4.9 Exercícios

1–22 Encontre a primitiva mais geral de cada uma das seguintes funções. (Verifique sua resposta derivando.)

1. $f(x) = x - 3$
2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$
3. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{5}x^3$
4. $f(x) = 8x^9 - 3x^6 + 12x^3$
5. $f(x) = (x + 1)(2x - 1)$
6. $f(x) = x(2 - x)^2$
7. $f(x) = 7x^{2/5} + 8x^{-4/5}$
8. $f(x) = x^{3,4} - 2x^{\sqrt{2}-1}$
9. $f(x) = \sqrt{2}$
10. $f(x) = e^2$
11. $f(x) = 3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}$
12. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + x\sqrt{x}$
13. $f(x) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{x}$
14. $f(t) = \dfrac{3t^4 - t^3 + 6t^2}{t^4}$
15. $g(t) = \dfrac{1 + t + t^2}{\sqrt{t}}$
16. $r(\theta) = \sec\theta \ \mathrm{tg}\,\theta - 2e^\theta$
17. $h(\theta) = 2\,\mathrm{sen}\,\theta - \sec^2\theta$
18. $f(t) = \mathrm{sen}\,t + 2\,\mathrm{senh}\,t$
19. $f(x) = 5e^x - 3\cosh x$
20. $f(x) = 2\sqrt{x} + 6\cos x$
21. $f(x) = \dfrac{x^5 - x^3 + 2x}{x^4}$
22. $f(x) = \dfrac{2 + x^2}{1 + x^2}$

23–24 Encontre a primitiva F de f que satisfaça a condição dada. Verifique sua resposta comparando os gráficos de f e F.

23. $f(x) = 5x^4 - 2x^5, \quad F(0) = 4$
24. $f(x) = 4 - 3(1 + x^2)^{-1}, \quad F(1) = 0$

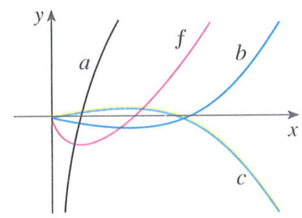
25–48 Encontre f.

25. $f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x$
26. $f''(x) = x^6 - 4x^4 + x + 1$
27. $f''(x) = \frac{2}{3}x^{2/3}$
28. $f''(x) = 6x + \mathrm{sen}\,x$
29. $f'''(t) = \cos t$
30. $f'''(t) = e^t + t^{-4}$
31. $f'(x) = 1 + 3\sqrt{x}, \quad f(4) = 25$
32. $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 4, \quad f(-1) = 2$
33. $f'(t) = 4/(1 + t^2), \quad f(1) = 0$
34. $f'(t) = t + 1/t^3, \quad t > 0, \quad f(1) = 6$
35. $f'(t) = 2\cos t + \sec^2 t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2, \quad f(\pi/3) = 4$
36. $f'(x) = (x^2 - 1)/x, \quad f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(-1) = 0$
37. $f'(x) = x^{-1/3}, \quad f(1) = 1, \quad f(-1) = -1$
38. $f'(x) = 4/\sqrt{1 - x^2}, \quad f(\frac{1}{2}) = 1$
39. $f''(x) = -2 + 12x - 12x^2, \quad f(0) = 4, \quad f'(0) = 12$
40. $f''(x) = 8x^3 + 5, \quad f(1) = 0, \quad f'(1) = 8$
41. $f''(\theta) = \mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta, \quad f(0) = 3, \quad f'(0) = 4$
42. $f''(t) = 3/\sqrt{t}, \quad f(4) = 20, \quad f'(4) = 7$
43. $f''(x) = 4 + 6x + 24x^2, \quad f(0) = 3, \quad f(1) = 10$
44. $f''(x) = x^3 + \mathrm{senh}\,x, \quad f(0) = 1, \quad f(2) = 2{,}6$
45. $f''(x) = 2 + \cos x, \quad f(0) = -1, \quad f(\pi/2) = 0$
46. $f''(t) = 2e^t + 3\,\mathrm{sen}\,t, \quad f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0$
47. $f''(x) = x^{-2}, \quad x > 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0$
48. $f'''(x) = \cos x, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2, \quad f''(0) = 3$

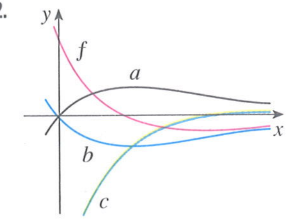
49. Dado que o gráfico de f passa pelo ponto $(1, 6)$ e que a inclinação de sua reta tangente em $(x, f(x))$ é $2x + 1$, encontre $f(2)$.
50. Encontre uma função f tal que $f'(x) = x^3$ e tal que a reta $x + y = 0$ seja tangente ao gráfico de f.

51–52 O gráfico de uma função f está mostrado. Qual gráfico é uma primitiva de f e por quê?

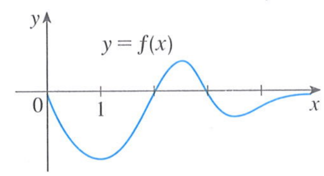
51.



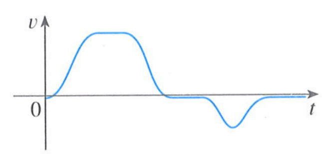
52.



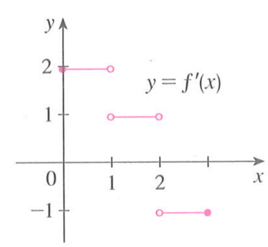
53. O gráfico de uma função está mostrado na figura. Faça um esboço de uma primitiva de F, dado que $F(0) = 1$.



54. O gráfico da função velocidade de um carro está mostrado na figura. Esboce o gráfico da função posição.



55. O gráfico de uma função f' está mostrado na figura. Esboce um gráfico de f se f for contínua e $f(0) = -1$.



56. (a) Use uma ferramenta gráfica para construir o gráfico de $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$.
(b) Começando com o gráfico da parte (a), esboce um gráfico da primitiva F que satisfaça $F(0) = 1$.
(c) Use as regras desta seção para achar uma expressão para $F(x)$.
(d) Faça o gráfico de F usando a expressão da parte (c). Compare com seu esboço da parte (b).

57–58 Trace um gráfico de f e use-o para fazer um esboço da primitiva que passe pela origem.

57. $f(x) = \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{1 + x^2}, \quad -2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

58. $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 2} - 2, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$

59–64 Uma partícula move-se de acordo com os dados a seguir. Encontre a posição da partícula.

59. $v(t) = \operatorname{sen} t - \cos t, \quad s(0) = 0$

60. $v(t) = 1{,}5\sqrt{t}, \quad s(4) = 10$

61. $a(t) = 2t + 1, \quad s(0) = 3, \quad v(0) = -2$

62. $a(t) = 3\cos t - 2\operatorname{sen} t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 4$

63. $a(t) = 10\operatorname{sen} t + 3\cos t, \quad s(0) = 0, \quad s(2\pi) = 12$

64. $a(t) = t^2 - 4t + 6, \quad s(0) = 0, \quad s(1) = 20$

65. Uma pedra é largada de um posto de observação da Torre CN, 450 m acima do solo.
   (a) Determine a distância da pedra acima do nível do solo no instante t.
   (b) Quanto tempo leva para a pedra atingir o solo?
   (c) Com que velocidade ela atinge o solo?
   (d) Se a pedra for atirada para baixo com uma velocidade de 5 m/s, quanto tempo levará para que atinja o solo?

66. Mostre que, para um movimento em uma reta com aceleração constante a, velocidade inicial v_0 e deslocamento inicial s_0, o deslocamento depois de um tempo t é

$$s = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

67. Um objeto é lançado para cima com velocidade inicial v_0 metros por segundo a partir de um ponto s_0 metros acima do solo. Mostre que

$$[v(t)]^2 = v_0^2 - 19{,}6[s(t) - s_0]$$

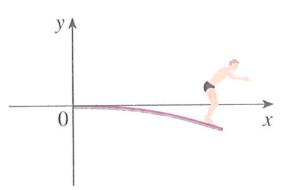
68. Duas bolas são arremessadas para cima à margem do penhasco no Exemplo 7. A primeira é arremessada com uma velocidade de 15 m/s, e a outra é arremessada 1 segundo depois, com uma velocidade de 8 m/s. As bolas passam uma pela outra alguma vez?

69. Uma pedra é largada de um penhasco e atinge o solo com uma velocidade de 40 m/s. Qual a altura do penhasco?

70. Se um mergulhador de massa m permanece na ponta de um trampolim de comprimento L e densidade linear ρ, o trampolim toma a forma da curva $y = f(x)$, em que

$$EIy'' = mg(L - x) + \tfrac{1}{2}\rho g(L - x)^2$$

E e I são constantes positivas que dependem do material do trampolim e g (< 0) é a aceleração da gravidade.
   (a) Encontre uma expressão para a forma da curva.
   (b) Use $f(L)$ para estimar a distância da horizontal à ponta do trampolim.



71. Uma companhia estima que o custo marginal (em dólares por item) de produzir x itens é $1{,}92 - 0{,}002x$. Se o custo de produzir um item for \$ 562, encontre o custo de produzir 100 itens.

72. A densidade linear de um cabo de comprimento de 1 m é dado por $\rho(x) = 1/\sqrt{x}$, em gramas por centímetro, onde x é medido em centímetros a partir da extremidade do cabo. Encontre a massa do cabo.

73. Uma vez que pingos de chuva crescem à medida que caem, sua área superficial cresce e, portanto, a resistência à sua queda aumenta. Um pingo de chuva tem uma velocidade inicial para baixo de 10 m/s e sua aceleração para baixo é

$$a = \begin{cases} 9 - 0{,}9t & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 10 \\ 0 & \text{se } t > 10 \end{cases}$$

Se o pingo de chuva estiver inicialmente a 500 m acima do solo, quanto tempo ele levará para cair?

74. Um carro está viajando a 80 km/h quando seu condutor freia completamente, produzindo uma desaceleração constante de 7 m/s². Qual a distância percorrida antes de o carro parar?

75. Qual a aceleração necessária para aumentar a velocidade de um carro a 50 km/h para 80 km/h em 5 s?

76. Um carro é freado com uma desaceleração constante de 5m/s², produzindo marcas de frenagem medindo 60 m antes de parar completamente. Quão rápido estava o carro viajando quando o freio foi acionado pela primeira vez?

77. Um carro está viajando a 100 km/h quando o motorista vê um acidente 80 m adiante e pisa no freio. Qual desaceleração constante é necessária para parar o carro em tempo de evitar a batida?

78. Um modelo de foguete é lançado para cima a partir do repouso. Sua aceleração para os três primeiros segundos é $a(t) = 18t$, e nesse ínterim o combustível acaba, e ele se transforma em um corpo em queda livre. Após 14 s o paraquedas do foguete se abre, e a velocidade (para baixo) diminui linearmente para $-5{,}5$ m/s em 5 segundos. O foguete então cai até o solo naquela taxa.
   (a) Determine a função posição s e a função velocidade v (para todo instante t). Esboce os gráficos de s e v.
   (b) Em que instante o foguete atingiu sua altura máxima e qual é essa altura?
   (c) Em que instante o foguete atinge a terra?

79. Um trem-bala de alta velocidade acelera e desacelera a uma taxa de 1,2 m/s². Sua velocidade máxima é de 145 km/h.
   (a) Qual será a distância máxima percorrida pelo trem se ele acelerar a partir do repouso até atingir a velocidade de cruzeiro e permanecer nessa velocidade por 15 minutos?
   (b) Suponha que o trem comece a partir do repouso e então pare completamente em 15 minutos. Que distância máxima ele poderá percorrer nessas condições?
   (c) Encontre o tempo mínimo para o trem viajar entre duas estações consecutivas, distantes 72 km uma da outra.
   (d) A viagem de uma estação para outra leva 37,5 minutos. Qual a distância entre as estações?

é $L_6 = 342$, que é nossa estimativa inicial para a distância total percorrida.

Em geral, suponha que o objeto se mova com velocidade $v = f(t)$, em que $a \leqslant t \leqslant b$ e $f(t) \geqslant 0$ (logo, o objeto move-se sempre no sentido positivo). Vamos registrar as velocidades nos instantes $t_0 (= a), t_1, t_2, \ldots, t_n (= b)$, de forma que a velocidade seja aproximadamente constante em cada subintervalo. Se esses tempos forem igualmente espaçados, então entre duas leituras consecutivas temos o período de tempo $\Delta t = (b - a)/n$. Durante o primeiro intervalo de tempo a velocidade é aproximadamente $f(t_0)$ e, portanto, a distância percorrida é de aproximadamente $f(t_0)\,\Delta t$. Analogamente, a distância percorrida durante o segundo intervalo de tempo é de cerca de $f(t_1)\,\Delta t$ e a distância total percorrida durante o intervalo de tempo $[a, b]$ é de aproximadamente

$$f(t_0)\,\Delta t + f(t_1)\,\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t.$$

Se usarmos as velocidades nas extremidades direitas em vez de nas extremidades esquerdas, nossa estimativa para a distância total ficará

$$f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t.$$

Quanto mais frequentemente medirmos a velocidade, mais precisa será nossa estimativa, então parece plausível que a distância *exata* d percorrida é o *limite* de tais expressões:

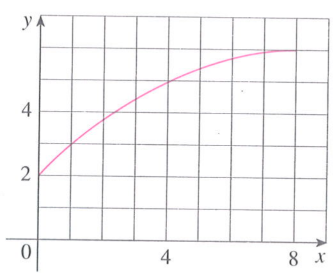
$$\boxed{5} \qquad d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t.$$

Veremos na Seção 5.4 que isso é realmente verdadeiro.

