

EXEMPLO 5 Um homem anda ao longo de um caminho reto a uma velocidade de 1,5 m/s. Um holofote localizado no chão a 6 m do caminho é mantido focalizado no homem. A que taxa o holofote está girando quando o homem está a 8 m do ponto do caminho mais próximo da luz?

SOLUÇÃO Desenhemos a Figura 5, onde x é a distância entre o homem e o ponto do caminho mais próximo ao holofote. Seja θ o ângulo entre o feixe do holofote e a perpendicular ao caminho.

Foi-nos dado que $dx/dt = 1,5$ m/s e nos foi pedido para encontrar $d\theta/dt$ quando $x = 8$. A equação que relaciona x e θ pode ser escrita a partir da Figura 5:

$$\frac{x}{6} = \operatorname{tg} \theta \quad x = 6 \operatorname{tg} \theta$$

Derivando cada lado em relação a t , obtemos

$$\frac{dx}{dt} = 6 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

então

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{6} \cos^2 \theta \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{1}{6} \cos^2 \theta (1,5) = \frac{1}{4} \cos^2 \theta \end{aligned}$$

Quando $x = 8$, o comprimento do feixe é 10, logo $\cos \theta = \frac{3}{5}$ e

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{100} = 0,09$$

O holofote está girando a uma taxa de 0,09 rad/s.

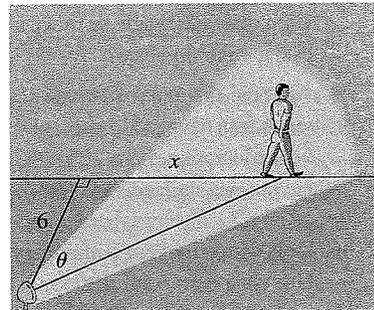


FIGURA 5

3.9 Exercícios

- Se V for o volume de um cubo com aresta de comprimento x e, à medida que o tempo passa, o cubo se expandir, encontre dV/dt em termos de dx/dt .
- (a) Se A é a área de um círculo com raio r e o círculo se expande à medida que o tempo passa, encontre dA/dt em termos de dr/dt .
(b) Suponha que petróleo vaze por uma ruptura de um petroleiro e espalhe-se em um padrão circular. Se o raio do petróleo derramado crescer a uma taxa constante de 1 m/s, quão rápido a área do vazamento está crescendo quando o raio é igual a 30 m?
- Cada lado de um quadrado está aumentando a uma taxa de 6 cm/s. A que taxa a área do quadrado está aumentando quando a área do quadrado for 16 cm²?
- O comprimento de um retângulo está aumentando a uma taxa de 8 cm/s e sua largura está aumentando numa taxa de 3 cm/s. Quando o comprimento for 20 cm e a largura for 10 cm, quão rápido a área do retângulo está aumentando?
- Um tanque cilíndrico com raio de 5 m está sendo enchido com água a uma taxa de 3 m³/min. Quão rápido a altura da água está aumentando?
- O raio de uma esfera está aumentando a uma taxa de 4 mm/s. Quão rápido o volume está aumentando quando o diâmetro for 80 mm?
- Suponha $y = \sqrt{2x + 1}$, onde x e y são funções de t .
(a) Se $dx/dt = 3$, encontre dy/dt quando $x = 4$.
(b) Se $dy/dt = 5$, encontre dx/dt quando $x = 12$.
- Suponha $4x^2 + 9y^2 = 36$, onde x e y são funções de t .
(a) Se $dy/dt = \frac{1}{3}$, encontre dx/dt quando $x = 2$ e $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.
(b) Se $dx/dt = 3$, encontre dy/dt quando $x = -2$ e $y = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.
- Se $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $dx/dt = 5$ e $dy/dt = 4$, encontre dz/dt quando $(x, y, z) = (2, 2, 1)$.
- Uma partícula está se movimentando ao longo de uma hipérbole $xy = 8$. Quando atinge o ponto $(4, 2)$, a coordenada y está decrescendo a uma taxa de 3 cm/s. Quão rápido a coordenada x do ponto está variando nesse momento?

