bendo de um boato no tempo t, então a derivada dp/dt representa a taxa de divulgação do boato (veja o Exercício 84 na Seção 3.4).

Uma Única Ideia, Muitas Interpretações

A velocidade, a densidade, a corrente, a potência e o gradiente da temperatura na física; a taxa de reação e a compressibilidade na química; a taxa de crescimento e o gradiente da velocidade do sangue na biologia; o custo e o lucro marginal na economia; a taxa do fluxo do calor na geologia; a taxa de desenvolvimento do desempenho na psicologia; a taxa de divulgação de um boato na sociologia – todos esses são casos especiais de um único conceito matemático, a derivada.

Isto é uma ilustração do fato de que parte do poder da matemática está em sua abstração. Um único conceito matemático abstrato (tal como a derivada) pode ter interpretações diferentes para cada uma das ciências. Quando desenvolvemos as propriedades do conceito matemático de uma vez por todas, podemos voltar e aplicar esses resultados em todas as ciências. Isso é muito mais eficiente do que desenvolver as propriedades de conceitos especiais para cada ciência separada. O matemático Francês Joseph Fourier (1768–1830) colocou de forma sucinta: "A matemática compara os mais diversos fenômenos e descobre as analogias secretas que os unem".

3.7 Exercícios

1–4 Uma partícula move-se segundo a lei do movimento $s = f(t)$, $t \geqslant 0$, em que t é medido em segundos e s, em metros.

(a) Encontre a velocidade no tempo t.
(b) Qual a velocidade depois de 3 s?
(c) Quando a partícula está em repouso?
(d) Quando a partícula está se movendo no sentido positivo?
(e) Encontre a distância total percorrida durante os 8 primeiros segundos.
(f) Desenhe um diagrama como na Figura 2 para ilustrar o movimento da partícula.
(g) Encontre a aceleração no tempo t e depois de 3 s.
(h) Faça os gráficos das funções posição, velocidade e aceleração para $0 \leqslant t \leqslant 8$.
(i) Quando a partícula está acelerando? Quando está freando?

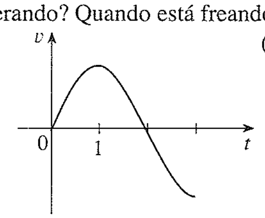
1. $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$

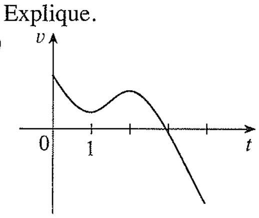
2. $f(t) = 0{,}01t^4 - 0{,}04t^3$

3. $f(t) = \cos(\pi t/4), \quad t \leqslant 10$

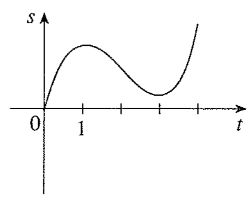
4. $f(t) = te^{-t/2}$

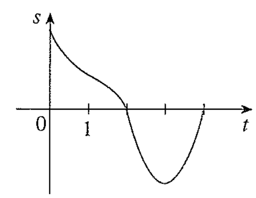
5. São mostrados os gráficos das funções *velocidade* de duas partículas, com t medido em segundos. Quando cada partícula está acelerando? Quando está freando? Explique.

(a)


(b)


6. São mostrados os gráficos das funções *posição* de duas partículas, com t medido em segundos. Quando cada partícula está acelerando? Quando está freando? Explique.

(a)


(b)


7. A altura (em metros) de um projétil lançado verticalmente para cima de um ponto a 2 m acima do nível do solo com velocidade inicial de 24,5 m/s é $h = 2 + 24{,}5t - 4{,}9t^2$ após t segundos.

(a) Encontre a velocidade após 2 s e após 4 s.
(b) Quando o projétil alcança sua altura máxima?
(c) Qual é a altura máxima?
(d) Quando ele atinge o solo?
(e) Com qual velocidade ele atinge o solo?

8. Se uma bola for atirada verticalmente para cima com velocidade de 24,5 m/s, então sua altura depois de t segundos será $s = 24{,}5t - 4{,}9t^2$.

(a) Qual a altura máxima atingida pela bola?
(b) Qual a velocidade da bola quando estiver 29,4 m acima do solo na subida? E na descida?

9. Se uma pedra for atirada verticalmente para cima sobre a superfície de Marte, com velocidade de 15 m/s, sua altura após t segundos será $h = 15t - 1{,}86t^2$.

(a) Qual a velocidade da pedra após 2 s?
(b) Qual a velocidade da pedra quando sua altura for 25 m acima do solo na subida? E na descida?

10. Um partícula se move com uma função posição

$$s = t^4 - 4t^3 - 20t^2 + 20t \qquad t \geqslant 0$$

(a) Quando a partícula tem a velocidade de 20 m/s?
(b) Quando a aceleração é 0? Qual é o significado deste valor de t?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

11. (a) Uma empresa produz *chips* de computador a partir de placas quadradas de silício. Ela quer manter o comprimento do lado da placa muito próximo de 15 mm e deseja saber como a área $A(x)$ da placa varia quando mudamos o comprimento x do lado. Encontre $A'(15)$ e explique seu significado nessa situação.

(b) Mostre que a taxa de variação da área de um quadrado em relação ao comprimento de seu lado é a metade de seu perímetro. Tente explicar geometricamente por que isso é verdade, desenhando um quadrado cujo comprimento de lado x é aumentado em Δx. Como você pode aproximar a variação resultante ΔA se Δx for pequeno?

