

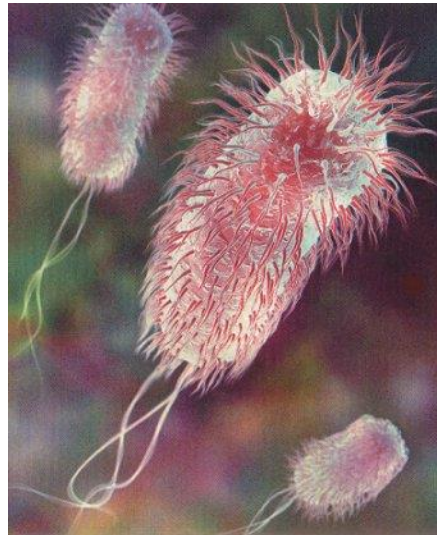
Pequenos e grandes números

Antonio Carlos Brolezzi

brolezzi@ime.usp.br

Pergunta do meu filho André com 5 anos (com cara de quem já sabia a resposta):

O que é menor que uma bactéria?

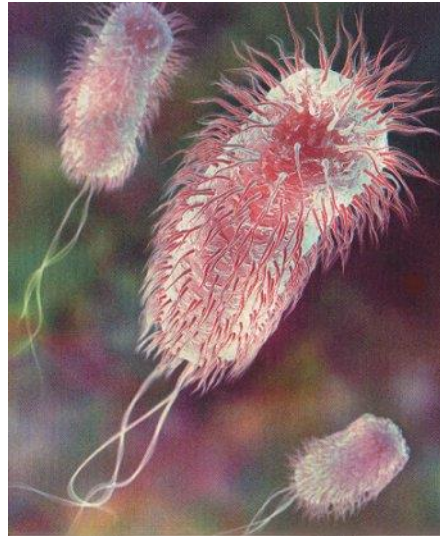


Pergunta do meu filho André com 5 anos (com cara de quem já sabia a resposta):

O que é menor que uma bactéria?

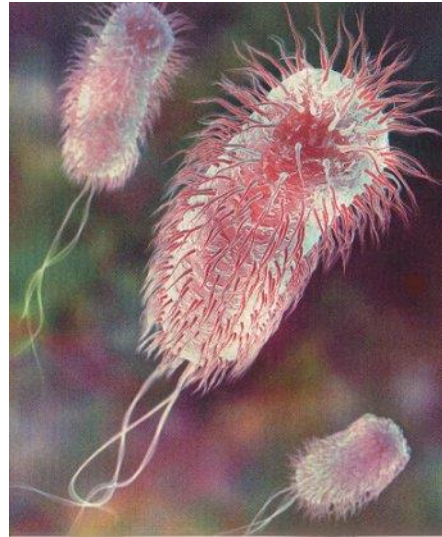
Ora, a bactéria da bactéria!

Bem, alguém poderia dizer que a bactéria da bactéria tem o mesmo tamanho que ela – mas não é essa a questão. A questão é de escala, de proporção, de medida.



Uma bactéria tem em média 0,2 micrometros a 30 micrometros ($1 \mu m = 1$ milionésimo de metro = 1 milésimo de milímetro)

Obviamente, essa não é a menor *coisa* que existe.



Mas é bem numerosa! É o ser vivo mais bem-sucedido na evolução – em termos quantitativos, pelo menos.

Estima-se que no nosso corpo existam 40 trilhões de bactérias!

Quase o mesmo número de nossas células...

Para visualizar as ordens de grandeza (ou ordem de pequenez...) precisamos lembrar da nossa escala decimal:

Prefixos do SI

10^n	Prefixo	Símbolo ^[1]	Escala curta	Equivalente decimal
10^0	<i>nenhum</i>	<i>nenhum</i>	Unidade	1
10^{-1}	deci	d	Décimo	0,1
10^{-2}	centi	c	Centésimo	0,01
10^{-3}	mili	m	Milésimo	0,001
10^{-6}	micro	μ (mu)	Milionésimo	0,000 001
10^{-9}	nano	n	Bilionésimo	0,000 000 001
10^{-12}	pico	p	Trilionésimo	0,000 000 000 001
10^{-15}	femto (fento ^[2])	f	Quadrilionésimo	0,000 000 000 000 001
10^{-18}	atto (ato ^[2])	a	Quintilionésimo	0,000 000 000 000 000 001
10^{-21}	zepto	z	Sextilionésimo	0,000 000 000 000 000 000 001
10^{-24}	yocto (iocto ^[2])	y	Septilionésimo	0,000 000 000 000 000 000 000 001

Prefixos do SI

10^n	Prefixo	Símbolo ¹	Escala curta	Equivalente decimal
10^0	<i>nenhum</i>	<i>nenhum</i>	Unidade	1
10^{-1}	deci	d	Décimo	0,1
10^{-2}	centi	c	Centésimo	0,01
10^{-3}	mili	m	Milésimo	0,001
10^{-6}	micro	μ (mu)	Milionésimo	0,000 001
10^{-9}	nano	n	Bilionésimo	0,000 000 001
10^{-12}	pico	p	Trilionésimo	0,000 000 000 001
10^{-15}	femto (fento ^[2])	f	Quadrilionésimo	0,000 000 000 000 001
10^{-18}	atto (ato ^[2])	a	Quintilionésimo	0,000 000 000 000 000 001
10^{-21}	zepto	z	Sextilionésimo	0,000 000 000 000 000 000 001
10^{-24}	yocto (iocto ^[2])	y	Septilionésimo	0,000 000 000 000 000 000 000 001

A partir daí, seguem-se frações de *yocto*.

Como vemos, para pensar nas coisas bem pequenas, acabamos nos valendo da ideia de números bem grandes.

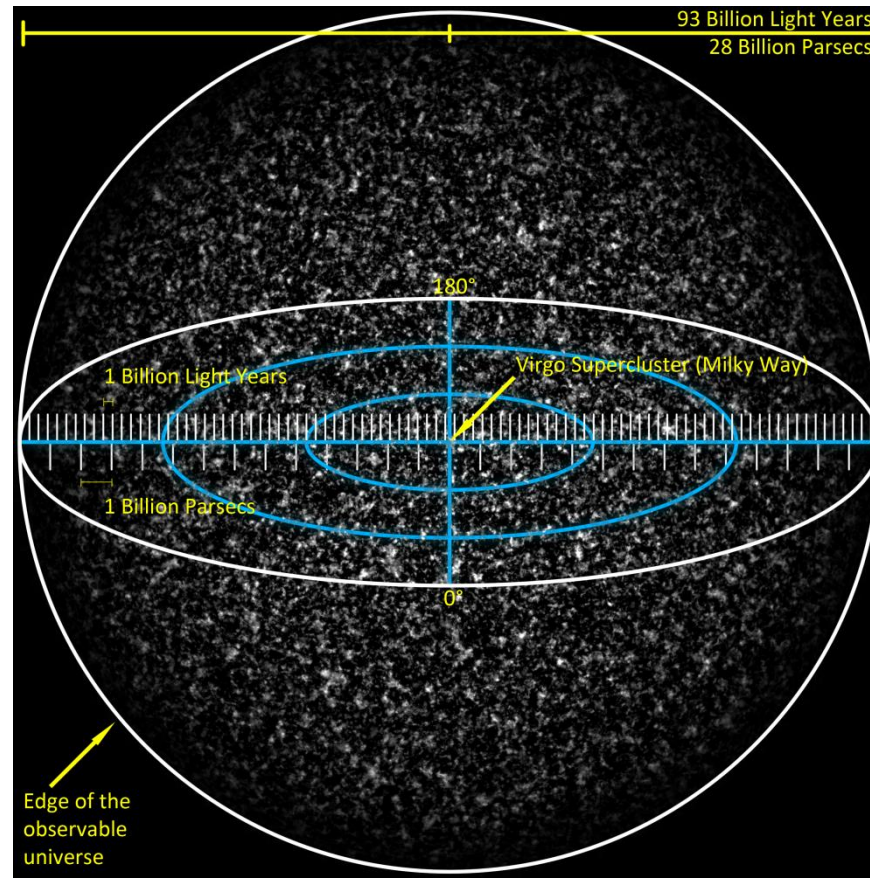
A coisa menor já imaginada, por exemplo, se baseia em uma forma de pensar bastante plausível, que envolve a noção do tamanho do Universo.

