, tal que $g'(x) = f(x)$.



Dada uma função $y = f(t)$
continua em [a,b], definimos a função
$g(x) = \int_a^x f(t)dt$, tal que $g'(x) = f(x)$.

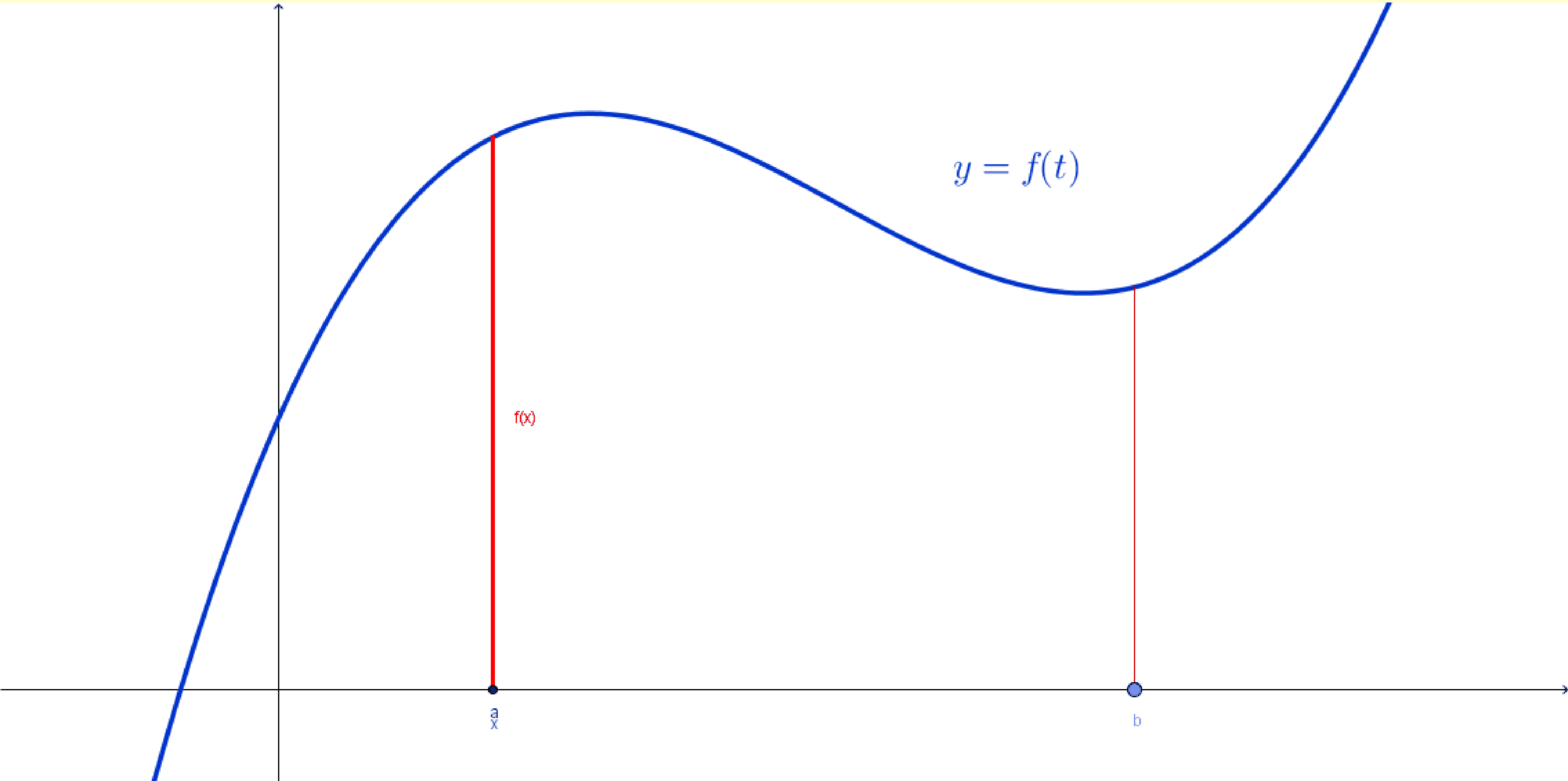


Teorema Fundamental do Cálculo (Parte I)

Dada uma função $y = f(t)$
continua em [a,b], então a função g
definida por
$$\mathrm{g}(x) = \int_a^x f(t)dt, a \leq x \leq b,$$
é contínua em [a,b] e derivável em (a,b)
e $g'(x) = f(x)$.