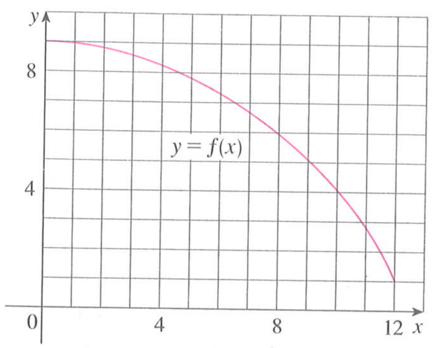
Como a Equação 5 tem a mesma forma que nossas expressões para a área nas Equações 2 e 3, segue que a distância percorrida é igual à área sob o gráfico da função velocidade. No Capítulo 6 veremos que outras quantidades de interesse nas ciências naturais e sociais — tais como o trabalho realizado por uma força variável ou a saída de sangue do coração — podem também ser interpretadas como a área sob uma curva. Logo, ao calcular áreas neste capítulo, tenha em mente que elas podem ser interpretadas de várias formas práticas.

5.1 Exercícios

1. (a) Lendo os valores do gráfico dado de f, utilize quatro retângulos para encontrar as estimativas inferior e superior para a área sob o gráfico dado de f de $x = 0$ até $x = 8$. Em cada caso, esboce os retângulos que você usar.
   (b) Encontre novas estimativas, usando oito retângulos em cada caso.



2. (a) Use seis retângulos para achar estimativas de cada tipo para a área sob o gráfico dado de f de $x = 0$ até $x = 12$.
   (i) L_6 (pontos amostrais são extremidades esquerdas)
   (ii) R_6 (pontos amostrais são extremidades direitas)
   (iii) M_6 (pontos amostrais são pontos médios)
   (b) L_6 é uma subestimativa ou superestimativa em relação à área verdadeira?
   (c) R_6 é uma subestimativa ou superestimativa em relação à área verdadeira?
   (d) Entre os números L_6, R_6 ou M_6, qual fornece a melhor estimativa? Explique.



É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

3. (a) Estime a área sob o gráfico $f(x) = \cos x$ de $x = 0$ até $x = \pi/2$ usando quatro retângulos aproximantes e extremidades direitas. Esboce o gráfico e os retângulos. Sua estimativa é uma subestimativa ou uma superestimativa?
(b) Repita a parte (a) usando extremidades esquerdas.

4. (a) Estime a área sob o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ de $x = 0$ até $x = 4$ usando quatro retângulos aproximantes e extremidades direitas. Esboce o gráfico e os retângulos. Sua estimativa é uma subestimativa ou uma superestimativa?
(b) Repita a parte (a) usando extremidades esquerdas.

5. (a) Estime a área sob o gráfico $f(x) = 1 + x^2$ de $x = -1$ até $x = 2$ usando três retângulos aproximantes e extremidades direitas. Então, aperfeiçoe sua estimativa utilizando seis retângulos aproximantes. Esboce a curva e os retângulos aproximantes.
(b) Repita a parte (a) usando extremidades esquerdas.
(c) Repita a parte (a) empregando os pontos médios.
(d) A partir de seus esboços das partes (a), (b) e (c), qual parece ser a melhor estimativa?

6. (a) Faça o gráfico da função

$$f(x) = x - 2\ln x,\ 1 \leqslant x \leqslant 5$$

(b) Estime a área sob o gráfico de f usando quatro retângulos aproximantes e tomando como pontos amostrais (i) as extremidades direitas e (ii) os pontos médios. Em cada caso, esboce a curva e os retângulos.
(c) Aperfeiçoe suas estimativas da parte (b) usando oito retângulos.

7. Avalie as somas superiores e inferiores para $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, com $n = 2, 4$, e 8. Ilustre com diagramas como na Figura 14.

8. Avalie as somas superiores e inferiores para $f(x) = 1 + x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, com $n = 3$ e 4. Ilustre com diagramas como na Figura 14.

9–10 Com uma calculadora programável (ou um computador), é possível calcular as expressões para a soma das áreas de retângulos aproximantes, mesmo para valores grandes de n, usando *laços*. (Numa TI use o comando Is > ou um laço For-EndFor, numa Casio use Isz, numa HP ou no BASIC use um laço FOR-NEXT.) Calcule a soma das áreas dos retângulos aproximantes usando subintervalos iguais e extremidades direitas para $n = 10, 30, 50$ e 100. Então, conjecture o valor exato da área.

9. A região sob $y = x^4$ de 0 até 1.

10. A região sob $y = \cos x$ de 0 até $\pi/2$.

SCA **11.** Alguns sistemas de computação algébrica têm comandos que traçam retângulos aproximantes e calculam as somas de suas áreas, pelo menos se x_i^* for uma extremidade esquerda ou direita. (Por exemplo, no Maple use `leftbox`, `rightbox`, `leftsum` e `rightsum`.)
(a) Se $f(x) = 1/(x^2 + 1)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, encontre as somas esquerda e direita para $n = 10, 30$ e 50.
(b) Ilustre fazendo o gráfico dos retângulos da parte (a).
(c) Mostre que a área exata sob f está entre 0,780 e 0,791.

SCA **12.** (a) Se $f(x) = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, use os comandos discutidos no Exercício 11 para encontrar as somas esquerda e direita para $n = 10, 30$ e 50.
(b) Ilustre fazendo o gráfico dos retângulos da parte (a).
(c) Mostre que a área exata sob f está entre 2,50 e 2,59.

13. A velocidade de um corredor aumenta regularmente durante os três primeiros segundos de uma corrida. Sua velocidade em intervalos de meio segundo é dada em uma tabela. Encontre as estimativas superior e inferior para a distância que ele percorreu durante esses três segundos.

t (s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
v (m/s)	0	1,9	3,3	4,5	5,5	5,9	6,2

14. A leitura do velocímetro de uma motocicleta em intervalos de 12 segundos é mostrada na tabela a seguir.
(a) Estime a distância percorrida pela motocicleta durante esse período, usando a velocidade no começo dos intervalos de tempo.
(b) Dê outra estimativa utilizando a velocidade no fim dos intervalos de tempo.
(c) As estimativas feitas nas partes (a) e (b) são estimativas superior e inferior? Explique.

t (s)	0	12	24	36	48	60
v (m/s)	9,1	8,5	7,6	6,7	7,3	8,2

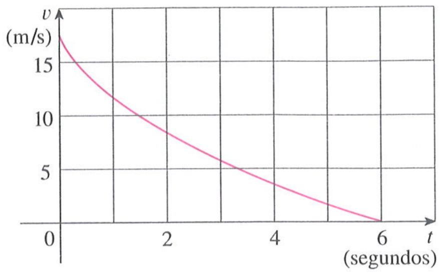
15. Óleo vaza de um tanque a uma taxa de $r(t)$ litros por hora. A taxa decresce à medida que o tempo passa e os valores da taxa em intervalos de duas horas são mostrados na tabela a seguir. Encontre estimativas superior e inferior para a quantidade total de óleo que vazou.

t (h)	0	2	4	6	8	10
$r(t)$ (L/h)	8,7	7,6	6,8	6,2	5,7	5,3

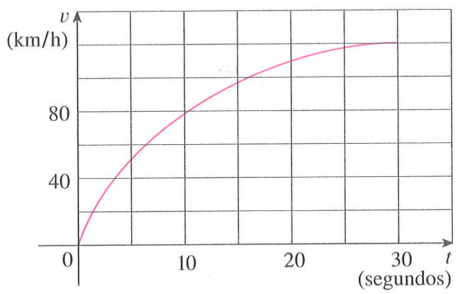
16. Quando estimamos distâncias a partir dos dados da velocidade, algumas vezes é necessário usar tempos $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$ que não estão igualmente espaçados. Podemos ainda estimar as distâncias usando os períodos de tempo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Por exemplo, em 7 de maio de 1992, o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49, cujo propósito era instalar o satélite de comunicação Intelsat. A tabela, fornecida pela Nasa, mostra os dados da velocidade do ônibus entre o lançamento e a entrada em funcionamento dos foguetes auxiliares. Use estes dados para estimar a altura acima da superfície da Terra do *Endeavour* 62 segundos depois do lançamento.

Evento	Tempo (s)	Velocidade (m/s)
Lançamento	0	0
Começo da manobra de inclinação	10	56
Fim da manobra de inclinação	15	97
Regulador de combustível a 89%	20	136
Regulador de combustível a 67%	32	226
Regulador de pressão a 104%	59	404
Pressão dinâmica máxima	62	440
Separação dos foguetes auxiliares	125	1.265

17. O gráfico da velocidade de um carro freando é mostrado. Use-o para estimar a distância percorrida pelo carro enquanto os freios estão sendo aplicados.



18. O gráfico da velocidade de um carro em aceleração a partir do repouso até uma velocidade de 120 km/h em um período de 30 segundos é mostrado. Estime a distância percorrida durante esse período.



19–21 Use a Definição 2 para achar uma expressão para a área sob o gráfico de f como um limite. Não calcule o limite.

19. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3$

20. $f(x) = x^2 + \sqrt{1 + 2x}, \quad 4 \leqslant x \leqslant 7$

21. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

22–23 Determine uma região cuja área seja igual ao limite dado. Não calcule o limite.

22. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(5 + \frac{2i}{n}\right)^{10}$

23. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{4n} \operatorname{tg} \frac{i\pi}{4n}$

24. (a) Utilize a Definição 2 para encontrar uma expressão para a área sob a curva $y = x^3$ de 0 a 1 como um limite.
(b) A fórmula a seguir para a soma dos cubos dos primeiros n inteiros está demonstrada no Apêndice E. Use-a para calcular o limite da parte (a).

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

25. Seja A a área sob o gráfico de uma função contínua crescente f de a até b, e sejam L_n e R_n as aproximações para A com n subintervalos usando extremidades esquerdas e direitas, respectivamente.
(a) Como A, L_n e R_n estão relacionados?
(b) Mostre que

$$R_n - L_n = \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$$

Então, desenhe um diagrama para ilustrar essa equação, mostrando que n retângulos representando $R_n - L_n$ podem ser reunidos num único retângulo cuja área é o lado direito da equação.
(c) Deduza que

$$R_n - A < \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$$

26. Se A é a área sob a curva $y = e^x$ de 1 a 3, use o Exercício 25 para encontrar um valor de n tal que $R_n - A < 0{,}0001$.

SCA **27.** (a) Expresse a área sob a curva $y = x^5$ de 0 até 2 como um limite.
(b) Use um sistema de computação algébrica para encontrar a soma em sua expressão da parte (a).
(c) Calcule o limite da parte (a).

SCA **28.** Encontre a área exata da região sob o gráfico de $y = e^{-x}$ de 0 até 2 usando um sistema de computação algébrica para calcular a soma e então o limite no Exemplo 3(a). Compare sua resposta com a estimativa obtida no Exemplo 3(b).

SCA **29.** Encontre a área exata sob a curva cosseno $y = \cos x$ de $x = 0$ até $x = b$, onde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$. (Use um sistema de computação algébrica para calcular a soma e o limite.) Em particular, qual é a área, se $b = \pi/2$?

30. (a) Seja A_n a área de um polígono com n lados iguais inscrito num círculo com raio r. Dividindo o polígono em n triângulos congruentes com ângulo central de $2\pi/n$, mostre que

$$A_n = \tfrac{1}{2} n r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

(b) Mostre que $\lim_{n \to \infty} A_n = \pi r^2$. [*Dica:* Use a Equação 3.3.2.]

A Propriedade 8 é útil quando tudo o que queremos é uma estimativa grosseira do tamanho de uma integral sem nos preocupar com o uso da Regra do Ponto Médio.

EXEMPLO 8 Use a Propriedade 8 para estimar o valor de $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

SOLUÇÃO Uma vez que $f(x) = e^{-x^2}$ é uma função decrescente no intervalo $[0, 1]$, seu máximo absoluto é $M = f(0) = 1$ e seu mínimo absoluto é $m = f(1) = e^{-1}$. Assim, utilizando a Propriedade 8,

$$e^{-1}(1-0) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1(1-0)$$

ou

$$e^{-1} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

Como $e^{-1} \approx 0{,}3679$, podemos escrever

$$0{,}367 \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

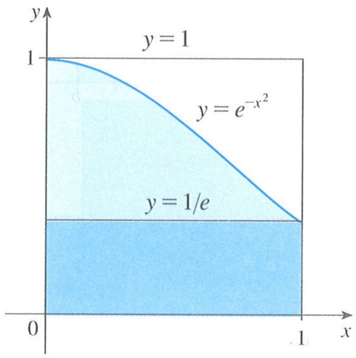


FIGURA 17

O resultado do Exemplo 8 está ilustrado na Figura 17. A integral é maior que a área do retângulo inferior e menor que a área do quadrado.

5.2 Exercícios

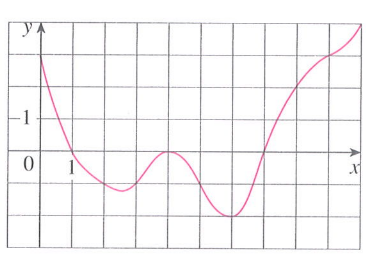
1. Calcule a soma de Riemann para $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$, $2 \leqslant x \leqslant 14$, com seis subintervalos, tomando os pontos amostrais como as extremidades esquerdas. Explique, com a ajuda de um diagrama, o que representa a soma de Riemann.