Qual o tamanho do Universo?

Os astrônomos mediram a idade do Universo em aproximadamente 13,8 bilhões anos.

Por causa da conexão entre a distância e a velocidade da luz, isso significa que eles podem olhar para uma região do espaço que se encontra 13,8 bilhões de anos-luz de distância.

Podemos observar 13,8 bilhões de anos-luz em todas as direções , o que coloca a Terra dentro de uma esfera observável com um raio de 13,8 bilhões de anos-luz.



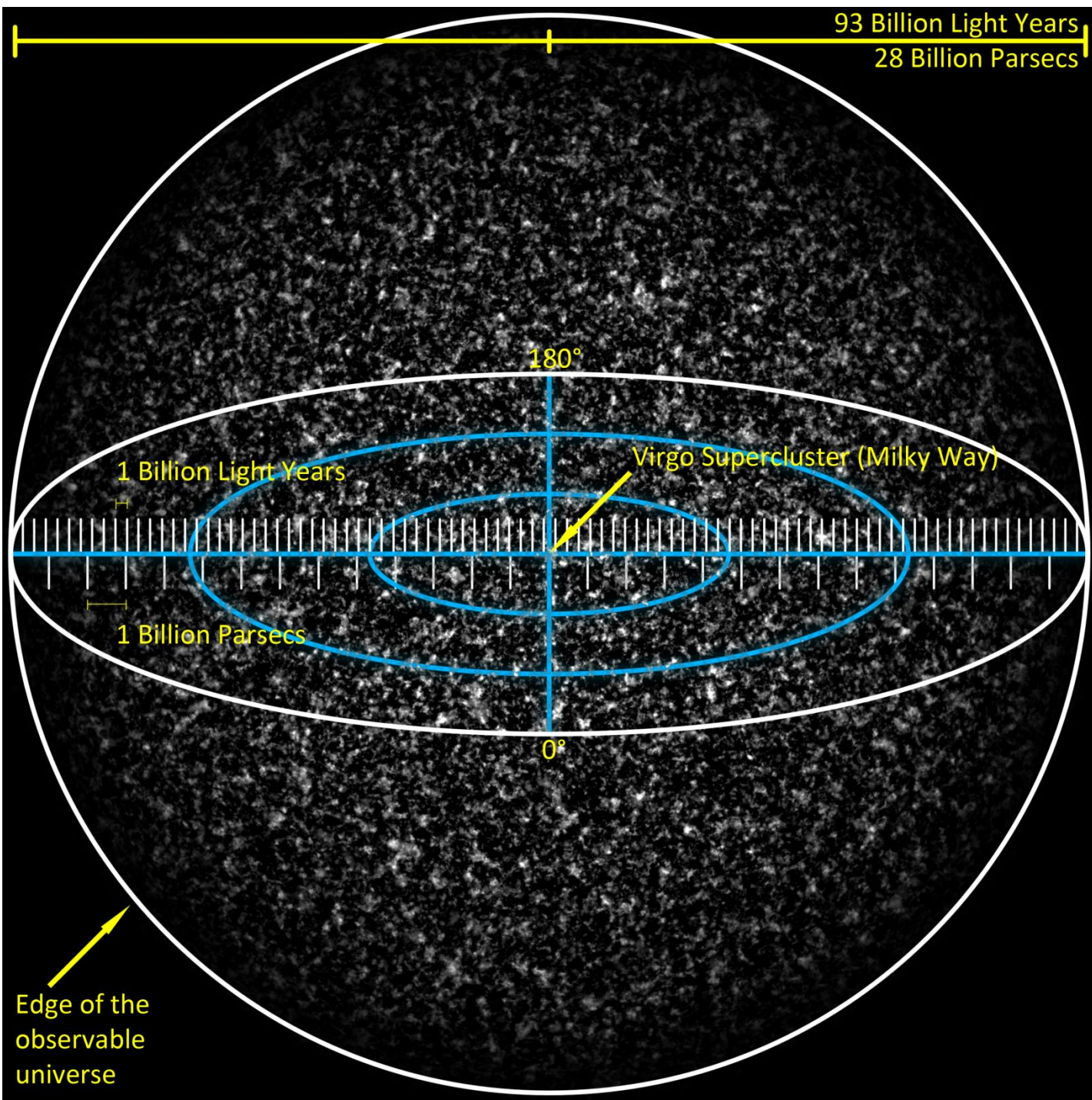
A palavra " observável " é a chave ; a esfera limita o que podemos ver, mas não o que está lá .

Mas, embora a esfera aparece quase 28 bilhões de anos-luz de diâmetro , é muito maior.

Ocorre que o universo está se expandindo.

Assim, enquanto vemos um local que estava 13,8 bilhões de anos-luz da Terra , no momento do Big Bang , o universo continuou a se expandir ao longo de sua vida.

Hoje, esse mesmo ponto é 46,5 bilhões de anos-luz de distância , fazendo com que o diâmetro do universo observável uma esfera em torno de 93 bilhões de anos-luz .



93 Billion Light Years
28 Billion Parsecs

180°

1 Billion Light Years

Virgo Supercluster (Milky Way)

1 Billion Parsecs

0°

Edge of the
observable
universe

Mas, afinal, o que são 93 bilhões de anos-luz ?

Vejamos com um exemplo.

Qual a distância da estrela mais próxima da Terra?

Além do Sol, qual a distância da estrela mais próxima?

A estrela mais próxima de Terra depois do Sol é Próxima Centauri.

Ela está a uma distância de 40 trilhões de quilômetros (40.000.000.000.000 km) da Terra.

Mas, como as distâncias no Universo são imensas, fica difícil utilizar números com tantos zeros.

Para facilitar a compreensão das distâncias astronômicas, utilizamos uma outra unidade de medida chamada ano-luz, que nada mais é do que a distância percorrida pela luz em um ano.

A luz viaja a uma velocidade de 300 mil quilômetros por segundo (nada viaja mais rápido do que ela), percorrendo cerca de 9,46 trilhões de quilômetros por ano entre os astros.

$$1 \text{ ano-luz} = 9,4605284 \times 10^{15} \text{ metros}$$

Assim , a distância de *Próxima Centauri* até nós passa a ser cerca de 4,2 anos-luz (40 trilhões / 9,46).

1 ano-luz = 9.460.528.400.000 km

Aprox. 9,46 trilhões de km
Arredondando: 10 trilhões de
quilômetro

Assim, Próxima Centauri está a pouco
mais de 4 anos-luz da Terra

Prefixos do SI

1000^m	10^n	Prefixo	Símbolo	Desde ^[3]	Escala curta	Escala longa	Equivalente decimal
1000^8	10^{24}	yotta (iota ^[2])	Y	1991	Septilhão	Quadrilhão	1 000 000 000 000 000 000 000 000 000
1000^7	10^{21}	zetta (zeta ^[2])	Z	1991	Sextilhão	Milhar de trilhão	1 000 000 000 000 000 000 000 000
1000^6	10^{18}	exa	E	1975	Quintilhão	Trilhão	1 000 000 000 000 000 000 000
1000^5	10^{15}	peta	P	1975	Quadrihã	Milhar de bilião	1 000 000 000 000 000 000
1000^4	10^{12}	tera	T	1960	Trihã	Bilião	1 000 000 000 000
1000^3	10^9	giga	G	1960	Bilhã	Milhar de milhão	1 000 000 000
1000^2	10^6	mega	M	1960	Milhã	Milhã	1 000 000
1000^1	10^3	quilo	k	1795	Milhar	Milhar	1 000
$1000^{2/3}$	10^2	hecto	h	1795	Centena	Centena	100
$1000^{1/3}$	10^1	deca	da	1795	Dezena	Dezena	10
1000^0	10^0	<i>nenhum</i>	<i>nenhum</i>		Unidade	Unidade	1
$1000^{-1/3}$	10^{-1}	deci	d	1795	Décimo	Décimo	0,1
$1000^{-2/3}$	10^{-2}	centi	c	1795	Centésimo	Centésimo	0,01
1000^{-1}	10^{-3}	mili	m	1795	Milésimo	Milésimo	0,001
1000^{-2}	10^{-6}	micro	μ (mu)	1960	Milionésimo	Milionésimo	0,000 001
1000^{-3}	10^{-9}	nano	n	1960	Bilionésimo	Milésimo de milionésimo	0,000 000 001
1000^{-4}	10^{-12}	pico	p	1960	Trilionésimo	Bilionésimo	0,000 000 000 001
1000^{-5}	10^{-15}	femto (fento ^[2])	f	1964	Quadrilionésimo	Milésimo de bilionésimo	0,000 000 000 000 001
1000^{-6}	10^{-18}	atto (ato ^[2])	a	1964	Quintilionésimo	Trilionésimo	0,000 000 000 000 000 001
1000^{-7}	10^{-21}	zepto	z	1991	Sextilionésimo	Milésimo de trilionésimo	0,000 000 000 000 000 000 001
1000^{-8}	10^{-24}	yocto (iocto ^[2])	y	1991	Septilionésimo	Quadrilionésimo	0,000 000 000 000 000 000 000 001