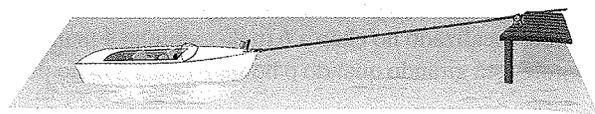
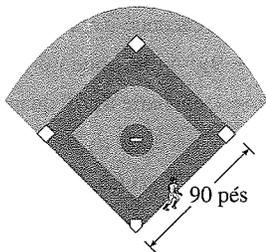
11–14

- Quais são as quantidades dadas no problema?
- Qual é a incógnita?
- Faça um desenho da situação para qualquer instante t .

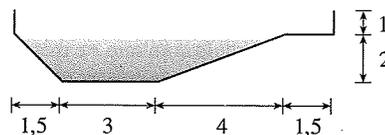
(d) Escreva uma equação que relacione as quantidades.

(e) Termine a resolução do problema.

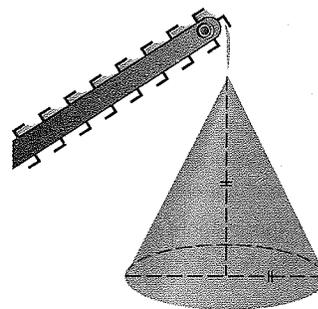
11. Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 2 km, a 800 km/h, e passa diretamente sobre uma estação de radar. Encontre a taxa segundo a qual a distância entre o avião e a estação aumenta quando ele está a 3 km além da estação.
12. Se uma bola de neve derrete de forma que a área de sua superfície decresce a uma taxa de $1 \text{ cm}^2/\text{min}$, encontre a taxa segundo a qual o diâmetro decresce quando o diâmetro é 10 cm.
13. Uma luz de rua é colocada no topo de um poste de 6 metros de altura. Um homem com 2 m de altura anda, afastando-se do poste com velocidade de 1,5 m/s ao longo de uma trajetória reta. Com que velocidade se move a ponta de sua sombra quando ele está a 10 m do poste?
14. Ao meio-dia, o navio A está a 150 km a oeste do navio B. O navio A está navegando para o leste a 35 km/h e o navio B está navegando para norte a 25 km/h. Quão rápido a distância entre os navios está variando às 16h?
15. Dois carros iniciam o movimento partindo de um mesmo ponto. Um viaja para o sul a 30 km/h e o outro viaja para o oeste a 72 km/h. A qual taxa a distância entre os carros está aumentando duas horas depois?
16. Um holofote sobre o solo ilumina uma parede 12 m distante dele. Se um homem de 2 m de altura anda do holofote em direção à parede a uma velocidade de 1,6 m/s, quão rápido o comprimento de sua sombra diminui sobre a parede quando ele está a 4 m dela?
17. Um homem começa a andar para o norte a 1,2 m/s a partir de um ponto P . Cinco minutos depois uma mulher começa a andar para o sul a 1,6 m/s de um ponto 200 m a leste de P . A que taxa as pessoas estão se distanciando 15 min após a mulher começar a andar?
18. Uma quadra de beisebol é um quadrado com um lado de 90 pés (27,432 m). Um bateador atinge a bola e corre em direção à primeira base com uma velocidade de 24 pés/s (7,3152 m/s).
 - (a) A que taxa decresce sua distância da segunda base quando ele está a meio caminho da primeira base?
 - (b) A que taxa aumenta sua distância da terceira base no mesmo momento?