2. Se $f(x) = x^2 - 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, calcule a soma de Riemann com $n = 6$, tomando como pontos amostrais as extremidades direitas. O que representa a soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

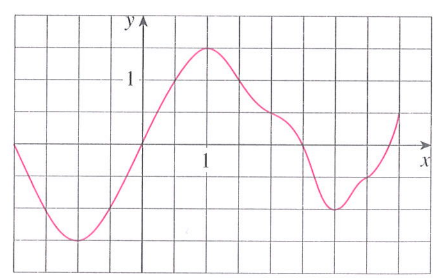
3. Se $f(x) = e^x - 2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, calcule a soma de Riemann com $n = 4$ correta até a sexta casa decimal, tomando como pontos amostrais os pontos médios. O que representa a soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

4. (a) Calcule a soma de Riemann para $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$ e com seis termos, tomando os pontos amostrais como as extremidades direitas. (Dê a resposta correta até a sexta casa decimal). Explique o que a soma de Riemann representa com a ajuda de um esboço.
   (b) Repita a parte (a) tomando como pontos amostrais os pontos médios.

5. É dado o gráfico de uma função f. Estime $\int_0^{10} f(x)\,dx$ usando cinco subintervalos com (a) extremidades direitas, (b) extremidades esquerdas e (c) pontos médios.



6. O gráfico de g é apresentado. Estime $\int_{-2}^{4} g(x)\,dx$ com seis subintervalos usando (a) extremidades direitas, (b) extremidades esquerdas e (c) pontos médios.



7. Uma tabela de valores de uma função crescente f é dada. Use a tabela para encontrar uma estimativa inferior e superior para $\int_0^{25} f(x)\,dx$.

x	0	5	10	15	20	25
$f(x)$	-42	-37	-25	-6	15	36

8. A tabela fornece os valores de uma função obtidos experimentalmente. Use-os para estimar $\int_3^9 f(x)\,dx$ utilizando três subintervalos iguais com (a) extremidades direitas, (b) extremidades esquerdas e (c) pontos médios. Se for sabido que a função é decrescente, você pode dizer se suas estimativas são menores ou maiores que o valor exato da integral?

x	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	$-3{,}4$	$-2{,}1$	$-0{,}6$	0,3	0,9	1,4	1,8

9–12 Use a Regra do Ponto Médio com o valor dado n para aproximar a integral. Arredonde cada resposta para quatro casas decimais.

9. $\int_0^8 \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx, \quad n = 4$

10. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx, \quad n = 4$

11. $\int_0^2 \dfrac{x}{x+1}\,dx, \quad n = 5$

12. $\int_1^5 x^2 e^{-x}\,dx, \quad n = 4$

SCA **13.** Se você tiver um SCA que possa calcular aproximações usando pontos médios e esboçar os retângulos correspondentes (use os comandos `RiemannSum` ou `middlesum` e `middlebox` no Maple), verifique a resposta do Exercício 11 e ilustre com um gráfico. Repita então com $n = 10$ e $n = 20$.

14. Com uma calculadora programável ou computador (veja as instruções para o Exercício 9 da Seção 5.1), calcule as somas de Riemann esquerda e direita para a função $f(x) = x/(x+1)$ no intervalo $[0, 2]$ com $n = 100$. Explique por que essas estimativas mostram que

$$0{,}8946 < \int_0^2 \frac{x}{x+1}\,dx < 0{,}9081.$$

15. Use uma calculadora ou um computador para fazer uma tabela dos valores das somas R_n de Riemann à direita para a integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ com $n = 5, 10, 50$ e 100. De qual valor esses números parecem estar se aproximando?

16. Use uma calculadora ou um computador para fazer uma tabela dos valores das somas L_n e R_n de Riemann à esquerda e à direita para a integral $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$ com $n = 5, 10, 50$ e 100. Entre quais dois números o valor da integral deve ficar? Você pode fazer uma afirmação análoga para a integral $\int_{-1}^2 e^{-x^2}\,dx$? Explique.

17–20 Expresse o limite como uma integral definida no intervalo dado.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \ln(1 + x_i^2)\,\Delta x, \quad [2, 6]$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\cos x_i}{x_i}\,\Delta x, \quad [\pi, 2\pi]$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} [5(x_i^*)^3 - 4x_i^*]\,\Delta x, \quad [2, 7]$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^*}{(x_i^*)^2 + 4}\,\Delta x, \quad [1, 3]$

21–25 Use a forma da definição de integral dada no Teorema 4 para calcular a integral.

21. $\int_{-1}^5 (1 + 3x)\,dx$

22. $\int_1^4 (x^2 + 2x - 5)\,dx$

23. $\int_{-2}^0 (x^2 + x)\,dx$

24. $\int_0^2 (2x - x^3)\,dx$

25. $\int_0^1 (x^3 - 3x^2)\,dx$

26. (a) Encontre uma aproximação para a integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)\,dx$ usando uma soma de Riemann com as extremidades direitas e $n = 8$.

(b) Faça um diagrama como a Figura 3 para ilustrar a aproximação da parte (a).

(c) Use o Teorema 4 para calcular $\int_0^4 (x^2 - 3x)\,dx$.

(d) Interprete a integral da parte (c) como uma diferença de áreas e ilustre com diagramas como o da Figura 4.

27. Demonstre que $\int_a^b x\,dx = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$.

28. Demonstre que $\int_a^b x^2\,dx = \dfrac{b^3 - a^3}{3}$.

29–30 Expresse a integral como um limite de somas. Não calcule o limite.

29. $\int_2^6 \dfrac{x}{1 + x^5}\,dx$

30. $\int_1^{10} (x - 4\ln x)\,dx$

SCA **31–32** Expresse a integral como um limite de somas. Depois, calcule, usando um sistema de computação algébrica para encontrar a soma e o limite.

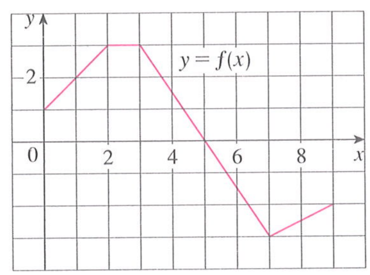
31. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 5x\,dx$

32. $\int_2^{10} x^6\,dx$

33. É dado o gráfico de f. Calcule cada integral interpretando-a em termos das áreas.

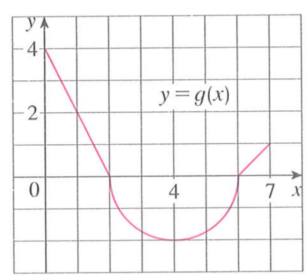
(a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ (b) $\int_0^5 f(x)\,dx$

(c) $\int_5^7 f(x)\,dx$ (d) $\int_0^9 f(x)\,dx$



34. O gráfico de g consiste em duas retas e um semicírculo. Use-o para calcular cada integral.

(a) $\int_0^2 g(x)\,dx$ (b) $\int_2^6 g(x)\,dx$ (c) $\int_0^7 g(x)\,dx$



35–40 Calcule a integral, interpretando-a em termos das áreas.

35. $\int_{-1}^2 (1 - x)\,dx$

36. $\int_0^9 \left(\tfrac{1}{3}x - 2\right)dx$

37. $\int_{-3}^0 \left(1 + \sqrt{9 - x^2}\right)dx$

38. $\int_{-5}^5 \left(x - \sqrt{25 - x^2}\right)dx$

39. $\int_{-1}^2 |x|\,dx$

40. $\int_0^{10} |x - 5|\,dx$

41. Calcule $\int_{\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx$.

42. Dado que $\int_0^1 3x\sqrt{x^2 + 4}\,dx = 5\sqrt{5} - 8$, o que é

$\int_1^0 3u\sqrt{u^2 + 4}\,du$?

43. No Exemplo 2 da Seção 5.1 mostramos que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Use esse fato e as propriedades das integrais para calcular $\int_0^1 (5 - 6x^2)\,dx$.

44. Use as propriedades das integrais e o resultado do Exemplo 3 para calcular $\int_1^3 (2e^x - 1)\,dx$.

45. Use o resultado do Exemplo 3 para calcular $\int_1^3 e^{x+2}\,dx$.

46. Use o resultado do Exercício 27 e o fato de que $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 1$ (do Exercício 29 na Seção 5.1), com as propriedades das integrais, para calcular $\int_0^{\pi/2} (2\cos x - 5x)\,dx$.

47. Escreva como uma integral única na forma $\int_a^b f(x)\,dx$:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{5} f(x)\,dx - \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$$

48. Se $\int_1^5 f(x)\,dx = 12$ e $\int_4^5 f(x)\,dx = 3{,}6$, encontre $\int_1^4 f(x)\,dx$.

49. Se $\int_0^9 f(x)\,dx = 37$ e $\int_0^9 g(x)\,dx = 16$, encontre $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\,dx$.

50. Encontre $\int_0^5 f(x)\,dx$ se

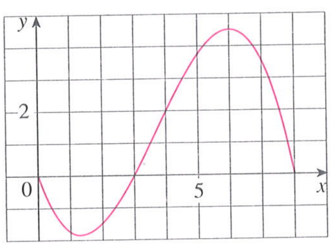
$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{para } x < 3 \\ x & \text{para } x \geqslant 3 \end{cases}$$

51. Para a função f cujo gráfico é mostrado, liste as seguintes quantidades em ordem crescente, do menor ao maior, e explique seu raciocínio.

(a) $\int_0^8 f(x)\,dx$ (b) $\int_0^3 f(x)\,dx$

(c) $\int_3^8 f(x)\,dx$ (d) $\int_4^8 f(x)\,dx$

(e) $f'(1)$

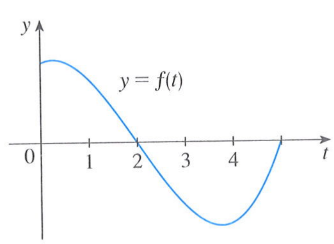


52. Se $F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$, em que f é a função cujo gráfico é dado, qual dos valores seguintes é o maior?

(a) $F(0)$ (b) $F(1)$

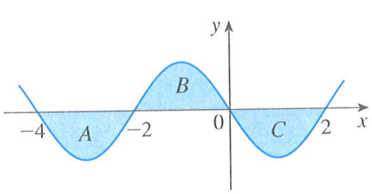
(c) $F(2)$ (d) $F(3)$

(e) $F(4)$



53. Cada uma das regiões A, B e C delimitadas pelo gráfico de f e o eixo x tem área 3. Encontre o valor de

$$\int_{-4}^{2} [f(x) + 2x + 5]\,dx$$



54. Suponha que f tenha um valor mínimo absoluto m e um valor máximo absoluto M. Entre quais dois valores $\int_0^2 f(x)\,dx$ deve ficar? Que propriedade das integrais lhe permitem tirar esta conclusão?

55–58 Use as propriedades das integrais para verificar a desigualdade sem calcular as integrais.

55. $\int_0^4 (x^2 - 4x + 4)\,dx \geqslant 0$

56. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x}\,dx$

57. $2 \leqslant \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + x^2}\,dx \leqslant 2\sqrt{2}$

58. $\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{24} \leqslant \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\,dx \leqslant \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{24}$

59–64 Use a Propriedade 8 para estimar o valor da integral.

59. $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

60. $\int_0^2 \dfrac{1}{1 + x^2}\,dx$

61. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg} x\,dx$

62. $\int_0^2 (x^3 - 3x + 3)\,dx$

63. $\int_0^2 xe^{-x}\,dx$

64. $\int_{\pi}^{2\pi} (x - 2\operatorname{sen} x)\,dx$

65–66 Use as propriedades das integrais, junto com os Exercícios 27 e 28, para demonstrar a desigualdade.

65. $\int_1^3 \sqrt{x^4 + 1}\,dx \geqslant \dfrac{26}{3}$

66. $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\,dx \leqslant \dfrac{\pi^2}{8}$

67. Demonstre a Propriedade 3 das integrais.

68. (a) Se f for contínua em $[a, b]$, mostre que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

[*Dica*: $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.]

(b) Use o resultado da parte (a) para mostrar que

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} 2x\,dx \right| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

69. Seja $f(x) = 0$ se x for um número racional qualquer e $f(x) = 1$ se x for um número irracional qualquer. Mostre que f não é integrável em $[0, 1]$.

70. Sejam $f(0) = 0$ e $f(x) = 1/x$ se $0 < x \leqslant 1$. Mostre que f não é integrável em $[0, 1]$. [*Dica*: mostre que o primeiro termo na soma de Riemann, $f(x_i^*)\,\Delta x$, pode ser tornado arbitrariamente grande.]

71–72 Expresse o limite como uma integral definida.

71. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^4}{n^5}$ [*Dica*: Considere $f(x) = x^4$.]

72. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + (i/n)^2}$

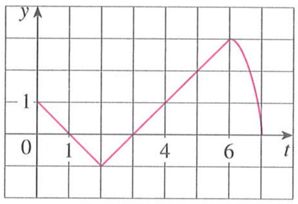
73 Encontre $\int_1^2 x^{-2}\,dx$. *Dica:* Escolha x_i^* como a média geométrica de x_{i-1} e x_i (isto é, $x_i^* = \sqrt{x_{i-1}x_i}$) e use a identidade

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$

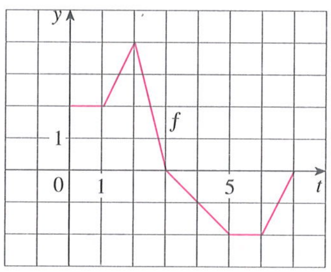
5.3 Exercícios

1. Explique exatamente o significado da afirmação "derivação e integração são processos inversos".

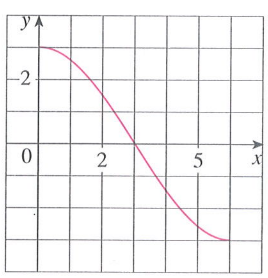
2. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, em que f é a função cujo gráfico é mostrado.
   (a) Calcule $g(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6.
   (b) Estime $g(7)$.
   (c) Onde g tem um valor máximo? Onde possui um valor mínimo?
   (d) Faça um esboço do gráfico de g.



3. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, em que f é a função cujo gráfico é mostrado.
   (a) Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ e $g(6)$.
   (b) Em que intervalos g está crescendo?
   (c) Onde g tem um valor máximo?
   (d) Faça um esboço do gráfico de g.



4. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, em que f é a função cujo gráfico é mostrado.
   (a) Calcule $g(0)$ e $g(6)$.
   (b) Estime $g(x)$ para $x = 1, 2, 3, 4$, e 5.
   (c) Em que intervalo g está crescendo?
   (d) Onde g tem um valor máximo?
   (e) Faça um esboço do gráfico de g.
   (f) Use o gráfico da parte (e) para esboçar o gráfico de $g'(x)$. Compare com o gráfico de f.



5–6 Esboce a área representada por $g(x)$. A seguir, encontre $g'(x)$ de duas formas: (a) utilizando a Parte 1 do Teorema Fundamental e (b) calculando a integral usando a Parte 2 e, então, derivando.

5. $g(x) = \int_1^x t^2\,dt$

6. $g(x) = \int_0^x (2 + \operatorname{sen} t)\,dt$

7–18 Use a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar a derivada da função.

7. $g(x) = \int_1^x \dfrac{1}{t^3 + 1}\,dt$

8. $g(x) = \int_3^x e^{t^2 - t}\,dt$

9. $g(s) = \int_5^s (t - t^2)^8\,dt$

10. $g(r) = \int_0^r \sqrt{x^2 + 4}\,dx$

11. $F(x) = \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\,dt$

$$\left[Dica: \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\,dt = -\int_\pi^x \sqrt{1 + \sec t}\,dt \right]$$

12. $G(x) = \int_x^1 \cos\sqrt{t}\,dt$

13. $h(x) = \int_1^{e^x} \ln t\,dt$

14. $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \dfrac{z^2}{z^4 + 1}\,dz$

15. $y = \int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\,dt$

16. $y = \int_0^{x^4} \cos^2\theta\,d\theta$

17. $y = \int_{1-3x}^1 \dfrac{u^3}{1 + u^2}\,du$

18. $y = \int_{\operatorname{sen} x}^1 \sqrt{1 + t^2}\,dt$

19–44 Calcule a integral.

19. $\int_{-1}^2 (x^3 - 2x)\,dx$

20. $\int_{-1}^1 x^{100}\,dx$

21. $\int_1^4 (5 - 2t + 3t^2)\,dt$

22. $\int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9\right)du$

23. $\int_0^1 x^{4/5}\,dx$

24. $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$

25. $\int_1^2 \dfrac{3}{t^4}\,dt$

26. $\int_\pi^{2\pi} \cos\theta\,d\theta$

27. $\int_0^2 x(2 + x^5)\,dx$

28. $\int_0^1 (3 + x\sqrt{x})\,dx$

29. $\int_1^9 \dfrac{x - 1}{\sqrt{x}}\,dx$

30. $\int_0^2 (y - 1)(2y + 1)\,dy$

31. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 t\,dt$

32. $\int_0^{\pi/4} \sec\theta\ \operatorname{tg}\theta\,d\theta$

33. $\int_1^2 (1 + 2y)^2\,dy$

34. $\int_0^3 (2\operatorname{sen} x - e^x)\,dx$

35. $\int_1^2 \dfrac{v^3 + 3v^6}{v^4}\,dv$

36. $\int_1^{18} \sqrt{\dfrac{3}{z}}\,dz$

37. $\int_0^1 (x^e + e^x)\,dx$

38. $\int_0^1 \cosh t\,dt$

39. $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \dfrac{8}{1 + x^2}\,dx$

40. $\int_1^2 \dfrac{4 + u^2}{u^3}\,du$

41. $\int_{-1}^1 e^{u+1}\,du$

42. $\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \dfrac{4}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador
SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

43. $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ onde $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } 0 \leqslant x < \pi/2 \\ \cos x & \text{se } \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

44. $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ onde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 4 - x^2 & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$

45–48 O que está errado na equação?

45. $\displaystyle\int_{-2}^{1} x^{-4}\,dx = \frac{x^{-3}}{-3}\bigg]_{-2}^{1} = -\frac{3}{8}$

46. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{4}{x^3}\,dx = -\frac{2}{x^2}\bigg]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}$

47. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi} \sec\theta\ \operatorname{tg}\theta\,d\theta = \sec\theta\Big]_{\pi/3}^{\pi} = -3$

48. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x\Big]_0^{\pi} = 0$

49–52 Use um gráfico para dar uma estimativa grosseira da área da região que fica abaixo da curva dada. Encontre a seguir a área exata.

49. $y = \sqrt[3]{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 27$

50. $y = x^{-4}$, $1 \leqslant x \leqslant 6$

51. $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$

52. $y = \sec^2 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

53–54 Calcule a integral e interprete-a como uma diferença de áreas. Ilustre com um esboço.

53. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^3\,dx$

54. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{2\pi} \cos x\,dx$

55–59 Encontre a derivada da função.

55. $\displaystyle g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\,du$

$$\left[\textit{Dica: } \int_{2x}^{3x} f(u)\,du = \int_{2x}^{0} f(u)\,du + \int_0^{3x} f(u)\,du\right]$$

56. $\displaystyle g(x) = \int_{1-2x}^{1+2x} t \operatorname{sen} t\,dt$

57. $\displaystyle F(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2}\,dt$

58. $\displaystyle F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2x} \operatorname{arctg} t\,dt$

59. $\displaystyle y = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} \ln(1 + 2v)\,dv$

60. Se $f(x) = \int_0^x (1 - t^2)e^{t^2}\,dt$, em qual intervalo f é crescente?

61. Em qual intervalo a curva

$$y = \int_0^x \frac{t^2}{t^2 + t + 2}\,dt$$

é côncava para baixo?

62. Se $f(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{1 + t^2}\,dt$ e $g(y) = \int_3^y f(x)\,dx$, encontre $g''(\pi/6)$.

63. Se $f(1) = 12$, f' é contínua e $\int_1^4 f'(x)\,dx = 17$, qual é o valor de $f(4)$?

64. A **função erro** dada por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

é muito usada em probabilidade, estatística e engenharia.

(a) Mostre que $\int_a^b e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,[\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a)]$.

(b) Mostre que a função $y = e^{x^2}\operatorname{erf}(x)$ satisfaz a equação diferencial $y' = 2xy + 2/\sqrt{\pi}$.

65. A função de Fresnel S foi definida no Exemplo 3, e seus gráficos estão nas Figuras 7 e 8.

(a) Em que valores de x essa função tem valores máximos locais?

(b) Em que intervalos a função é côncava para cima?

SCA (c) Use um gráfico para resolver a seguinte equação, com precisão de duas casas decimais:

$$\int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt = 0{,}2$$

SCA **66.** A **função seno integral**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

é importante em engenharia elétrica. [O integrando $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ não está definido quando $t = 0$, mas sabemos que seu limite é 1 quando $t \to 0$. Logo, definimos $f(0) = 1$ e isso faz de f uma função contínua em toda parte.]

(a) Trace o gráfico de Si.

(b) Em que valores de x essa função tem valores máximos locais?

(c) Encontre as coordenadas do primeiro ponto de inflexão à direita da origem.

(d) Essa função tem assíntotas horizontais?

(e) Resolva a seguinte equação com precisão de uma casa decimal:

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = 1$$

67–68 Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, em que f é a função cujo gráfico é mostrado.

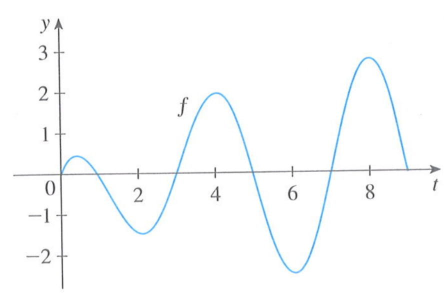
(a) Em que valores de x ocorrem os valores máximos e mínimos locais em g?

(b) Onde g atinge seu valor máximo absoluto?

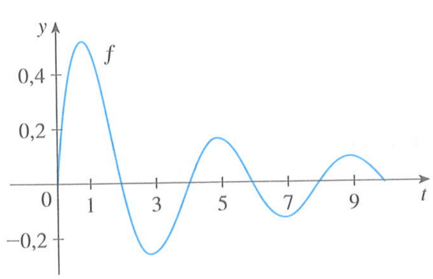
(c) Em que intervalos g é côncavo para baixo?

(d) Esboce o gráfico de g.

67.



68.



69–70 Calcule o limite, reconhecendo primeiro a soma como uma soma de Riemann para uma função definida em $[0, 1]$.

69. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}$

70. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

---

71. Justifique $\boxed{3}$ para o caso $h < 0$.

72. Se f é contínua e g e h são funções deriváveis, encontre uma fórmula para

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

73. (a) Mostre que $1 \leqslant \sqrt{1 + x^3} \leqslant 1 + x^3$ para $x \geqslant 0$.

(b) Mostre que $1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx \leqslant 1{,}25$.

74. (a) Mostre que $\cos(x^2) \geqslant \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

(b) Deduza que $\int_0^{\pi/6} \cos(x^2)\,dx \geqslant \frac{1}{2}$.

75. Mostre que

$$0 \leqslant \int_5^{10} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\,dx \leqslant 0{,}1$$

comparando o integrando a uma função mais simples.

76. Considere

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & se\ x > 2 \end{cases}$$

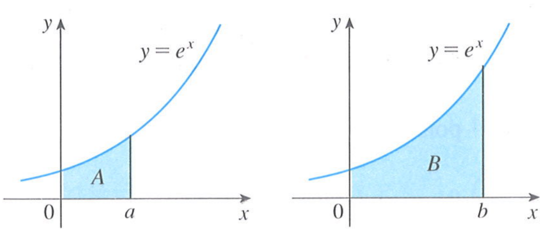
e $$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

(a) Ache uma expressão para $g(x)$ similar àquela para $f(x)$.
(b) Esboce os gráficos de f e g.
(c) Onde f é derivável? Onde g é derivável?

77. Encontre uma função f e um número a tais que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x} \qquad \text{para todo } x > 0$$

78. A área marcada B é três vezes a área marcada A. Expresse b em termos de a.



79. Uma empresa possui uma máquina que se deprecia a uma taxa contínua $f = f(t)$, onde t é o tempo medido em meses desde seu último recondicionamento. Como a cada vez em que a máquina é recondicionada incorre-se em um custo fixo A, a empresa deseja determinar o tempo ideal T (em meses) entre os recondicionamentos.

(a) Explique por que $\int_0^t f(s)\,ds$ representa a perda do valor da máquina sobre o período de tempo t desde o último recondicionamento.

(b) Seja $C = C(t)$ dado por

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)\,ds\right]$$

O que representa C e por que a empresa quer minimizar C?

(c) Mostre que C tem um valor mínimo nos números $t = T$ onde $C(T) = f(T)$.

80. Uma empresa de tecnologia compra um novo sistema de computação cujo valor inicial é V. O sistema depreciará a uma taxa $f = f(t)$ e acumulará custos de manutenção a uma taxa $g = g(t)$, onde t é o tempo medido em meses. A companhia quer determinar o tempo ótimo para substituir o sistema.

(a) Seja

$$C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]\,ds$$

Mostre que os números críticos de C ocorrem nos números t nos quais $C(t) = f(t) + g(t)$.

(b) Suponha que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & \text{se } 0 < t \leqslant 30 \\ 0 & \text{se } t > 30 \end{cases}$$

e $$g(t) = \frac{Vt^2}{12.900} \qquad t > 0$$

Determine o período de tempo T para que a depreciação total $D(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ seja igual ao valor inicial V.

(c) Determine o mínimo absoluto de C em $(0, T]$.

(d) Esboce os gráficos de C e $f + g$ no mesmo sistema de coordenadas e verifique o resultado da parte (a) nesse caso.

EXEMPLO 7 A Figura 4 mostra o consumo de energia por um dia em setembro em São Francisco (P é medido em megawatts; t é medido em horas a partir da meia-noite). Estime a energia consumida naquele dia.