1. Em Portugal.

2. O sistema métrico foi introduzido em 1795 com seis prefixos. As outras datas estão relacionadas ao reconhecimento pela resolução da Conferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM).

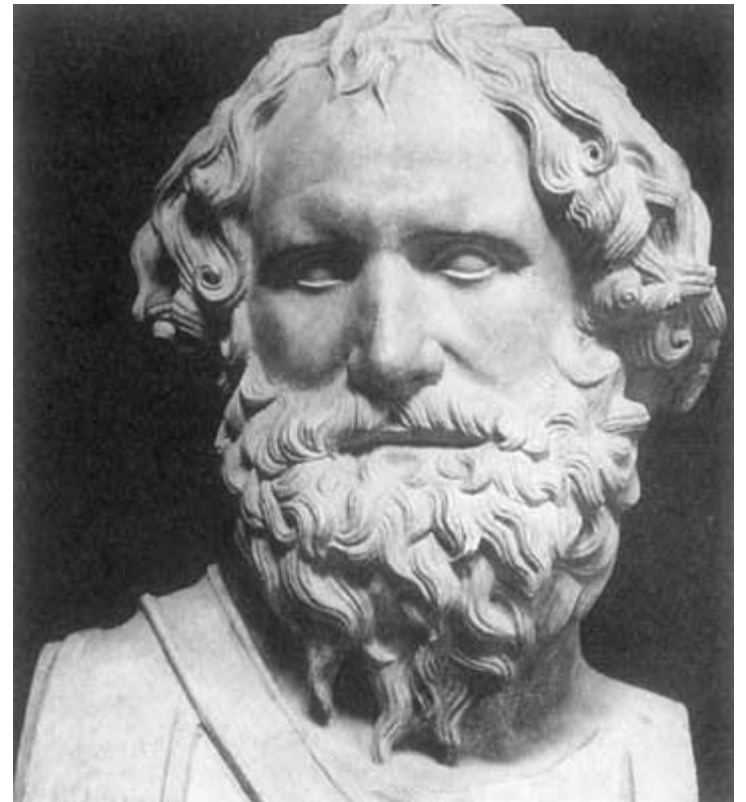
Prefixos do SI

10^n	Prefixo	Símbolo ^[1]	Escala curta	Equivalente decimal
10^{24}	yotta (iota ^[2])	Y	Septilhão	1 000 000 000 000 000 000 000 000 000
10^{21}	zetta (zeta ^[2])	Z	Sextilhão	1 000 000 000 000 000 000 000 000
10^{18}	exa	E	Quintilhão	1 000 000 000 000 000 000
10^{15}	peta	P	Quadriilhão	1 000 000 000 000 000
10^{12}	tera	T	Trilhão	1 000 000 000 000
10^9	giga	G	Bilhão	1 000 000 000
10^6	mega	M	Milhão	1 000 000
10^3	quilo	k	Milhar	1 000
10^2	hecto	h	Centena	100
10^1	deca	da	Dezena	10
10^0	<i>nenhum</i>	<i>nenhum</i>	Unidade	1

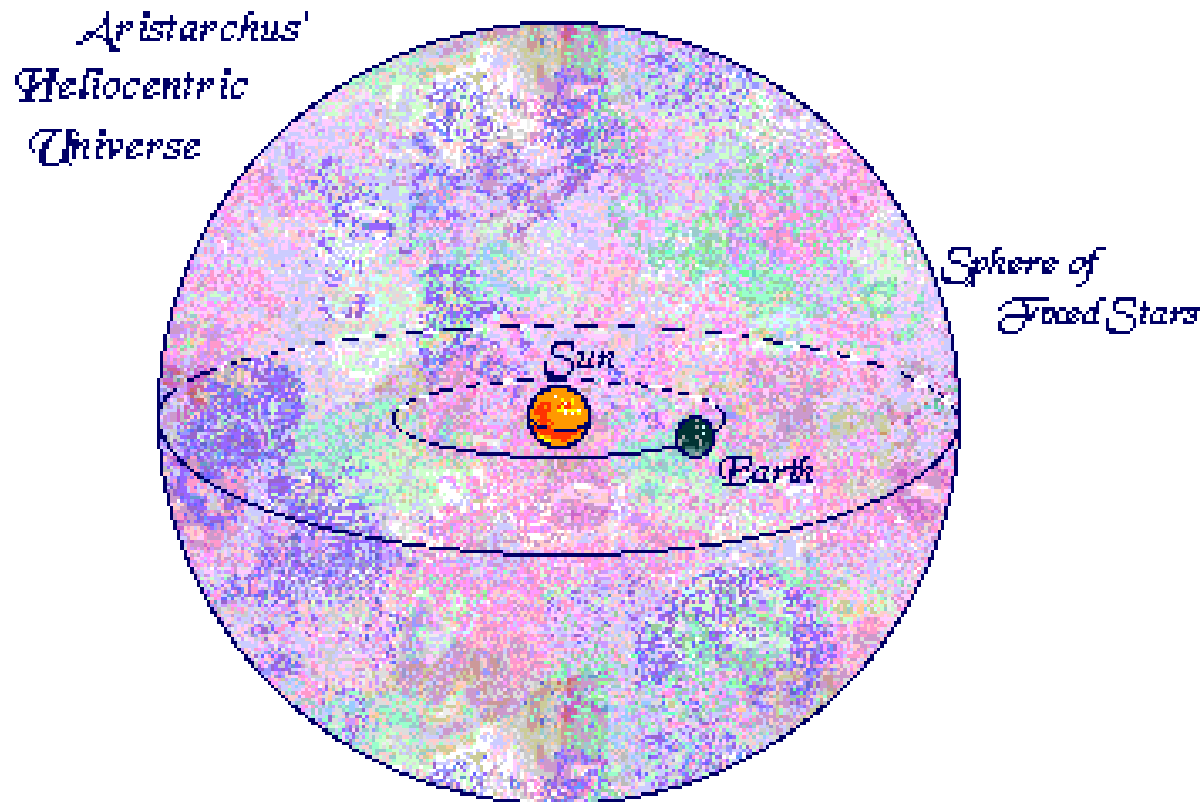
A grandeza do Universo nos faz pensar como
pequenos somos.

Mas também nos faz sentir-nos grandes – conhecer o
Universo é de alguma forma tomar posse dele.