21. Ao meio-dia, o navio A está a 100 km a oeste do navio B. O navio A está navegando para o sul a 35 km/h e o navio B está navegando para norte a 25 km/h. Quão rápido a distância entre os navios está variando às 16h?
22. Uma partícula move-se ao longo da curva $y = 2 \sin(\pi x/2)$. Quando a partícula passa pelo ponto $(\frac{1}{3}, 1)$, sua coordenada x cresce a uma taxa de $\sqrt{10}$ cm/s. Quão rápido a distância da partícula à sua origem está variando nesse momento?
23. Está vazando água de um tanque cônico invertido a uma taxa de 10.000 cm³/min. Ao mesmo tempo, água está sendo bombeada para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem 6 m de altura e o diâmetro no topo é de 4 m. Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de 20 cm/min quando a altura da água for 2 m, encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada dentro do tanque.
24. Um cocho tem 6 m de comprimento, e suas extremidades têm a forma de triângulos isósceles com 1 m de base e 50 cm de altura. Se o cocho for preenchido com água a uma taxa de 1,2 m³/min, quão rápido o nível da água estará subindo quando ela tiver 30 cm de profundidade?
25. Um cocho de água tem 10 m de comprimento e uma secção transversal com a forma de um trapezoide isósceles com 30 cm de comprimento na base, 80 cm de extensão no topo e 50 cm de altura. Se o cocho for preenchida com água a uma taxa de 0,2 m³/min, quão rápido o nível da água estará subindo quando ela tiver 30 cm de profundidade?
26. Uma piscina tem 5 m de largura por 10 m de comprimento, 1 m de profundidade na parte rasa e 3 m na parte mais funda. Sua secção transversal está mostrada na figura. Se a piscina for enchida a uma taxa de 0,1 m³/min, quão rápido o nível da água estará subindo quando sua profundidade no ponto mais profundo for de 1 m?



27. Uma esteira transportadora está descarregando cascalho a uma taxa de 3 m³/min, constituindo uma pilha na forma de cone com o diâmetro da base e altura sempre igual. Quão rápido a altura da pilha cresce quando está a 3 m de altura?



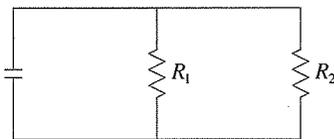
19. A altura de um triângulo está aumentando a uma taxa de 1 cm/min enquanto a área do triângulo está aumentando a uma taxa de 2 cm²/min. A que taxa a base do triângulo está variando quando a altura for 10 cm e a área for 100 cm²?
20. Um bote é puxado em direção ao ancoradouro por uma corda que está atada na proa do bote e que passa por uma polia sobre o ancoradouro (colocada 1 m mais alto que a proa). Se a corda for puxada a uma taxa de 1 m/s, quão rápido se aproxima o bote do ancoradouro, quando ele estiver a 8 m dele?

28. Uma pipa a 50 m acima do solo move-se horizontalmente a uma velocidade de 2 m/s. A que taxa decresce o ângulo entre a linha e a horizontal depois de 100 m de linha serem soltos?
29. Dois lados de um triângulo têm 4 m e 5 m, e o ângulo entre eles está crescendo a uma taxa de 0,06 rad/s. Encontre a taxa segundo a qual a área está crescendo quando o ângulo entre os lados de comprimento fixo for $\pi/3$.
30. Quão rápido o ângulo entre o solo e a escada está variando no Exemplo 2 quando a parte de baixo da escada estiver a 3 m da parede?
31. O topo de uma escada desliza, por uma parede vertical a uma taxa de 0,15 m/s. No momento em que a base da escada está a 3 m da parede, ela afasta-se da parede à velocidade de 0,2 m/s. Qual o comprimento da escada?

32. Uma torneira está preenchendo uma pia hemisférica de 60 cm de diâmetro com água a uma taxa de 2 L/min. Encontre a taxa na qual a água está aumentando na pia quando estiver cheia até a metade. [Use os seguintes fatos: 1 L é 1 000 cm³. O volume de uma porção de uma esfera de raio r com altura h a partir da base é $V = \pi(rh^2 - \frac{1}{3}h^3)$, como será mostrado no Capítulo 6.]
33. A Lei de Boyle afirma que quando uma amostra de gás está sendo comprimida a uma temperatura constante, a pressão P e o volume V satisfazem a equação $PV = C$, onde C é uma constante. Suponha que, em um certo momento, o volume seja de 600 cm³, a pressão de 150 kPa, e a pressão cresça a uma taxa de 20 kPa/min. A que taxa está decrescendo o volume nesse instante?
34. Quando o ar se expande adiabaticamente (sem ganhar ou perder calor), sua pressão P e volume V estão relacionados pela equação $PV^{1.4} = C$, onde C é uma constante. Suponha que em um certo instante o volume seja de 400 cm³ e a pressão, 80 kPa, e esteja decrescendo a uma taxa de 10 kPa/min. A que taxa está crescendo o volume nesse momento?
35. Se dois resistores com resistências R_1 e R_2 estão conectados em paralelo, como na figura, então a resistência total R , medida em ohms (Ω), é dada por