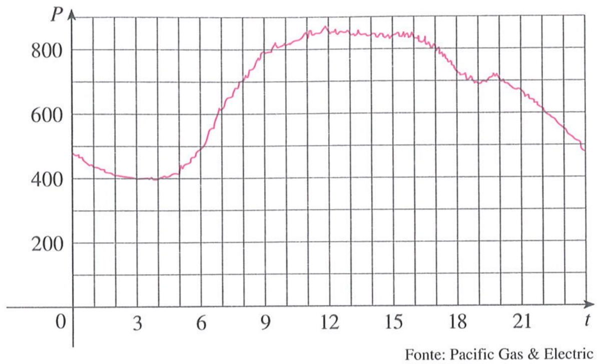


FIGURA 4

Fonte: Pacific Gas & Electric

SOLUÇÃO A potência é a taxa de variação da energia: $P(t) = E'(t)$. Logo, pelo Teorema da Variação Total,

$$\int_0^{24} P(t)\,dt = \int_0^{24} E'(t)\,dt = E(24) - E(0)$$

é a quantidade total de energia consumida naquele dia. Aproximamos o valor da integral utilizando a Regra do Ponto Médio com 12 subintervalos e $\Delta t = 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^{24} P(t)\,dt &\approx [P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(21) + P(23)]\,\Delta t\\ &\approx (440 + 400 + 420 + 620 + 790 + 840 + 850\\ &\quad + 840 + 810 + 690 + 670 + 550)(2)\\ &= 15.840.\end{aligned}$$

A energia usada foi aproximadamente 15.840 megawatts-hora.

Uma observação sobre unidades Como saber que unidades usar para a energia no Exemplo 7? A integral $\int_0^{24} P(t)\,dt$ é definida como o limite das somas dos termos da forma $P(t_i^*)\,\Delta t$. Como $P(t_i^*)$ é medida em megawatts e Δt, em horas, seu produto é medido em megawatts-hora. O mesmo é verdadeiro para o limite. Em geral, a unidade de medida $\int_a^b f(x)\,dx$ é o produto da unidade para $f(x)$ com a unidade para x.

5.4 Exercícios

1–4 Verifique, por derivação, que a fórmula está correta.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$

2. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$

3. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{3b^2}(bx - 2a)\sqrt{a+bx} + C$

5–18 Encontre a integral indefinida geral.

5. $\displaystyle\int (x^2 + x^{-2})\,dx$

6. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$

7. $\displaystyle\int \left(x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x - 2\right) dx$

8. $\displaystyle\int (y^3 + 1{,}8y^2 - 2{,}4y)\,dy$

9. $\displaystyle\int (u+4)(2u+1)\,du$

10. $\displaystyle\int v(v^2+2)^2\,dv$

11. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x}\,dx$

12. $\displaystyle\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx$

13. $\int (\operatorname{sen} x + \operatorname{senh} x)\, dx$

14. $\int (\operatorname{cossec}^2 t - 2e^t)\, dt$

15. $\int (\theta - \operatorname{cossec} \theta \operatorname{cotg} \theta)\, d\theta$

16. $\int \sec t\,(\sec t + \operatorname{tg} t)\, dt$

17. $\int (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)\, d\alpha$

18. $\int \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\, dx$

19–20 Encontre a integral indefinida geral. Ilustre fazendo o gráfico de vários membros da família na mesma tela.

19. $\int \left(\cos x + \frac{1}{2}x\right) dx$

20. $\int (e^x - 2x^2)\, dx$

21–46 Calcule a integral.

21. $\int_0^2 (6x^2 - 4x + 5)\, dx$

22. $\int_1^3 (1 + 2x - 4x^3)\, dx$

23. $\int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{4}t^3 - t\right) dt$

24. $\int_0^3 (1 + 6w^2 - 10w^4)\, dw$

25. $\int_0^2 (2x - 3)(4x^2 + 1)\, dx$

26. $\int_{-1}^1 t(1 - t)^2\, dt$

27. $\int_0^\pi (5e^x + 3 \operatorname{sen} x)\, dx$

28. $\int_1^2 \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}\right) dx$

29. $\int_1^4 \left(\dfrac{4 + 6u}{\sqrt{u}}\right) du$

30. $\int_0^4 \left(3\sqrt{t} - 2e^t\right) dt$

31. $\int_0^1 x\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right) dx$

32. $\int_1^4 \dfrac{\sqrt{y} - y}{y^2}\, dy$

33. $\int_1^2 \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}\right) dx$

34. $\int_0^1 (5x - 5^x)\, dx$

35. $\int_0^1 (x^{10} + 10^x)\, dx$

36. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{cossec}^2 \theta\, d\theta$

37. $\int_0^{\pi/4} \dfrac{1 + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$

38. $\int_0^{\pi/3} \dfrac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta \operatorname{tg}^2\theta}{\sec^2\theta}\, d\theta$

39. $\int_1^{64} \dfrac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

40. $\int_{-10}^{10} \dfrac{2e^x}{\operatorname{senh} x + \cosh x}\, dx$

41. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \dfrac{dr}{\sqrt{1 - r^2}}$

42. $\int_1^2 \dfrac{(x - 1)^3}{x^2}\, dx$

43. $\int_0^{1/\sqrt{3}} \dfrac{t^2 - 1}{t^4 - 1}\, dt$

44. $\int_0^2 |2x - 1|\, dx$

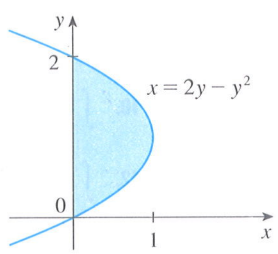
45. $\int_{-1}^2 (x - 2|x|)\, dx$

46. $\int_0^{3\pi/2} |\operatorname{sen} x|\, dx$

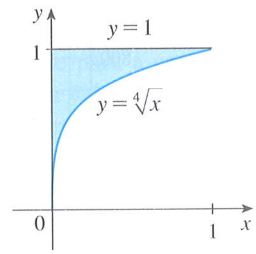
47. Use um gráfico para estimar a intersecção com o eixo x da curva $y = 1 - 2x - 5x^4$. A seguir, use essa informação para estimar a área da região que se situa sob a curva e acima do eixo x.

48. Repita o Exercício 47 para a curva $y = (x^2 + 1)^{-1} - x^4$.

49. A área da região que está à direita do eixo y e à esquerda da parábola $x = 2y - y^2$ (a região sombreada na figura) é dada pela integral $\int_0^2 (2y - y^2)\, dy$. (Gire sua cabeça no sentido horário e imagine a região como estando abaixo da curva $x = 2y - y^2$ de $y = 0$ até $y = 2$.) Encontre a área da região.



50. As fronteiras da região sombreada são o eixo y, a reta $y = 1$ e a curva $y = \sqrt[4]{x}$. Encontre a área dessa região escrevendo x como uma função de y e integrando em relação a y (como no Exercício 49).



51. Se $w'(t)$ for a taxa de crescimento de uma criança em quilogramas por ano, o que $\int_5^{10} w'(t)\, dt$ representa?

52. A corrente em um fio elétrico é definida como a derivada da carga: $I(t) = Q'(t)$. (Veja o Exemplo 3 na Seção 3.7.) O que $\int_a^b I(t)\, dt$ representa?

53. Se vazar óleo de um tanque a uma taxa de $r(t)$ galões por minuto em um instante t, o que $\int_0^{120} r(t)\, dt$ representa?

54. Uma colmeia com uma população inicial de 100 abelhas cresce a uma taxa de $n'(t)$ por semana. O que representa $100 + \int_0^{15} n'(t)\, dt$?

55. Na Seção 4.7 definimos a função rendimento marginal $R'(x)$ como a derivada da função rendimento $R(x)$, onde x é o número de unidades vendidas. O que representa $\int_{1000}^{5000} R'(x)\, dx$?

56. Se $f(x)$ for a inclinação de uma trilha a uma distância de x quilômetros do começo dela, o que $\int_3^5 f(x)\, dx$ representa?

57. Se x é medido em metros e $f(x)$, em newtons, quais são as unidades de $\int_0^{100} f(x)\, dx$?

58. Se as unidades para x são pés e as unidades para $a(x)$ são libras por pé, quais são as unidades para da/dx? Quais são as unidades para $\int_2^8 a(x)\, dx$?

59–60 A função velocidade (em metros por segundo) é dada para uma partícula movendo-se ao longo de uma reta. Encontre (a) o deslocamento e (b) a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo dado.

59. $v(t) = 3t - 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

60. $v(t) = t^2 - 2t - 8, \quad 1 \leqslant t \leqslant 6$

61–62 A função aceleração (em m/s^2) e a velocidade inicial são dadas para uma partícula movendo-se ao longo de uma reta. Encontre (a) a velocidade no instante t e (b) a distância percorrida durante o intervalo de tempo dado.

61. $a(t) = t + 4, \quad v(0) = 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$

62. $a(t) = 2t + 3, \quad v(0) = -4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

63. A densidade linear de uma barra de comprimento 4 m é dada por $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$, medida em quilogramas por metro, em que x é medido em metros a partir de uma extremidade da barra. Encontre a massa total da barra.

64. A água escoa pelo fundo de um tanque de armazenamento a uma taxa de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minuto, onde $0 \leqslant t \leqslant 50$. Encontre a quantidade de água que escoa do tanque durante os primeiros dez minutos.

65. A velocidade de um carro foi lida de seu velocímetro em intervalos de 10 segundos e registrada na tabela. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a distância percorrida pelo carro.

t (s)	v (mi/h)	t (s)	v (mi/h)
0	0	60	56
10	38	70	53
20	52	80	50
30	58	90	47
40	55	100	45
50	51		

66. Suponha que um vulcão esteja em erupção e que as leituras da taxa $r(t)$, cujos materiais sólidos são lançados na atmosfera, sejam as dadas na tabela. O tempo t é medido em segundos e a unidade para $r(t)$ é toneladas por segundo.

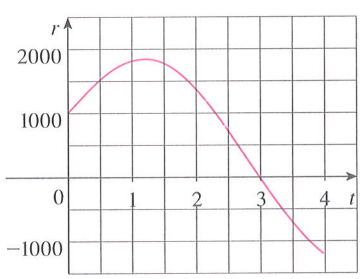
t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	2	10	24	36	46	54	60

(a) Dê estimativas superior e inferior para a quantidade $Q(6)$ do material proveniente da erupção após 6 segundos.

(b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar $Q(6)$.

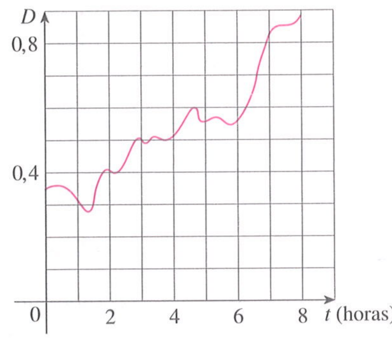
67. O custo marginal de fabricação de x metros de um certo tecido é $C'(x) = 3 - 0{,}01x + 0{,}000006x^2$ (em dólares por metro). Ache o aumento do custo se o nível de produção for elevado de 2 000 para 4 000 metros.

68. Há um fluxo de água para dentro e para fora de um tanque de armazenamento. A seguir, temos um gráfico que mostra a taxa de troca $r(t)$ do volume de água no tanque, em litros por dia. Se a quantidade de água no tanque no instante de tempo $t = 0$ é 25 000 litros, use a Regra do Ponto Médio para estimar a quantidade de água no tanque depois de quatro dias.

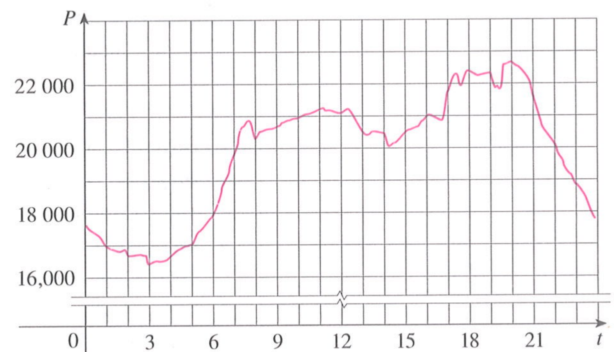


69. Uma população de bactérias é de 4 000 no tempo $t = 0$ e sua taxa de crescimento é de $1000 \cdot 2^t$ bactérias por hora depois de t horas. Qual é a população depois de uma hora?

70. O gráfico a seguir mostra o tráfego de dados em um provedor de serviços na internet entre meia-noite e as 8 horas da manhã. D denota os dados em processamento, medidos em megabits por segundo. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a quantidade total de dados transmitidos durante esse período de tempo.



71. A seguir, está ilustrada a potência consumida na cidade de Ontário, Canadá, em 9 de dezembro de 2004 (P é medida em megawatts; t é medido em horas a partir da meia-noite). Usando o fato de que a potência é a taxa de variação da energia, estime a energia usada naquele dia.



Fonte: Independent Electricity Market Operator

72. Em 7 de maio de 1992, o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49, cujo objetivo era instalar um novo motor de arranque no satélite de comunicação Intelsat. A tabela dá os dados de velocidade para o ônibus espacial entre o lançamento e a entrada em ação dos foguetes auxiliares.

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para modelar esses dados por um polinômio de terceiro grau.

(b) Use o modelo da parte (a) para estimar a altura atingida pela *Endeavour*, 125 segundos depois do lançamento.

Evento	Tempo (s)	Velocidade (m/s)
Lançamento	0	0
Começo da manobra de inclinação	10	56;4
Fim da manobra de inclinação	15	97;2
Regulador de combustível a 89%	20	136;2
Regulador de combustível a 67%	32	226;2
Regulador de pressão a 104%	59	403;9
Pressão dinâmica máxima	62	440;4
Separação dos foguetes auxiliares	125	1.265;2

O Teorema 7 está ilustrado na Figura 3. Quando f é positiva e par, a parte (a) diz que a área sob $y = f(x)$ de $-a$ até a é o dobro da área de 0 até a em virtude da simetria. Lembre-se de que uma integral $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser expressa como a área acima do eixo x e abaixo de $y = f(x)$ menos a área abaixo do eixo x e acima da curva. Assim, a parte (b) diz que a integral é 0, pois as áreas se cancelam.