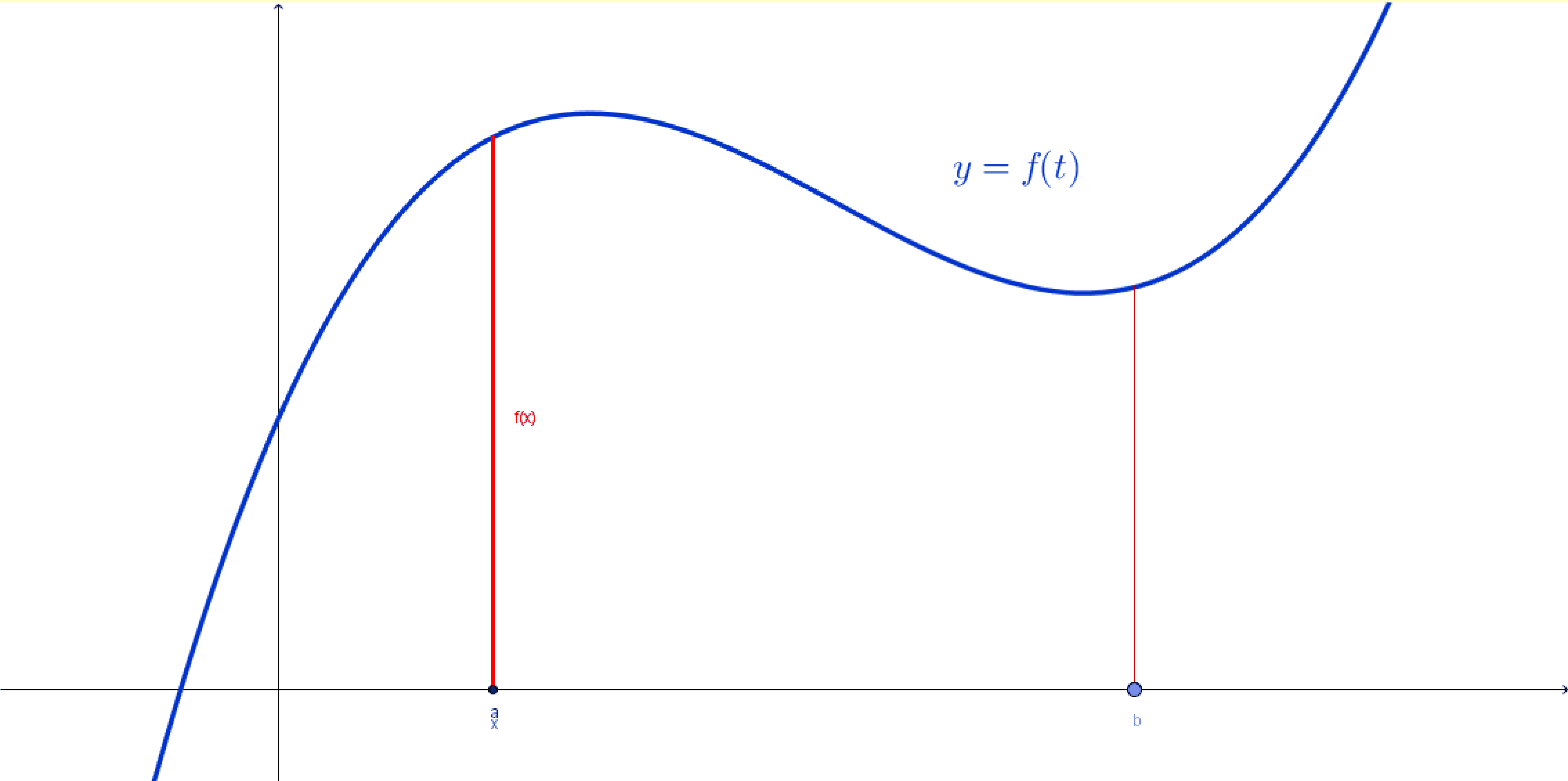
$$g(a) = \int_a^a f(t)dt = F(a)$$

$$\text{e } g(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b)$$



$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

onde $F'(x) = f(x)$.



Teorema Fundamental do Cálculo (Parte II):

Se f for contínua em [a,b], então

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

onde $F'(x) = f(x)$.

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

onde $F'(x) = f(x)$.