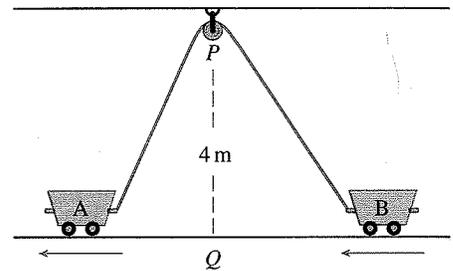
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Se R_1 e R_2 estão aumentando a taxas de 0,3 Ω/s e 0,2 Ω/s , respectivamente, quão rápido R está variando quando $R_1 = 80 \Omega$ e $R_2 = 100 \Omega$?



36. Nos peixes, o peso B do cérebro como uma função do peso corporal W foi modelado pela função potência $B = 0,007W^{2/3}$, onde B e W são medidos em gramas. Um modelo para o peso corporal como uma função de comprimento de corpo L (medido em centímetros) é $W = 0,12L^{2.53}$. Se, em 10 milhões de anos, o comprimento médio de uma certa espécie de peixes evoluiu de 15 cm para 20 cm a uma taxa constante, quão rápido estava crescendo o cérebro dessa espécie quando o comprimento médio era de 18 cm?
37. Dois lados de um triângulo têm comprimento de 12 m e 15 m. O ângulo entre eles está aumentando a uma taxa de 2°/min. A que taxa o comprimento de um terceiro lado está aumentando quando o ângulo entre os lados de comprimento fixo for 60°?

38. Duas carretas, A e B, estão conectadas por uma corda de 12 m que passa por uma polia P (veja a figura). O ponto Q no chão está 4 m diretamente abaixo de P e entre as carretas. A carreta A está sendo puxada para longe de Q a uma velocidade de 0,5 m/s. A que velocidade a carreta B está se movendo em direção a Q no instante em que a carreta A estiver 3 m de Q ?



39. Uma câmera de televisão está posicionada a 1.200 m de uma base de lançamento de foguete. O ângulo de elevação da câmera deve variar a uma taxa na qual possa focalizar o foguete. O mecanismo de foco da câmera também deve levar em conta o aumento da distância entre a câmera e o foguete em subida. Vamos supor que o foguete suba verticalmente e com velocidade de 200 m/s quando já tiver subido 900 m.
- (a) Quão rápido estará variando a distância da câmera ao foguete naquele momento?
- (b) Se a câmera de televisão se mantiver sempre na direção do foguete, quão rápido estará variando o ângulo de elevação dela naquele mesmo momento?
40. Um farol está localizado em uma pequena ilha, e a distância entre ele e o ponto P mais próximo em uma costa reta do continente é de 3 km. Sua luz gira quatro revoluções por minuto. Quão rápido o feixe de luz está se movendo ao logo da costa quando ele estiver a 1 km de P ?
41. Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 5 km e passa diretamente sobre um telescópio no chão. Quando o ângulo de elevação for $\pi/3$, esse ângulo estará diminuindo a uma taxa de $\pi/6$ rad/min. A que velocidade o avião está viajando naquele instante?
42. Uma roda-gigante com raio de 10 m está girando a uma taxa de uma revolução a cada dois minutos. Quão rápido um passageiro estará subindo quando seu assento estiver 16 m acima do nível do solo?
43. Um avião voando a uma velocidade constante de 300 km/h passa sobre uma estação de radar no solo a uma altitude de 1 km e subindo em um ângulo de 30°. A que taxa está crescendo a distância do avião em relação à estação de radar 1 minuto mais tarde?
44. Duas pessoas começam a andar a partir do mesmo ponto. Uma anda para o leste a 4 km/h e a outra anda para nordeste a 2 km/h. Quão rápido a distância entre as pessoas está variando após 15 minutos?
45. Um velocista corre numa pista circular com raio de 100 m numa velocidade constante de 7 m/s. O amigo do corredor está parado a uma distância 200 m do centro da pista. Quão rápido a distância entre os amigos está variando quando a uma distância entre eles é de 200 m?
46. O ponteiro dos minutos de um relógio mede 8 mm, enquanto o das horas tem 4 mm de comprimento. Quão rápido está variando a distância entre a ponta dos ponteiros à 1 hora?