EXEMPLO 10 Uma vez que $f(x) = x^6 + 1$ satisfaz $f(-x) = f(x)$, ela é par, e portanto

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\,dx = 2\int_0^2 (x^6 + 1)\,dx$$
$$= 2\left[\tfrac{1}{7}x^7 + x\right]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7}$$

EXEMPLO 11 Já que $f(x) = (\text{tg } x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisfaz $f(-x) = -f(x)$, ela é ímpar, e por conseguinte

$$\int_{-1}^{1} \frac{\text{tg } x}{1 + x^2 + x^4}\,dx = 0$$

5.5 Exercícios

1–6 Calcule a integral fazendo a substituição dada.

1. $\int \cos 3x\,dx, \quad u = 3x$
2. $\int x(4 + x^2)^{10}\,dx, \quad u = 4 + x^2$
3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx, \quad u = x^3 + 1$
4. $\int \frac{dt}{(1 - 6t)^4}, \quad u = 1 - 6t$
5. $\int \cos^3\theta\ \text{sen}\,\theta\,d\theta, \ \theta = \cos\theta$
6. $\int \frac{\sec^2(1/x)}{x^2}\,dx, \quad u = 1/x$

7–48 Calcule a integral indefinida.

7. $\int x\,\text{sen}(x^2)\,dx$
8. $\int x^2 e^{x^3}dx$
9. $\int (3x - 2)^{20}\,dx$
10. $\int (3t + 2)^{2,4}\,dt$
11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2}\,dx$
12. $\int \sec^2 2\theta\,d\theta$
13. $\int \frac{dx}{5 - 3x}$
14. $\int u\sqrt{1 - u^2}\,du$
15. $\int \text{sen}\,\pi t\,dt$
16. $\int e^x\,\text{sen}(e^x)\,dx$
17. $\int \frac{e^u}{(1 - e^u)^2}\,du$
18. $\int \frac{\text{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
19. $\int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}}\,dx$
20. $\int \frac{z^2}{z^3 + 1}\,dz$
21. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$
22. $\int \cos^4\theta\ \text{sen}\,\theta\,d\theta$
23. $\int \sec^2\theta\ \text{tg}^3\theta\,d\theta$
24. $\int \sqrt{x}\ \text{sen}(1 + x^{3/2})\,dx$
25. $\int e^x\sqrt{1 + e^x}\,dx$
26. $\int \frac{dx}{ax + b} \quad (a \neq 0)$
27. $\int (x^2 + 1)(x^3 + 3x)^4\,dx$
28. $\int e^{\cos t}\,\text{sen}\,t\,dt$
29. $\int 5^t\,\text{sen}(5^t)\,dt$
30. $\int \frac{\text{tg}^{-1}x}{1 + x^2}\,dx$
31. $\int e^{\text{tg}\,x}\sec^2 x\,dx$
32. $\int \frac{\text{sen}(\ln x)}{x}\,dx$
33. $\int \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}\,dx$
34. $\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}\,dx$
35. $\int \sqrt{\text{cotg}\,x}\ \text{cossec}^2 x\,dx$
36. $\int \frac{2^t}{2^t + 3}\,dt$
37. $\int \text{senh}^2 x\cosh x\,dx$
38. $\int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{1 + \text{tg}\,t}}$
39. $\int \frac{\text{sen}\,2x}{1 + \cos^2 x}\,dx$
40. $\int \frac{\text{sen}\,x}{1 + \cos^2 x}\,dx$
41. $\int \text{cotg}\,x\,dx$
42. $\int \text{sen}\,t\,\sec^2(\cos t)\,dt$
43. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\,\text{sen}^{-1}x}$
44. $\int \frac{x}{1 + x^4}\,dx$
45. $\int \frac{1 + x}{1 + x^2}\,dx$
46. $\int x^2\sqrt{2 + x}\,dx$
47. $\int x(2x + 5)^8\,dx$
48. $\int x^3\sqrt{x^2 + 1}\,dx$

49–52 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique que sua resposta é razoável fazendo o gráfico da função e de sua primitiva (tome $C = 0$).

49. $\int x(x^2 - 1)^3\,dx$
50. $\int \text{tg}^2\theta\ \sec^2\theta\,d\theta$
51. $\int e^{\cos x}\,\text{sen}\,x\,dx$
52. $\int \text{sen}\,x\cos^4 x\,dx$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

53–73 Avalie a integral definida.

53. $\int_0^1 \cos(\pi t/2)\, dt$

54. $\int_0^1 (3t-1)^{50}\, dt$

55. $\int_0^1 \sqrt[3]{1+7x}\, dx$

56. $\int_0^3 \frac{dx}{5x+1}$

57. $\int_0^{\pi} \sec^2(t/4)\, dt$

58. $\int_{1/6}^{1/2} \operatorname{cossec} \pi t \operatorname{cotg} \pi t\, dt$

59. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$

60. $\int_0^1 xe^{-x^2}\, dx$

61. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3 + x^4 \operatorname{tg} x)\, dx$

62. $\int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\, dx$

63. $\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$

64. $\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

65. $\int_0^a x\sqrt{x^2 + a^2}\, dx \quad (a > 0)$

66. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4 \operatorname{sen} x\, dx$

67. $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\, dx$

68. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\, dx$

69. $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

70. $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

71. $\int_0^1 \frac{e^z + 1}{e^z + z}\, dz$

72. $\int_0^{T/2} \operatorname{sen}(2\pi t/T - \alpha)\, dt$

73. $\int_0^1 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^4}$

74. Verifique que $f(x) = \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}$ é uma função ímpar e use este fato para mostrar que

$$0 \leqslant \int_{-2}^{3} \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}\, dx \leqslant 1.$$

75–76 Use um gráfico para dar uma estimativa grosseira da área da região que está sob a curva dada. Encontre a seguir a área exata.

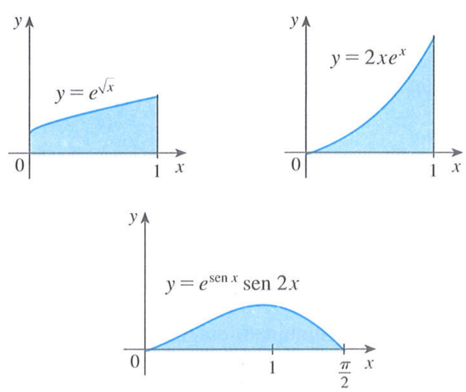
75. $y = \sqrt{2x+1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

76. $y = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

77. Calcule $\int_{-2}^{2} (x+3)\sqrt{4-x^2}\, dx$ escrevendo-a como uma soma de duas integrais e interpretando uma dessas integrais em termos de uma área.

78. Calcule $\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}\, dx$ fazendo uma substituição e interpretando a integral resultante em termos de uma área.

79. Quais das seguintes áreas são iguais? Por quê?



80. Um modelo para a taxa de metabolismo basal, em kcal/h, de um homem jovem é $R(t) = 85 - 0{,}18 \cos(\pi t/12)$, em que t é o tempo em horas medido a partir de 5 horas da manhã. Qual é o metabolismo basal total deste homem, $\int_0^{24} R(t)\, dt$, em um período de 24 horas?

81. Um tanque de armazenamento de petróleo sofre uma ruptura em $t = 0$ e o petróleo vaza do tanque a uma taxa de $r(t) = 100e^{-0{,}01t}$ litros por minuto. Quanto petróleo vazou na primeira hora?

82. Uma população de bactérias tem inicialmente 400 bactérias e cresce a uma taxa de $r(t) = (450{,}268)e^{1{,}12567t}$ bactérias por hora. Quantas bactérias existirão após 3 horas?

83. A respiração é cíclica e o ciclo completo respiratório desde o início da inalação até o fim da expiração demora cerca de 5 s. A taxa máxima de fluxo de ar nos pulmões é de cerca de 0,5 L/s. Isso explica, em partes, porque a função $f(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\pi t/5)$ tem sido frequentemente utilizada para modelar a taxa de fluxo de ar nos pulmões. Use esse modelo para encontrar o volume de ar inalado nos pulmões no instante t.

84. A Alabama Instruments Company preparou uma linha de montagem para fabricar uma nova calculadora. A taxa de produção dessas calculadoras após t semanas é

$$\frac{dx}{dt} = 5\,000\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right) \text{calculadoras}/\textit{semana}.$$

(Observe que a produção tende a 5 000 por semana à medida que passa o tempo, mas a produção inicial é baixa, pois os trabalhadores não estão familiarizados com as novas técnicas.) Encontre o número de calculadoras produzidas no começo da terceira semana até o fim da quarta semana.

85. Se f for contínua e $\int_0^4 f(x)\, dx = 10$, calcule $\int_0^2 f(2x)\, dx$.

86. Se f for contínua e $\int_0^9 f(x)\, dx = 4$, calcule $\int_0^3 xf(x^2)\, dx$.

87. Se f for contínua em $\mathbb{R}$, demonstre que

$$\int_a^b f(-x)\, dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\, dx.$$

Para o caso onde $f(x) \geqslant 0$ e $0 < a < b$, faça um diagrama para interpretar geometricamente essa equação como uma igualdade de áreas.

88. Se f for contínua em $\mathbb{R}$, demonstre que

$$\int_a^b f(x+c)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\, dx.$$

Para o caso onde $f(x) \geqslant 0$, faça um diagrama para interpretar geometricamente essa equação como uma igualdade de áreas.

89. Se a e b forem números positivos, mostre que

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\, dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\, dx.$$

90. Se f é contínua em $[0, \pi]$, use a substituição $u = \pi - x$ para demonstrar que

$$\int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\, dx.$$

91. Use o Exercício 90 para calcular a integral

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

92. (a) Se f é contínua, mostre que

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x)\, dx.$$

(b) Use a parte (a) para calcular $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$ e $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

5 Revisão

Verificação de Conceitos

1. (a) Escreva uma expressão para uma soma de Riemann de uma função f. Explique o significado da notação que você usar.
   (b) Se $f(x) \geqslant 0$, qual a interpretação geométrica de uma soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.
   (c) Se $f(x)$ assumir valores positivos e negativos, qual a interpretação geométrica de uma soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.
2. (a) Escreva a definição de integral definida de uma função contínua de a até b.
   (b) Qual a interpretação geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ se $f(x) \geqslant 0$?
   (c) Qual a interpretação geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ se $f(x)$ assumir valores positivos e negativos? Ilustre com um diagrama.
3. Enuncie ambas as partes do Teorema Fundamental do Cálculo.
4. (a) Enuncie o Teorema da Variação Total.
   (b) Se $r(t)$ for a taxa segundo a qual a água escoa para dentro de um reservatório, o que representa $\int_{t_1}^{t_2} r(t)\,dt$?
5. Suponha que uma partícula mova-se para a frente e para trás ao longo de uma linha reta com velocidade $v(t)$, medida em metros por segundo, com aceleração $a(t)$.
   (a) Qual o significado de $\int_{60}^{120} v(t)\,dt$?
   (b) Qual o significado de $\int_{60}^{120} |v(t)|\,dt$?
   (c) Qual o significado de $\int_{60}^{120} a(t)\,dt$?
6. (a) Explique o significado da integral indefinida $\int f(x)\,dx$.
   (b) Qual a conexão entre a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ e a integral indefinida $\int f(x)\,dx$?
7. Explique exatamente o significado da afirmação “derivação e integração são processos inversos”.
8. Enuncie a Regra da Substituição. Na prática, como fazer uso dela?

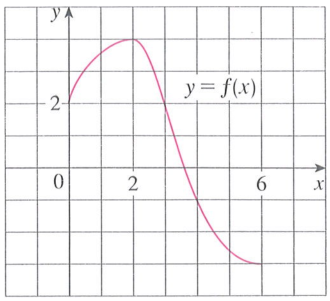
Teste – Verdadeiro ou Falso

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê. Caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se f e g forem contínuas em $[a, b]$, então
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$
2. Se f e g forem contínuas em $[a, b]$, então
$$\int_a^b [f(x)g(x)]\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$
3. Se f for contínua em $[a, b]$, então
$$\int_a^b 5f(x)\,dx = 5\int_a^b f(x)\,dx.$$
4. Se f for contínua em $[a, b]$, então
$$\int_a^b xf(x)\,dx = x\int_a^b f(x)\,dx.$$
5. Se f for contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$, então
$$\int_a^b \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}$$
6. Se f' for contínua em $[1, 3]$, então
$$\int_1^3 f'(v)\,dv = f(3) - f(1).$$
7. Se f e g forem contínuas em $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então
$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$
8. Se f e g forem deriváveis e $f(x) \geqslant g(x)$ para $a < x < b$, então $f'(x) \geqslant g'(x)$ para $a < x < b$.
9. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^5 - 6x^9 + \frac{\operatorname{sen} x}{(1 + x^4)^2}\right) dx = 0.$
10. $\displaystyle\int_{-5}^{5} (ax^2 + bx + c)\,dx = 2\int_0^5 (ax^2 + c)\,dx.$
11. Todas as funções contínuas têm derivadas.
12. Todas as funções contínuas têm primitivas.
13. $\displaystyle\int_0^3 e^{x^2}\,dx = \int_0^5 e^{x^2}\,dx + \int_5^3 e^{x^2}\,dx.$
14. Se $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, então $f(x) = 0$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.
15. Se f for contínua em $[a, b]$, então
$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = f(x).$$
16. $\int_0^2 (x - x^3)\,dx$ representa a área sob a curva $y = x - x^3$ de 0 até 2.
17. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{3}{8}$
18. Se f tem uma descontinuidade em 0, então $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ não existe.