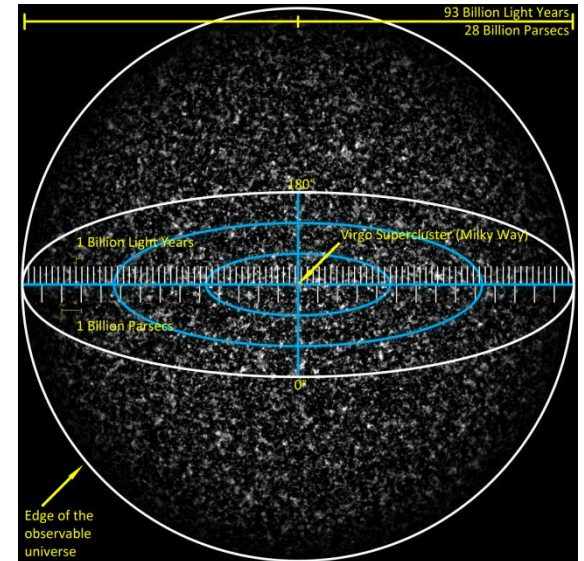
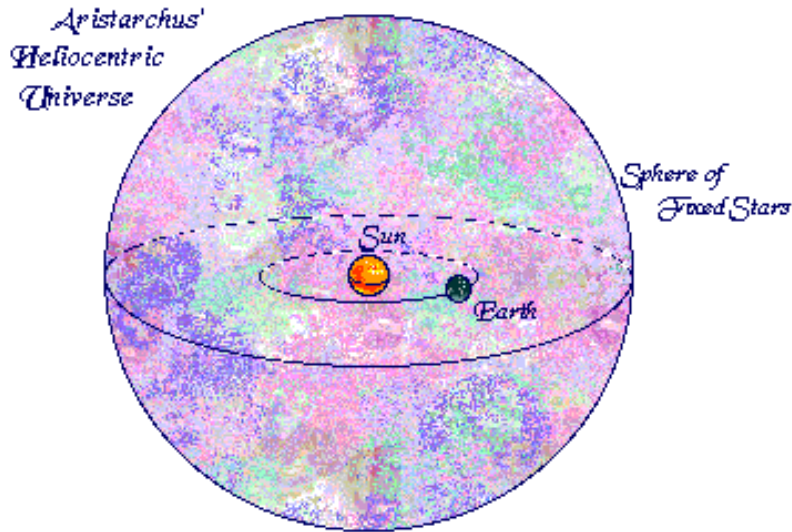
Arquimedes de Siracusa
(pensou em como poderia
preencher o Universo de
areia – seriam
necessários, pelas suas
contas, 10^{63} grãos.



Por Universo, ele tomou o Universo heliocêntrico de Aristarco de Samos. Uma esfera de raio 1 ano-luz.

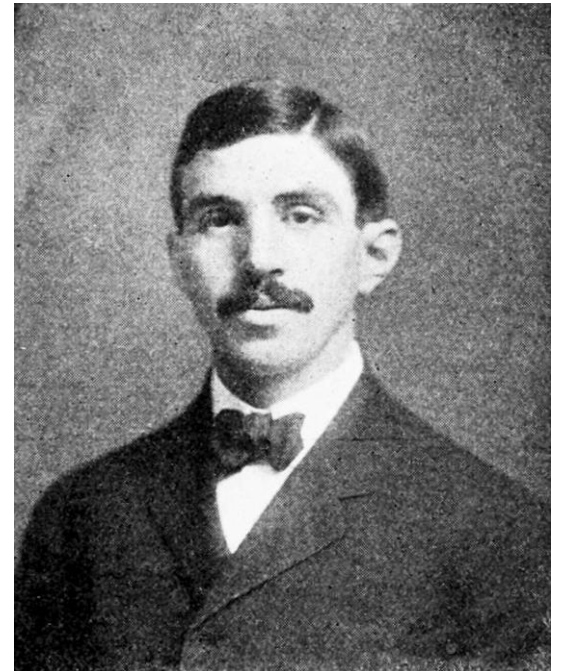


Pelas estimativas atuais, o Universo observável é uma esfera com raio de 46,5 bilhões de anos-luz – um pouquinho maior que o de Aristarco!



$$1 \text{ googol} = 10^{100}$$

A palavra googol foi criada pelo sobrinho do matemático Edward Kasner (1878-1955) em 1938. O sobrinho era Milton Sirotta (1929-1981) e ele tinha 9 anos de idade.



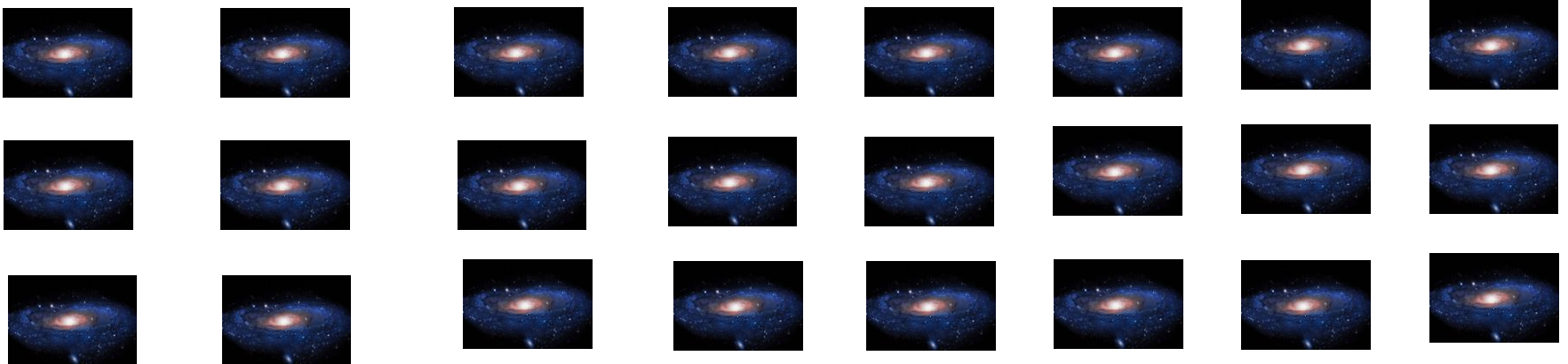
Você sabe, em 1996, a palavra foi utilizada para denominar o buscador Google. Um erro de grafia gerou o nome de mesma pronuncia em inglês. Como o domínio *google.com* estava vago, ficou esse.



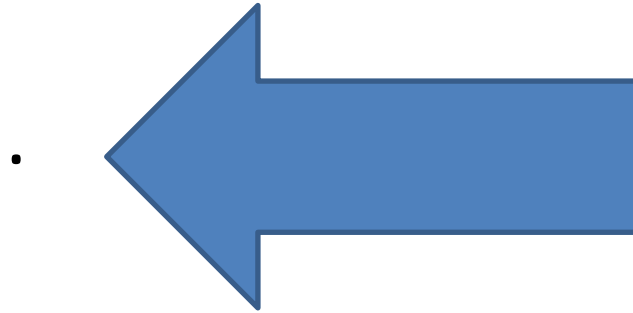
Larry Page e Sergey Brin

No universo observável, os astrônomos estimam que haja pelo menos 176 bilhões de galáxias. O número cresce na medida em que se aperfeiçoam os telescópios.

Se fossemos dividir as galáxias entre nós, daria cerca de 24 galáxias para cada ser humano na terra.



Pense em um pontinho de 0,1 mm de diâmetro – a menor coisa que a vista humana consegue enxergar



Se esse ponto fosse ampliado para o tamanho do universo conhecido, então o correspondente pontinho (o pontinho do pontinho...) é simplesmente a menor unidade de medida já estudada.

Essa menor unidade de medida é o comprimento de Planck (proposto por Max Planck)

Comprimento de Planck é um espaço de

$$1,6 \times 10^{-35} \text{ m}$$

e corresponde à distância que a luz percorre no vácuo durante um **tempo de Planck** da ordem de 10^{-43} segundos.

Mas um zero a mais, dá muita diferença?

Vamos ver isso com um vídeo bem conhecido, que mostra as potências de 10 em contexto universal.

<https://www.youtube.com/watch?v=bhofN1xX6u0>

Para explorar com mais calma:

Vamos olhar o tamanho relativo dessas coisas e chegar nesse Universo infinitesimal.

<http://scaleofuniverse.com/>

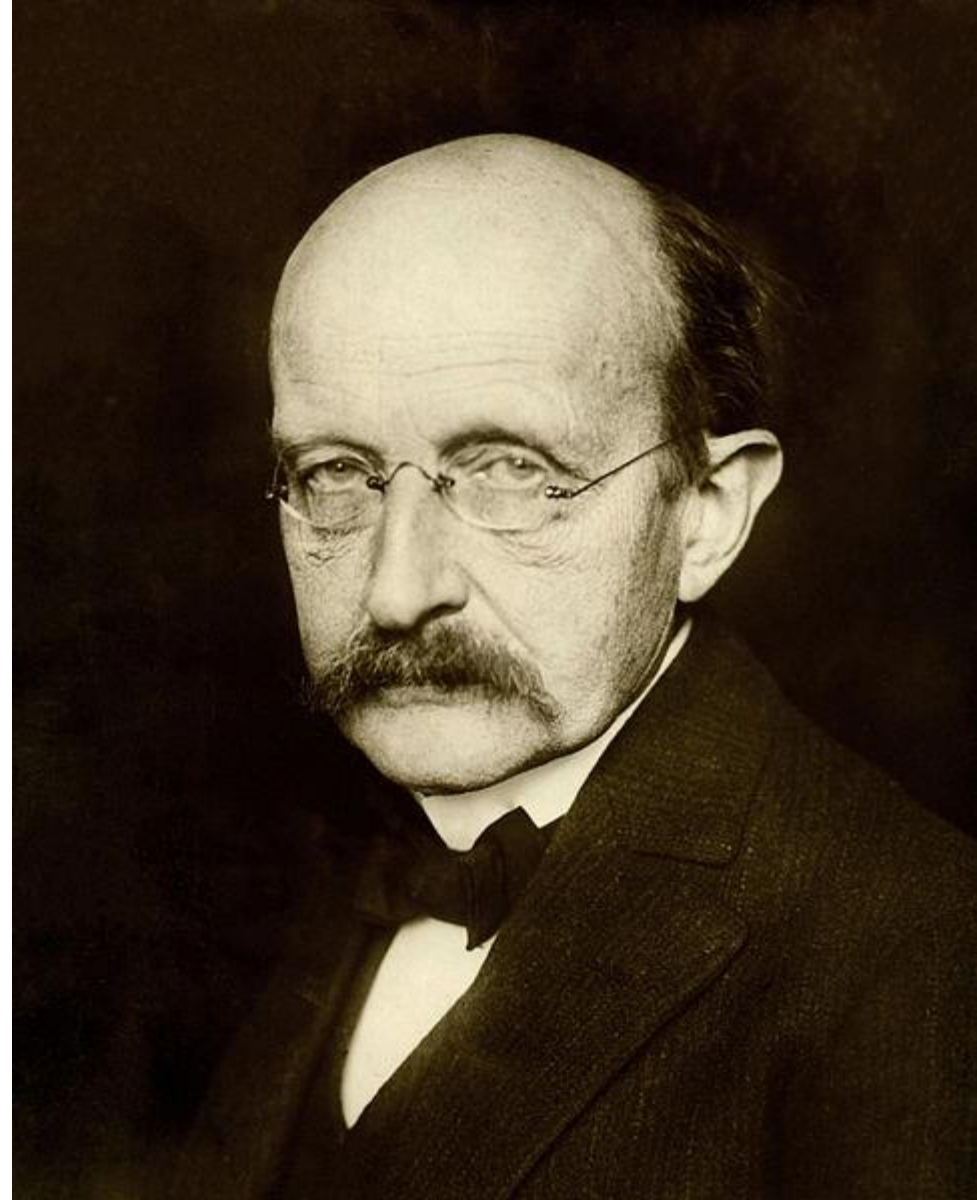
Para pensar em números pequenos, acabamos pensando em números grandes.

Na verdade, para entender o pequeno temos que entender um pouco de números.

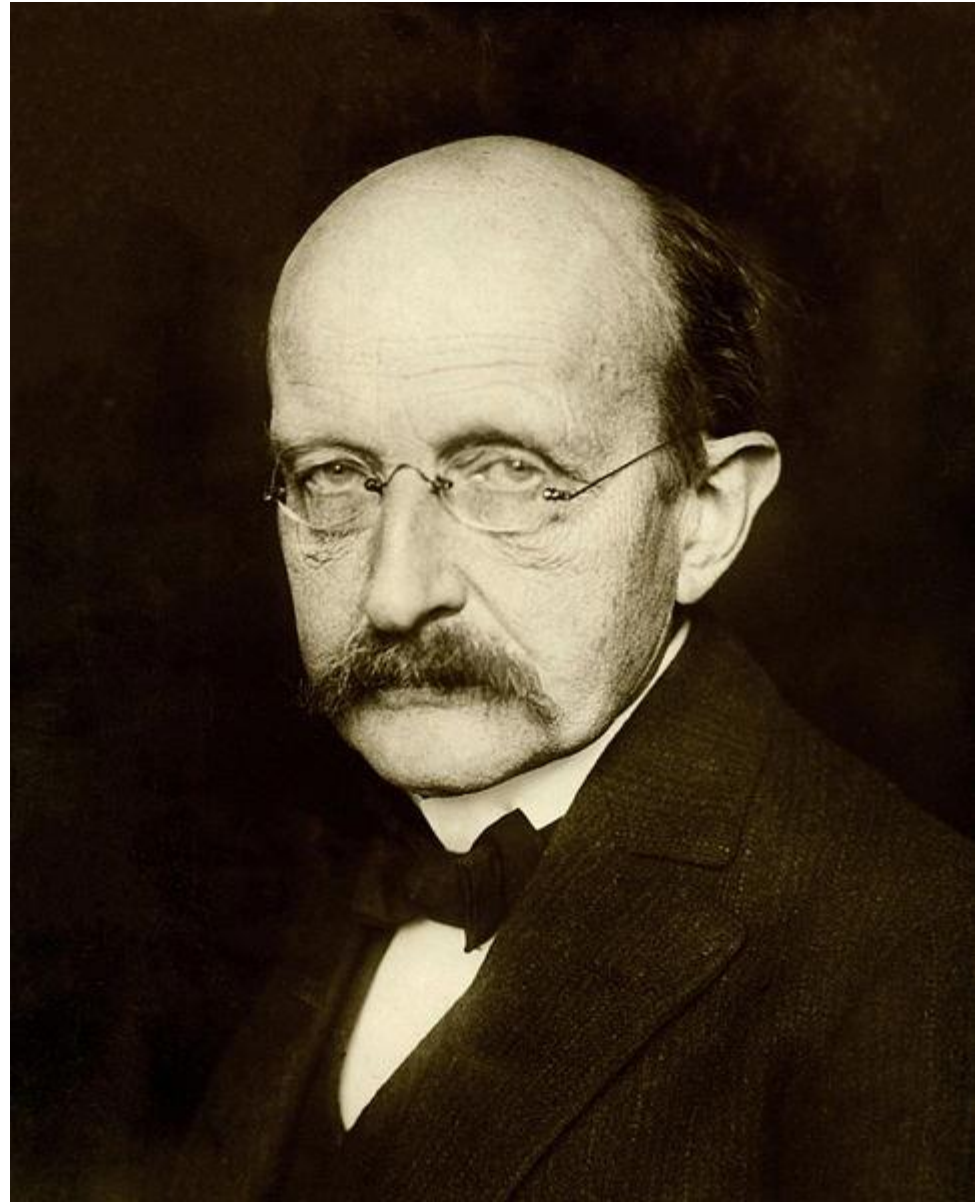
Eu falo da própria noção de números.

Isso porque, poderia haver uma menor unidade de medida é o *comprimento de Planck*.

Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947) foi um físico alemão que estudou muita matemática.



Max Planck é considerado o pai da física quântica ganhador do Nobel de Física de 1918, por suas contribuições na área da física quântica.



A física quântica tem por hipótese básica, elaborada por Planck em 1900, de que toda a energia é irradiada e absorvida na forma de elementos discretos chamados *quanta* (plural de *quantum*).

Em 1905, Albert Einstein postulou que a própria luz é formada por *quanta* discretos, que mais tarde seriam chamados de *fótons*.

Bem, a questão aqui envolve a noção de *discreto*. O que é isso?

A noção de número apenas foi mais bem esclarecida com a revolução matemática do século XIX e início do XX.

Essa revolução teve personagens importantes, todos alemães:

Cantor, Dedekind, Weierstrass, Hilbert...

A noção de número apenas foi mais bem esclarecida com a revolução matemática do século XIX e início do XX.



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)



Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916)



Cantor propôs a ideia da continuidade da reta real e definiu os conjuntos numéricos.