Exercícios

1. Use o gráfico dado de f para encontrar a soma de Riemann com seis subintervalos. Tome como pontos amostrais (a) as extremidades esquerdas e (b) os pontos médios. Em cada caso faça um diagrama e explique o que representa a soma de Riemann.



2. (a) Calcule a soma de Riemann para
$$f(x) = x^2 - x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2,$$
com quatro subintervalos, tomando como pontos amostrais as extremidades direitas. Explique, com a ajuda de um diagrama, o que representa a soma de Riemann.
(b) Use a definição de integral definida (com as extremidades direitas) para calcular o valor da integral
$$\int_0^2 (x^2 - x)\,dx.$$
(c) Use o Teorema Fundamental para verificar sua resposta da parte (b).
(d) Faça um diagrama para explicar o significado geométrico da integral na parte (b).

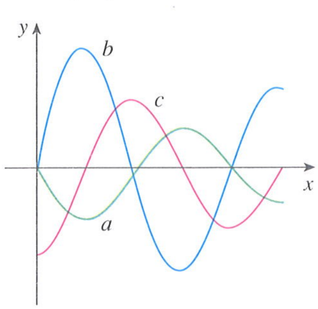
3. Calcule
$$\int_0^1 \left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$$
interpretando-a em termos de áreas.

4. Expresse
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} x_i \,\Delta x$$
como uma integral definida no intervalo $[0, \pi]$ e então calcule a integral.

5. Se $\int_0^6 f(x)\,dx = 10$ e $\int_0^4 f(x)\,dx = 7$, encontre $\int_4^6 f(x)\,dx$.

6. (a) Escreva $\int_1^5 (x + 2x^5)\,dx$ como um limite das somas de Riemann, tomando como pontos amostrais as extremidades direitas. Use um SCA para calcular a soma e o limite. SCA
(b) Use o Teorema Fundamental para verificar sua resposta da parte (a).

7. A figura a seguir mostra os gráficos de f, f' e $\int_0^x f(t)\,dt$. Identifique cada gráfico e explique suas escolhas.



8. Calcule:
(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right) dx$ (b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{\operatorname{arctg} x}\,dx$
(c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\operatorname{arctg} t}\,dt$

9–38 Calcule a integral.

9. $\displaystyle\int_1^2 (8x^3 + 3x^2)\,dx$

10. $\displaystyle\int_0^T (x^4 - 8x + 7)\,dx$

10. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^9)\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x)^9\,dx$

13. $\displaystyle\int_1^9 \frac{\sqrt{u} - 2u^2}{u}\,du$

14. $\displaystyle\int_0^1 (\sqrt[4]{u} + 1)^2\,du$

15. $\displaystyle\int_0^1 y(y^2 + 1)^5\,dy$

16. $\displaystyle\int_0^2 y^2\sqrt{1 + y^3}\,dy$

17. $\displaystyle\int_1^5 \frac{dt}{(t - 4)^2}$

18. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(3\pi t)\,dt$

19. $\displaystyle\int_0^1 v^2 \cos(v^3)\,dv$

20. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{t^4 \operatorname{tg} t}{2 + \cos t}\,dt$

22. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$

23. $\displaystyle\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$

24. $\displaystyle\int_1^{10} \frac{x}{x^2 - 4}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cossec}^2 x}{1 + \operatorname{cotg} x}\,dx$

27. $\displaystyle\int \operatorname{sen} \pi t \cos \pi t\,dt$

28. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos(\cos x)\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \ln(\cos x)\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1 + x^4}\,dx$

34. $\displaystyle\int \operatorname{senh}(1 + 4x)\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{1 + \sec\theta}\,d\theta$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (1 + \operatorname{tg} t)^3 \sec^2 t\,dt$

37. $\displaystyle\int_0^3 |x^2 - 4|\,dx$

38. $\displaystyle\int_0^4 |\sqrt{x} - 1|\,dx$

39–40 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique que sua resposta é razoável fazendo o gráfico da função e de sua primitiva (tome $C = 0$).

39. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$

41. Use um gráfico para dar uma estimativa da área da região que está sob a curva $y = x\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. Encontre a seguir a área exata.

42. Faça o gráfico da $f(x) = \cos^2 x \operatorname{sen} x$ e use-o para conjecturar o valor da integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. Calcule então a integral para confirmar sua conjectura.

43–48 Encontre a derivada da função.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

43. $F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1 + t^3}\, dt$

44. $F(x) = \int_x^1 \sqrt{t + \operatorname{sen} t}\, dt$

45. $g(x) = \int_0^{x^4} \cos(t^2)\, dt$

46. $g(x) = \int_1^{\operatorname{sen} x} \frac{1 - t^2}{1 + t^4}\, dt$

47. $y = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{e^t}{t}\, dt$

48. $y = \int_{2x}^{3x+1} \operatorname{sen}(t^4)\, dt$

49–50 Use a Propriedade 8 das integrais para estimar o valor da integral.

49. $\int_1^3 \sqrt{x^2 + 3}\, dx$

50. $\int_3^5 \frac{1}{x + 1}\, dx$

51–54 Use as propriedades das integrais para verificar a desigualdade.

51. $\int_0^1 x^2 \cos x\, dx \leqslant \frac{1}{3}$

52. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

53. $\int_0^1 e^x \cos x\, dx \leqslant e - 1$

54. $\int_0^1 x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx \leqslant \pi/4$

55. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 6$ para aproximar $\int_0^3 \operatorname{sen}(x^3)\, dx$.

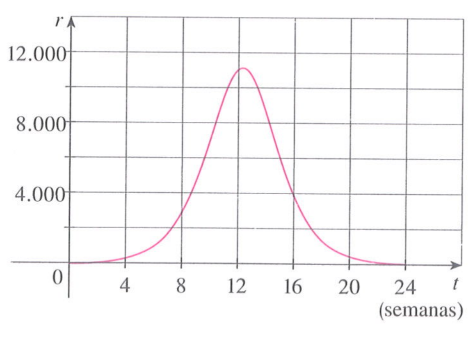
56. Uma partícula move-se ao longo de uma reta com uma função velocidade $v(t) = t^2 - t$, onde v é medida em metros por segundo. Ache (a) o deslocamento e (b) a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo $[0, 5]$.

57. Seja $r(t)$ a taxa do consumo mundial de petróleo, em que t é medido em anos começando em $t = 0$ em 1º de janeiro de 2000 e $r(t)$ é medida em barris por ano. O que representa $\int_0^8 r(t)\, dt$?

58. Um radar foi usado para registrar a velocidade de um corredor nos instantes dados na tabela. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a distância percorrida pelo corredor durante aqueles 5 segundos.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3,0	10,51
0,5	4,67	3,5	10,67
1,0	7,34	4,0	10,76
1,5	8,86	4,5	10,81
2,0	9,73	5,0	10,81
2,5	10,22		

59. Uma população de abelhas cresce a uma taxa de $r(t)$ abelhas por semana e o gráfico de r é mostrado a seguir. Use a Regra do Ponto Médio com seis subintervalos para estimar o crescimento na população de abelhas durante as primeiras 24 semanas.



60. Considere

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}.$$

Calcule $\int_{-3}^1 f(x)\, dx$ interpretando a integral como uma diferença de áreas.

61. Se f for contínua e $\int_0^2 f(x)\, dx = 6$, calcule

$$\int_0^{\pi/2} f(2 \operatorname{sen} \theta) \cos \theta\, d\theta.$$

62. A função de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right) dt$ foi introduzida na Seção 5.3. Fresnel também usou a função

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t^2\right) dt$$

em sua teoria da difração das ondas de luz.

(a) Em quais intervalos C é crescente?

(b) Em quais intervalos C é côncava para cima?

SCA (c) Use um gráfico para resolver a seguinte equação, com precisão de duas casas decimais:

$$\int_0^x \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t^2\right) dt = 0{,}7$$

SCA (d) Desenhe os gráficos de C e S na mesma tela. Como estão relacionados esses gráficos?

63. Estime o valor do número c tal que a área sob a curva $y = \operatorname{senh} cx$ entre $x = 0$ e $x = 1$ seja igual a 1.

64. Suponha que a temperatura em uma barra longa e fina colocada sobre o eixo x seja inicialmente $C/(2a)$ se $|x| \leqslant a$ e 0 se $|x| > a$. Pode ser mostrado que se a difusividade do calor da barra for k, então sua temperatura em um ponto x no instante t é

$$T(x, t) = \frac{C}{a\sqrt{4\pi k t}} \int_0^a e^{-(x-u)^2/(4kt)}\, du.$$

Para acharmos a distribuição de temperatura que resulta de uma área quente concentrada inicialmente na origem, precisamos calcular

$$\lim_{a \to 0} T(x, t).$$

Use a Regra de l'Hôspital para encontrar esse limite.

65. Se f for uma função contínua tal que

$$\int_1^x f(t)\, dt = (x - 1)e^{2x} + \int_1^x e^{-t} f(t)\, dt$$

para todo x, ache uma fórmula explícita para $f(x)$.

66. Suponha que h seja uma função tal que $h(1) = -2$, $h'(1) = 2$, $h''(1) = 3$, $h(2) = 6$, $h'(2) = 5$, $h''(2) = 13$ e h'' seja contínua em toda a parte. Calcule $\int_1^2 h''(u)\, du$.

67. Se f' for contínua em $[a, b]$, mostre que

$$2 \int_a^b f(x) f'(x)\, dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$$

68. Encontre $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1 + t^3}\, dt$.

69. Se f for contínua em $[0, 1]$, demonstre que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 f(1 - x)\, dx$$

70. Calcule

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^9 + \left(\frac{2}{n}\right)^9 + \left(\frac{3}{n}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^9 \right]$$

71. Suponha que f seja contínua, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(x) > 0$ e $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{3}$. Encontre o valor da integral $\int_0^1 f^{-1}(y)\, dy$.

Problemas Quentes

Antes de olhar a solução do próximo exemplo, cubra-a e tente resolvê-lo você mesmo.

EXEMPLO 1 Calcule $\lim_{x \to 3} \left(\dfrac{x}{x-3} \displaystyle\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \right)$.

SOLUÇÃO Vamos começar por uma análise preliminar dos ingredientes da função. O que acontece com o primeiro fator, $x/(x-3)$, quando x tende a 3? O numerador tende a 3 e o denominador a 0, portanto, temos

$$\frac{x}{x-3} \to \infty \quad \text{quando} \quad x \to 3^+ \qquad \text{e} \qquad \frac{x}{x-3} \to -\infty \quad \text{quando} \quad x \to 3^-$$

O segundo fator tende a $\int_3^3 (\operatorname{sen} t)/t\, dt$, que é 0. Não está claro o que acontece com a função como um todo. (Um fator torna-se grande enquanto o outro torna-se pequeno.) Então, como procedemos?

Um dos princípios da resolução de problemas é *reconhecer alguma coisa familiar*. Haverá uma parte da função que nos lembre de alguma coisa vista antes? Bem, a integral

SP Os Princípios de Resolução de Problemas foram discutidos no Capítulo 1.

$$\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

tem x como seu limite superior de integração, e esse tipo de integral ocorre na Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

Isso sugere que uma derivação pode estar envolvida.

Uma vez que começamos a pensar sobre a derivação, o denominador $(x - 3)$ lembra-nos de alguma coisa que pode ser familiar: um das formas de definição da derivada no Capítulo 2 é

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$

e com $a = 3$ isso fica

$$F'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{F(x) - F(3)}{x - 3}$$

Logo, qual é a função F em nossa situação? Observe que se definirmos

$$F(x) = \int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

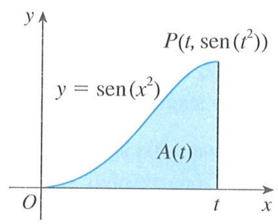
então $F(3) = 0$. O que acontece com o fator x no numerador? Ele é somente uma pista falsa, portanto vamos fatorá-lo e fazer o cálculo:

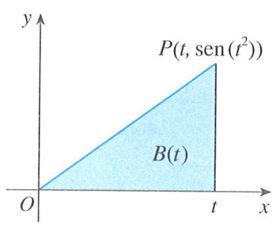
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3} \left(\frac{x}{x-3} \int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \right) &= \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} \frac{\displaystyle\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt}{x - 3} \\
&= 3 \lim_{x \to 3} \frac{F(x) - F(3)}{x - 3} \\
&= 3F'(3) = 3\, \frac{\operatorname{sen} 3}{3} \qquad \text{(TFC1)} \\
&= \operatorname{sen} 3
\end{aligned}$$

Outra estratégia é usar a Regra de l'Hôspital.