Dedekind definiu matematicamente os números reais.



Mas foi Weierstrass quem aplicou a ideia dos reais às funções e ao Cálculo Diferencial e Integral.



Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

1815-1897

Alguns dos alunos mais famosos de Weierstrass (100 deles se tornaram professores universitários):

Georg Cantor,
Sofia Kovalevskaja,
Lazarus Fuchs,
Hermann Amandus Schwarz,
Friedrich Schottky,
Ferdinand Georg Frobenius,
Hermann Minkowski,
Carle Runge,
Ludwig Boltzmann,
Max Planck...



Assim, Max Planck e a física quântica se valeram de conceitos matemáticos sobre números, e em particular sobre grandezas discretas e contínuas.

Para entender isso, é preciso responder à pergunta:

O que é número?

O que é número?

Número é uma entidade matemática utilizada para codificar, contar e medir.

O que é contar? Vários sentidos:

dizer os números

ela já sabe contar

calcular o valor ou quantidade

contar o número de pessoas

contar o dinheiro

narrar algo

contar o que se passou

contar uma história

medir, marcar

contar o tempo que falta para partir.

O que é medir?

tirar as dimensões

medir um terreno

avaliar, calcular

medir as consequências

pensar, ter cuidado

meça as suas palavras!

comparar-se a alguém

medir-se com o adversário.

O que é codificar?

impedir ou dificultar a leitura ou veiculação de informações

codificar o filme em um DVD

reunir, agrupar, sistematizar

código florestal

converter (mensagens) para determinado código

código morse

criar um número que representa uma identidade

CPF, conta-corrente, código de barras, número do celular

Para contar, medir e codificar, entram em jogo as duas faces dos números

Para contar, medir e codificar, entram em jogo as duas faces dos números

As duas faces do número:

Discreto e contínuo

O QUE É DISCRETO?

De modo geral, *discreto* é aquilo que exprime objetos distintos, que se revela por sinais separados, que se põe à parte.

Vem do latim *discretus*, particípio passado do verbo *discernere* (discernir), que significa discriminar, separar, distinguir, ver claro.

Etimologicamente, *discernere* vem de *cernere*, que quer dizer passar pelo crivo, joeirar, decidir.

Da mesma fonte derivam as palavras segredo, secreto, certo, discrição.

O QUE É DISCRETO?

Desse sentido de ser separado, distinto, vem o uso de discreto referindo-se a quem sabe guardar um segredo, é prudente, circunspecto, recatado, modesto, não se faz sentir com intensidade, é pequeno.

Grandezas discretas são contáveis, que são objeto de contagem, como o número de livros em uma prateleira.





O QUE É CONTÍNUO?

Já contínuo vem de *con-tenere* (ter junto, manter unido, segurar).

Contínuo é o que está imediatamente unido a outra coisa.

Da mesma origem vem conter, conteúdo, continente, contente (o que cabe em si, e não cobiça alargar-se).

Contínuo designa também o funcionário que presta assistência contínua ao chefe

O QUE É CONTÍNUO?

Certo tipo de grandezas é formado por aquelas quantidades que são passíveis de medida, como nossa altura.





Medir é comparar uma grandeza com uma outra, de mesma natureza, tomada como padrão.

Ou seja, medir é contar quantas vezes uma grandeza, considerada como padrão, “cabe” em outra.

Já contar... é dizer quantas unidades tem determinada quantidade. Ou seja, medir essa grandeza em termos de unidades.



Relação entre contar e medir – entre discreto e contínuo.

Na matemática, os números naturais são utilizados para contar.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

O conjunto dos números naturais é chamado de enumerável, pois seus elementos podem ser contado um a um Embora sejam infinitos.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

A infinitude dos números naturais é bastante contra-intuitiva. Basta comparar o conjunto dos naturais com o conjunto dos números pares... Eles são equipotentes! Têm a mesma cardinalidade! Há uma bijeção entre os dois conjuntos! Eles são um a um!

0 1 2 3 4 5 6 7

0 2 4 6 8 10 12 14 ...

Também tem a mesma cardinalidade o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Basta fazer esta correspondência, por exemplos, entre pares e ímpares:

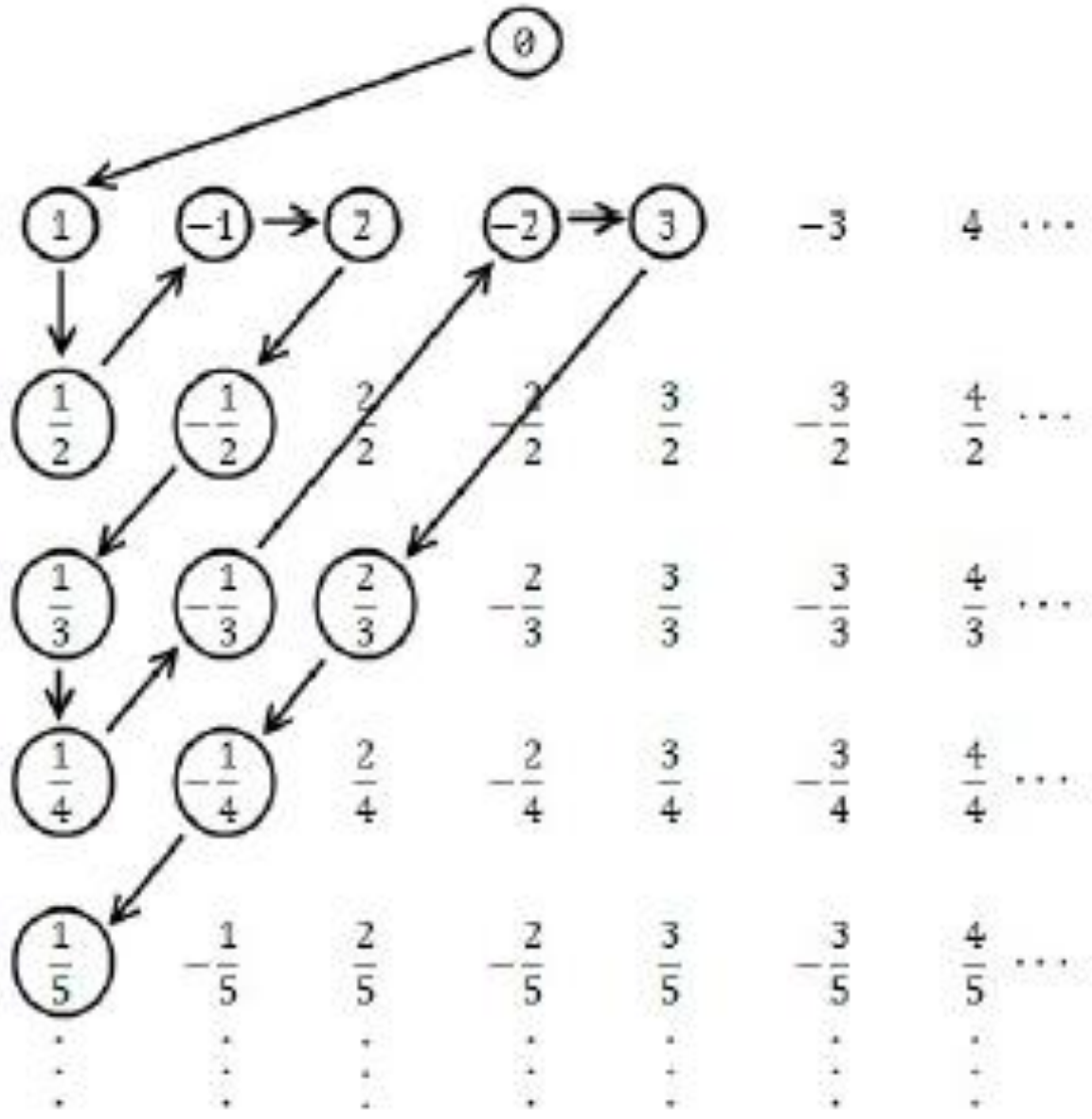
...	-3,	-2,	-1,	0,	1,	2,	3,	...
...	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	...
...	5,	3,	1,	0,	2,	4,	6,	...