Problemas

1. Se $x \operatorname{sen} \pi x = \int_0^{x^2} f(t)\, dt$, onde f é uma função contínua, encontre $f(4)$.
2. Encontre o valor mínimo da área da região sob a curva $y = x + 1/x$ de $x = a$ a $x = a + 1{,}5$, para todo $a > 0$.
3. Se $\int_0^4 e^{(x-2)^4}\, dx = k$, encontre o valor de $\int_0^4 x e^{(x-2)^4}\, dx$.
4. (a) Faça os gráficos de vários membros da família de funções $f(x) = (2cx - x^2)/c^3$ para $c > 0$ e analise as regiões entre essas curvas e o eixo x. Como estão relacionadas as áreas dessas regiões?
   (b) Demonstre sua conjectura em (a).
   (c) Examine novamente os gráficos da parte (a) e use-os para esboçar a curva traçada pelos vértices (pontos mais altos) da família de funções. Você pode imaginar que tipo de curva ela é?
   (d) Ache a equação da curva que você esboçou na parte (c).
5. Se $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1 + t^3}}\, dt$, em que $g(x) = \int_0^{\cos x} [1 + \operatorname{sen}(t^2)]\, dt$, encontre $f'(\pi/2)$.
6. Se $f(x) = \int_0^x x^2 \operatorname{sen}(t^2)\, dt$, encontre $f'(x)$.
7. Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 - \operatorname{tg} 2t)^{1/t}\, dt$.
8. A figura mostra duas regiões no primeiro quadrante: $A(t)$ é a área sob a curva $y = \operatorname{sen}(x^2)$ de 0 a t, e $B(t)$ é a área do triângulo com vértices O, P e $(t, 0)$. Encontre $\lim_{t \to 0^+} A(t)/B(t)$.





9. Encontre o intervalo $[a, b]$ para o qual o valor da integral $\int_a^b (2 + x - x^2)\, dx$ é um máximo.
10. Use uma integral para estimar a soma $\sum_{i=1}^{10\,000} \sqrt{i}$.
11. (a) Calcule $\int_0^n [\![x]\!]\, dx$, onde n é um inteiro positivo.
    (b) Calcule $\int_a^b [\![x]\!]\, dx$, onde a e b são números reais com $0 \leq a < b$.
12. Encontre $\frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \left(\int_1^{\operatorname{sen} t} \sqrt{1 + u^4}\, du \right) dt$.
13. Suponha que os coeficientes do polinômio cúbico $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ satisfaçam a equação
$$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = 0$$
    Mostre que a equação $P(x) = 0$ tem uma raiz entre 0 e 1. Você consegue generalizar esse resultado para um polinômio de grau n?
14. Um disco circular de raio r é usado em um evaporador e deve girar em um plano vertical. Ele deve ficar parcialmente submerso no líquido de tal forma que maximize a área molhada exposta do disco. Mostre que o centro do disco deve estar posicionado a uma altura $r/\sqrt{1 + \pi^2}$ acima da superfície do líquido.
15. Demonstre que se f for contínua, então $\int_0^x f(u)(x - u)\, du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\, dt \right) du$.
16. A figura mostra uma região formada por todos os pontos dentro de um quadrado que estão mais próximos de seu centro que de seus lados. Ache a área da região.
17. Calcule $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n + n}} \right)$.
18. Para um número c qualquer, seja $f_c(x)$ o menor dentre os dois números $(x - c)^2$ e $(x - c - 2)^2$. Definimos então $g(c) = \int_0^1 f_c(x)\, dx$. Encontre os valores máximo e mínimo de $g(c)$ se $-2 \leq c \leq 2$.

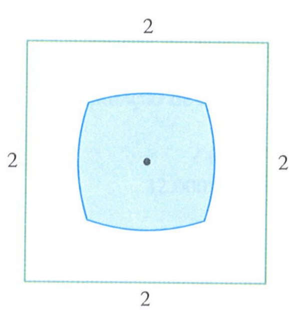


FIGURA PARA O PROBLEMA 16

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

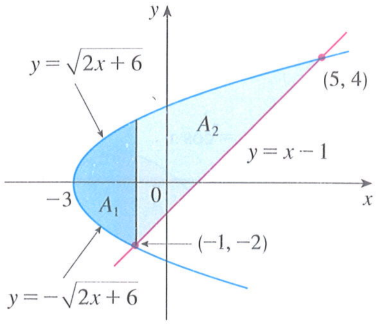


FIGURA 14

Devemos integrar entre os valores apropriados de $y = -2$ e $y = 4$. Logo,

$$A = \int_{-2}^{4} (x_R - x_L)\, dy$$

$$= \int_{-2}^{4} \left[(y + 1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy$$

$$= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y \Big]_{-2}^{4}$$

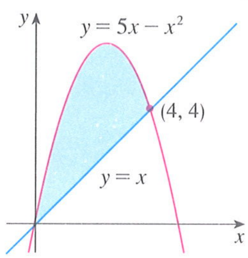
$$= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18$$

OBSERVAÇÃO Poderíamos ter encontrado a área no Exemplo 6, integrando em relação a x em vez de y, mas o cálculo é muito mais complicado. Isso significaria dividir a região em duas e calcular as áreas marcadas A_1 e A_2 na Figura 14. O método que usamos no Exemplo 6 é *muito* mais fácil.

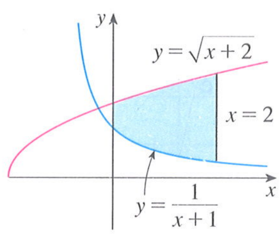
6.1 Exercícios

1–4 Encontre a área da região sombreada.

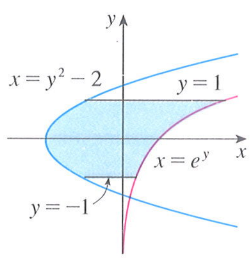
1.



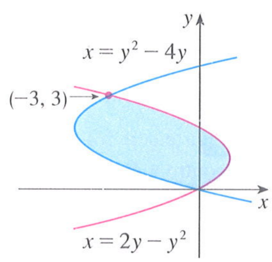
2.



3.



4.



5–12 Esboce a região delimitada pelas curvas indicadas. Decida quando integrar em relação a x ou y. Desenhe um retângulo aproximante típico e identifique sua altura e largura. Então, calcule a área da região.

5. $y = e^x$, $y = x^2 - 1$, $x = -1$, $x = 1$
6. $y = \operatorname{sen} x$, $y = x$, $x = \pi/2$, $x = \pi$
7. $y = x$, $y = x^2$
8. $y = x^2 - 2x$, $y = x + 4$
9. $y = 1/x$, $y = 1/x^2$, $x = 2$
10. $y = \operatorname{sen} x$, $y = 2x/\pi$, $x \geqslant 0$
11. $x = 1 - y^2$, $x = y^2 - 1$
12. $4x + y^2 = 12$, $x = y$

13–28 Esboce a região delimitada pelas curvas indicadas e encontre sua área.

13. $y = 12 - x^2$, $y = x^2 - 6$
14. $y = x^2$, $y = 4x - x^2$
15. $y = e^x$, $y = xe^x$, $x = 0$
16. $y = \cos x$, $y = 2 - \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$
17. $x = 2y^2$, $x = 4 + y^2$
18. $y = \sqrt{x - 1}$, $x - y = 1$
19. $y = \cos \pi x$, $y = 4x^2 - 1$
20. $x = y^4$, $y = \sqrt{2 - x}$, $y = 0$
21. $y = \operatorname{tg} x$, $y = 2 \operatorname{sen} x$, $-\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/3$
22. $y = x^3$, $x = y$
23. $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} 2x$, $x = 0$, $x = \pi/2$
24. $y = \cos x$, $y = 1 - \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$
25. $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{2}x$, $x = 9$
26. $y = |x|$, $y = x^2 - 2$
27. $y = 1/x$, $y = x$, $y = \frac{1}{4}x$, $x > 0$
28. $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 2x^2$, $x + y = 3$, $x \geqslant 0$

29–30 Use o cálculo para encontrar a área do triângulo com os vértices dados.

29. (0, 0), (3, 1), (1, 2)
30. (0, 5), (2, −2), (5, 1)

31–32 Calcule a integral e interprete-a como a área de uma região. Esboce a região.

31. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |\operatorname{sen} x - \cos 2x|\, dx$ **32.** $\displaystyle\int_0^{4} |\sqrt{x + 2} - x|\, dx$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

33–36 Use um gráfico para encontrar os valores aproximados das coordenadas x dos pontos de intersecção das curvas indicadas. A seguir, encontre a área aproximada da região delimitada pelas curvas.

33. $y = x\,\text{sen}(x^2), \quad y = x^4$

34. $y = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}, \quad y = x^5 - x, \quad x \geqslant 0$

35. $y = 3x^2 - 2x, \quad y = x^3 - 3x + 4$

36. $y = e^x, \quad y = 2 - x^2$

37–40 Represente graficamente a região entre as curvas e use a calculadora para encontrar a área correta até a quinta casa decimal.

37. $y = \dfrac{2}{1+x^4}, \quad y = x^2$

38. $y = e^{1-x^2}, \quad y = x^4$

39. $y = \text{tg}^2 x, \quad y = \sqrt{x}$

40. $y = \cos x, \quad y = x + 2\,\text{sen}^4 x$

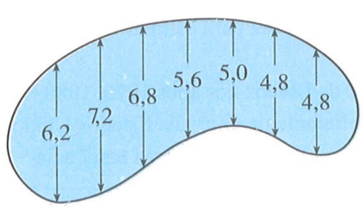
41. Use um sistema de computação algébrica para encontrar a área exata da região delimitada pelas curvas $y = x^5 - 6x^3 + 4x$ e $y = x$.

42. Esboce a região no plano xy definida pelas inequações $x - 2y^2 \geqslant 0$, $1 - x - |y| \geqslant 0$ e encontre sua área.

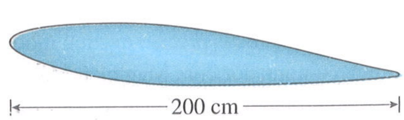
43. Os carros de corrida dirigidos por Chris e Kelly estão lado a lado na largada de uma corrida. A tabela mostra as velocidades de cada carro (em quilômetros por hora) durante os primeiros dez segundos da corrida. Use a Regra do Ponto Médio para estimar quão mais longe Kelly vai do que Chris durante os primeiros 10 segundos.

t	v_C	v_K	t	v_C	v_K
0	0	0	6	110	128
1	32	35	7	120	138
2	51	59	8	130	150
3	74	83	9	138	157
4	86	98	10	144	163
5	99	114			

44. As larguras (em metros) de uma piscina com o formato de rim foram medidas a intervalos de 2 metros, como indicado na figura. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a área da piscina.



45. É mostrada a seção transversal da asa de um avião. As medidas em centímetros da espessura da asa, em intervalos de 20 centímetros, são 5,8, 20,3, 26,7, 29,0, 27,6, 27,3, 23,8, 20,5, 15,1, 8,7, e 2,8. Utilize a Regra do Ponto Médio para estimar a área da secção transversal da asa.



46. Se a taxa de natalidade da população é $b(t) = 2\,200e^{0{,}024t}$ pessoas por ano e a taxa de mortalidade é $d(t) = 1\,460e^{0{,}018t}$ pessoas por ano, encontre a área entre estas curvas para $0 \leqslant t \leqslant 10$. O que esta área representa?

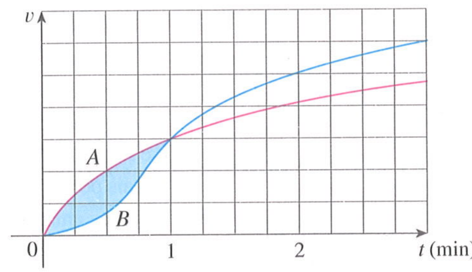
47. Dois carros, A e B, largam lado a lado e aceleram a partir do repouso. A figura mostra os gráficos de suas funções velocidade.

(a) Qual carro estará na frente após 1 minuto? Explique.

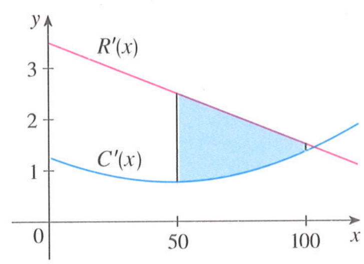
(b) Qual o significado da área da região sombreada?

(c) Qual carro estará na frente após 2 minutos? Explique.

(d) Estime quando os carros estarão novamente lado a lado.



48. A figura mostra os gráficos da função receita marginal R' e da função custo marginal C' para um fabricante. [Lembre-se, da Seção 4.7, de que $R(x)$ e $C(x)$ representam as receitas e custos quando x unidades são manufaturadas. Suponha que R e C sejam medidas em milhares de dólares.] Qual é o significado da área da região sombreada? Use a Regra do Ponto Médio para estimar o valor dessa quantidade.



49. A curva com equação $y^2 = x^2(x + 3)$ é chamada **cúbica de Tschirnhausen**. Se você colocar essa curva em um gráfico, verá que parte dela forma um laço. Encontre a área dentro desse laço.

50. Encontre a área da região delimitada pela parábola $y = x^2$, pela reta tangente a esta parábola em $(1, 1)$ e pelo eixo x.

51. Encontre o número b tal que a reta $y = b$ divida a região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$ em duas regiões com área igual.

52. (a) Encontre o número a tal que a reta $x = a$ bissecte a área sob a curva $y = 1/x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.

(b) Encontre o número b tal que a reta $y = b$ bissecte a área da parte (a).

53. Encontre os valores de c tais que a área da região delimitada pelas parábolas $y = x^2 - c^2$ e $y = c^2 - x^2$ seja 576.

54. Suponha que $0 < c < \pi/2$. Para qual valor de c a área da região delimitada pelas curvas $y = \cos x$, $y = \cos(x - c)$ e $x = 0$ é igual à área da região delimitada pelas curvas $y = \cos(x - c)$, $x = \pi$ e $y = 0$?

55. Para quais valores de m a reta $y = mx$ e a curva $y = x/(x^2 + 1)$ delimitam uma região? Encontre a área da região.