Agora vem o passo mais estranho. Os racionais também formam um conjunto enumerável.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} ; p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

O argumento de Cantor é fácil de seguir...

Cantor propõe uma ordenação pela diagonal:



Portanto há uma associação um a um entre o conjunto dos naturais e o conjunto dos racionais.

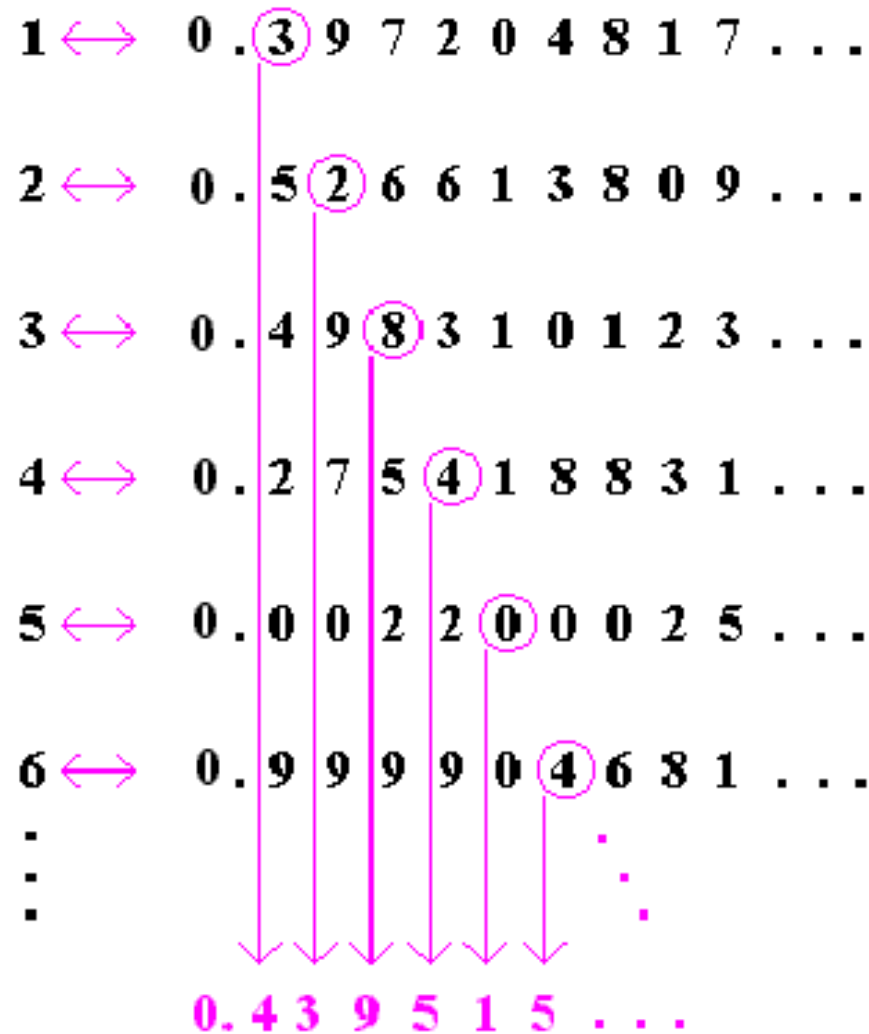
E o conjunto dos reais?

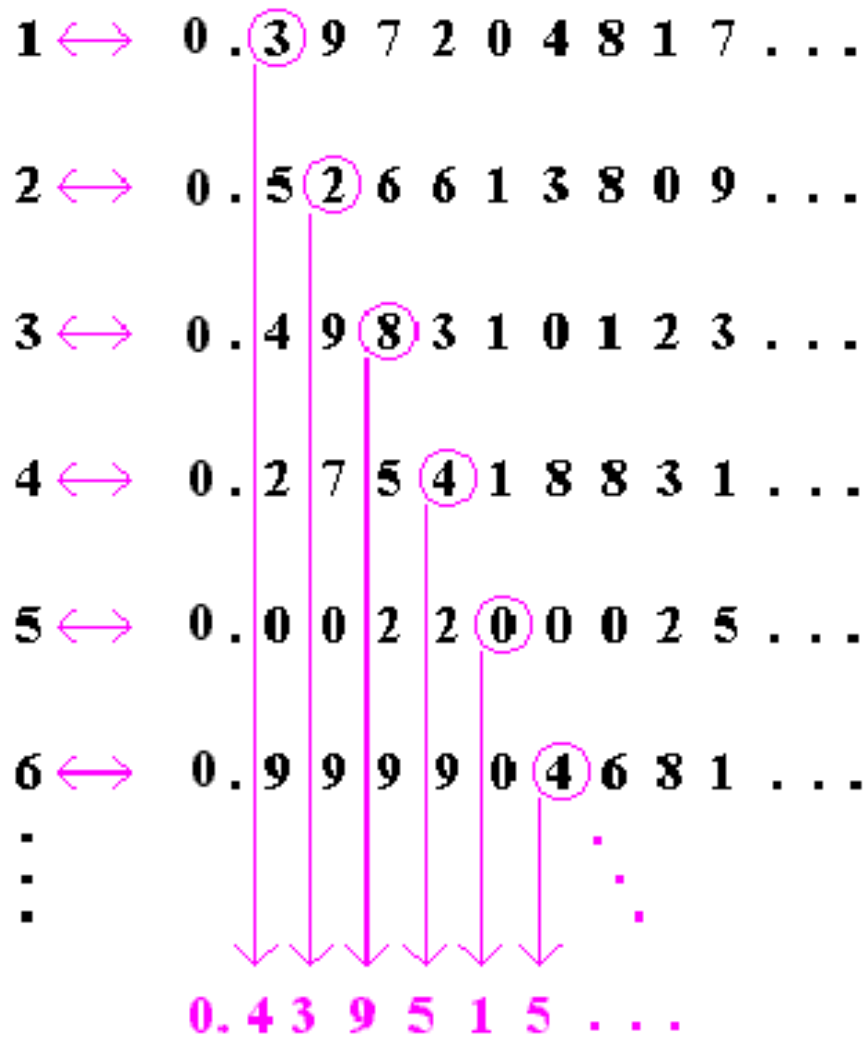
Vamos supor que seja possível enumerar os números reais entre 0 e 1.

Vamos supor que seja possível associar um a um os números reais entre 0 e 1 com o conjunto dos naturais (não precisam estar em ordem).

1 ↔	0. 3 9 7 2 0 4 8 1 7 . . .
2 ↔	0. 5 2 6 6 1 3 8 0 9 . . .
3 ↔	0. 4 9 8 3 1 0 1 2 3 . . .
4 ↔	0. 2 7 5 4 1 8 8 3 1 . . .
5 ↔	0. 0 0 2 2 0 0 0 2 5 . . .
6 ↔	0. 9 9 9 9 0 4 6 8 1 . . .
.	
.	
.	

Podemos tomar o primeiro algarismo decimal do primeiro número, o segundo do segundo e assim por diante, e tomar um algarismo diferente para cada um.

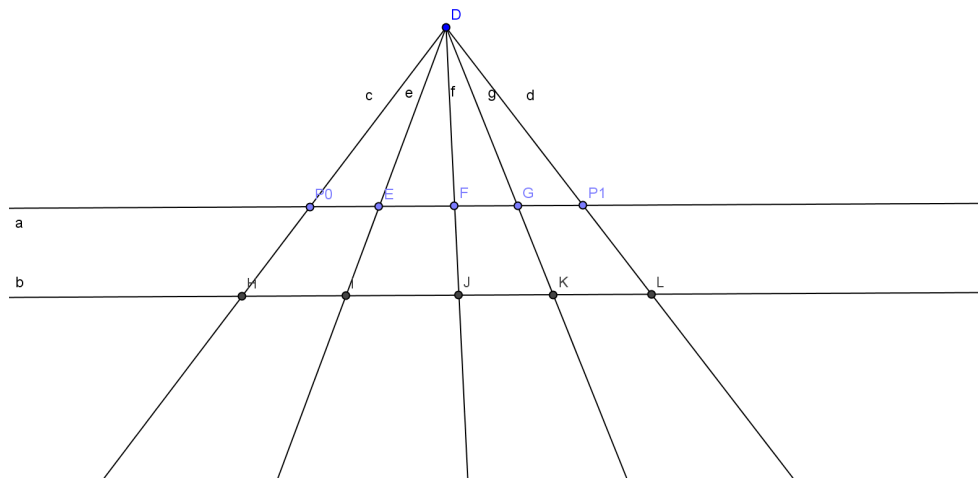




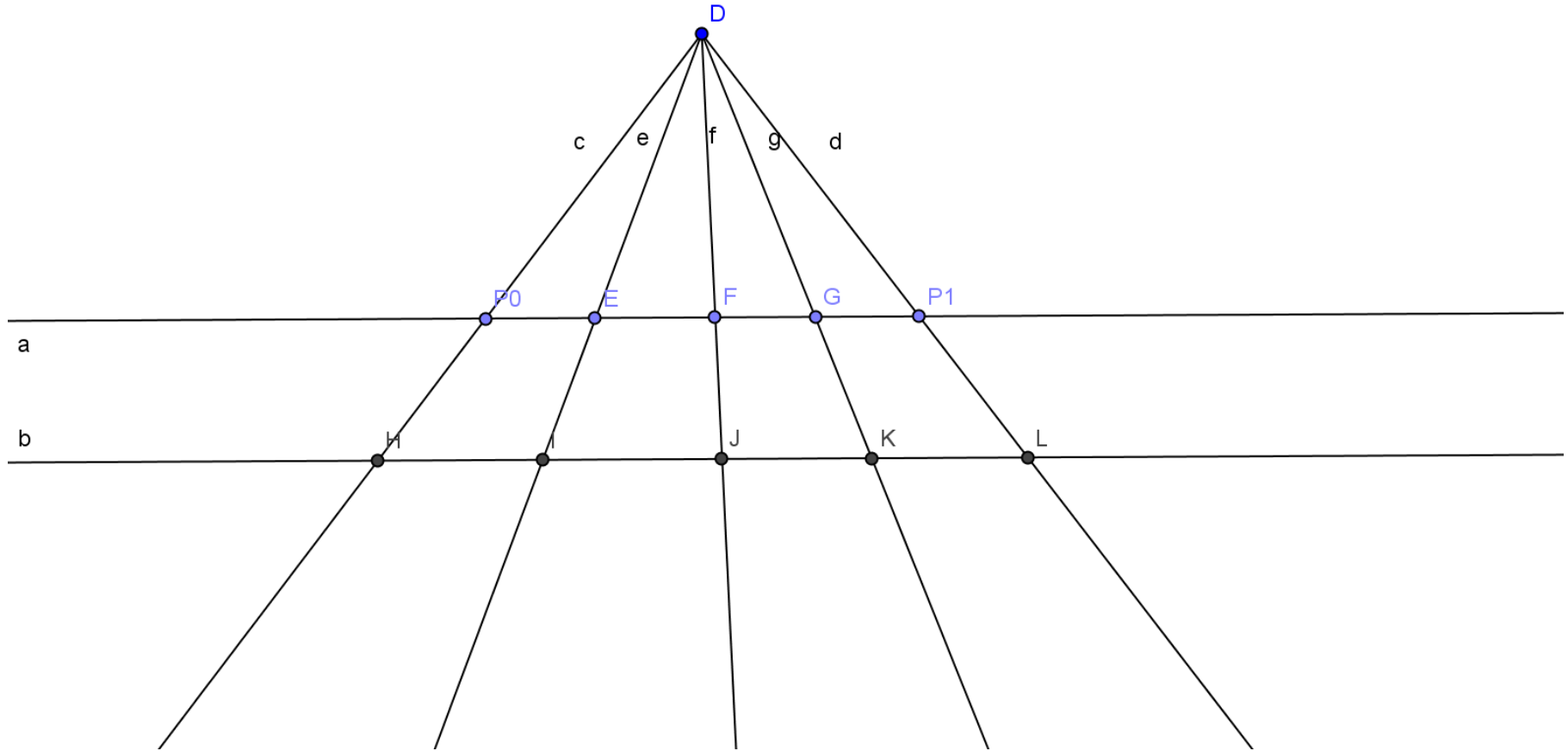
O número resultante não estava no conjunto original, pois tem pelo menos um algarismo diferentes de todos os demais!

Assim, o conjunto dos reais entre 0 e 1 é não-enumerável. O infinito real é “maior” que o infinito natural, é de outra natureza!

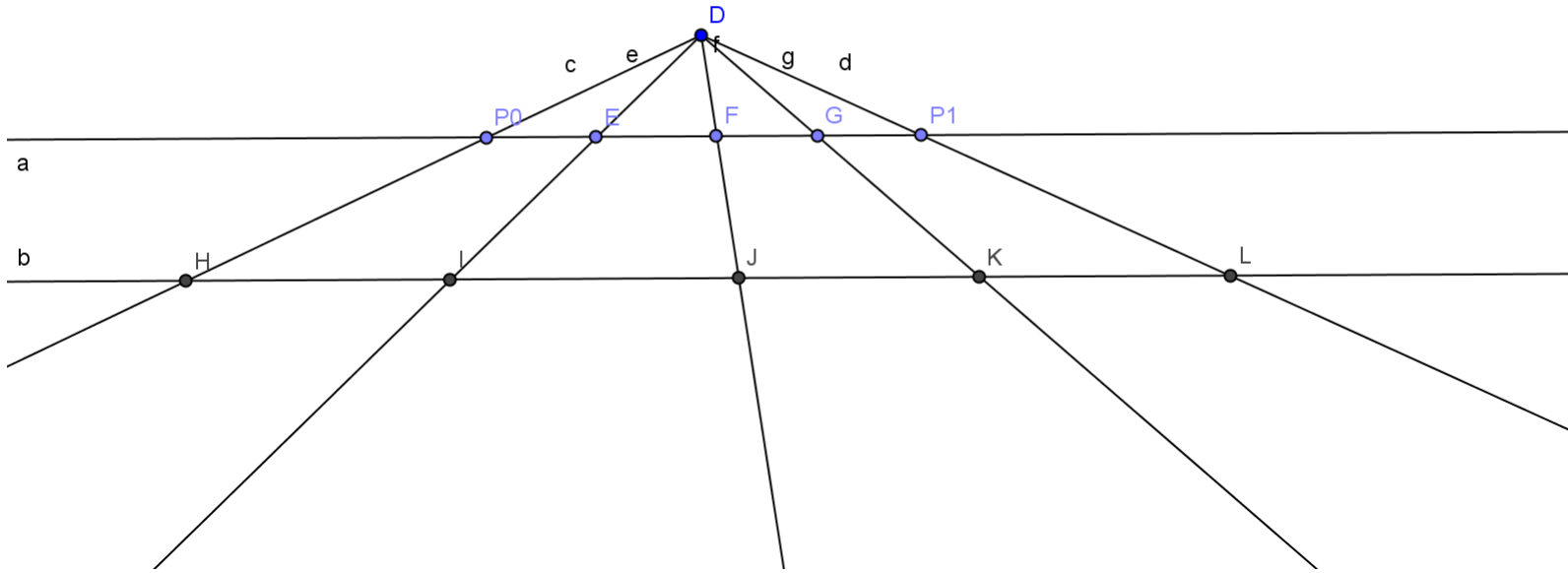
O pior é que qualquer segmento da reta real tem a mesma cardinalidade da reta real inteira...



Um ponto projeta os pontos do intervalo na reta real inteira.



Um ponto projeta os pontos do intervalo na reta real inteira.



A Hipótese do Contínuo de Cantor, que ainda não foi provada e talvez não possa ser provada, tem como implicação que a reta real é contínua. Não faltam pontos.

Ou seja, os números reais preenchem todo o espaço!

Vamos ver como isso faz sentido.

Tomemos um número real, não racional, bem conhecido. Por exemplo, o número π já foi expresso em até 10 trilhões de dígitos.

3.141592653589793238462643
3832795028841971693993751
0582097494459230781640628
6208998628034825342117067
9821480865132823066470938
4460955058223172535940812
8481117450284102701938521
1055596446229489549303819
6442881097566593344612847