12. (a) Os cristais de cloreto de sódio crescem facilmente em forma de cubos ao permitir que uma solução de água e de cloreto de sódio evapore lentamente. Se V for o volume de cada cubo com comprimento de lado x, calcule dV/dx quando $x = 3$ mm e explique seu significado.

(b) Mostre que a taxa de variação do volume de cada cubo em relação ao comprimento da aresta é igual à metade da área da superfície do cubo. Explique geometricamente por que esse resultado é verdadeiro, mostrando um argumento análogo ao do Exercício 11(b).

13. (a) Encontre a taxa de variações média da área de um círculo em relação a seu raio r quando r varia de

(i) 2 a 3 (ii) 2 a 2,5 (iii) 2 a 2,1

(b) Encontre a taxa de variação instantânea quando $r = 2$.

(c) Mostre que a taxa de variação da área de um círculo em relação a seu raio (para qualquer r) é igual à circunferência do círculo. Tente explicar geometricamente por que isso é verdadeiro, desenhando um círculo cujo raio foi aumentado em Δr. Como você pode aproximar a variação resultante ΔA se Δr for pequeno?

14. A queda de uma pedra em um lago gera um onda circular que cresce a uma velocidade de 60 cm/s. Encontre a taxa em que a área dentro do círculo está aumentando após (a) 1 s, (b) 3 s e (c) 5 s. O que você conclui?

15. Um balão esférico começa a ser inflado. Encontre a taxa de crescimento da área da superfície ($S = 4\pi r^2$) em relação ao raio r quando r é (a) 20 cm, (b) 40 cm e (c) 60 cm. Que conclusão você pode tirar?

16. (a) O volume de uma célula esférica de tamanho crescente é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, onde o raio r é medido em micrômetros ($1\ \mu m = 10^{-6}$ m). Encontre a taxa de variação média de V em relação a r quando r varia de

(i) 5 a 8 μm (ii) 5 a 6 μm (iii) 5 a 5,1 μm

(b) Encontre a taxa instantânea de variação V em relação a r quando $r = 5\ \mu$m.

(c) Mostre que a taxa de variação do volume de uma esfera em relação a seu raio é igual à área de sua superfície. Explique geometricamente por que esse resultado é verdadeiro. Mostre um argumento análogo ao do Exercício 13(c).

17. A massa da parte de uma barra de metal que se encontra entre sua extremidade esquerda e um ponto a x metros à direita é $3x^2$ kg. Encontre a densidade linear (veja o Exemplo 2) quando x for (a) 1 m, (b) 2 m e (c) 3 m. Onde a densidade é maior? E menor?

18. Se um tanque tem 5 000 galões de água, que escoa pelo fundo em 40 minutos, então a Lei de Torricelli dá o volume V de água que restou no tanque depois de t minutos como

$$V = 5\,000\left(1 - \tfrac{1}{40}t\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 40$$

Encontre a taxa segundo a qual a água está escoando do tanque depois de (a) 5 min, (b) 10 min, (c) 20 min e (d) 40 min. Em que instante o escoamento é mais rápido? E mais vagaroso? Resuma o que você encontrou.

19. A quantidade de carga Q, em coloumbs (C), que passa através de um ponto em um fio até o instante t (medido em segundos) é dada por $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Encontre a corrente quando (a) $t = 0{,}5$ s e (b) $t = 1$ s. [Veja o Exemplo 3. A unidade da corrente é um ampère (1 A = 1 C/s).] Quando a corrente é mais baixa?

20. A Lei de Gravitação de Newton diz que a intensidade F da força exercida por um corpo de massa m sobre um corpo de massa M é

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

onde G é a constante gravitacional e r é a distância entre os corpos.

(a) Encontre dF/dr e explique seu significado. O que o sinal de menos indica?

(b) Suponha que seja conhecido que a Terra atrai um objeto com uma força que decresce a uma taxa de 2 N/km quando $r = 20.000$ km. Quão rápido essa força varia quando $r = 10.000$ km?

21. A força F agindo num corpo com massa m e velocidade v é a taxa de variação de momentum: $F = (d/dt)(mv)$. Se m for uma constante, torna-se $F = ma$, onde $a = dv/dt$ é a aceleração. Mas na teoria da relatividade a massa de uma partícula varia com v da seguinte forma: $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, onde m_0 é a massa da partícula em repouso e c é a velocidade da luz. Mostre que

$$F = \frac{m_0 a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$$

22. Algumas das maiores marés no mundo ocorrem na Bay of Fundy, na Costa Atlântica do Canadá. No Cabo Hopewell a profundidade da água em maré baixa é cerca de 2,0 m e em maré alta é cerca de 12,0 m. O período natural de oscilação é pouco mais de 12 horas e, em 30 de junho de 2009, a maré alta ocorreu às 6h45. Isso ajuda a explicar o seguinte modelo para a profundidade de água D (em metros) como uma função do tempo t (em horas após a meia-noite) naquele dia:

$$D(t) = 7 + 5\cos[0{,}503(t - 6{,}75)]$$

Em que velocidade a maré aumentava (ou diminuía) nos seguintes horários?

(a) 3 h 00 (b) 6 h 00
(c) 9 h 00 (d) Meio-dia

23. A Lei de Boyle afirma que quando uma amostra de gás é comprimida a uma temperatura constante, o produto da pressão pelo volume permanece constante: $PV = C$.

(a) Encontre a taxa de variação do volume em relação à pressão.

(b) Uma amostra de gás está em um recipiente à baixa pressão e é regularmente comprimida à temperatura constante por 10 minutos. O volume decresce mais rapidamente no início ou no final dos 10 minutos? Explique.

(c) Demonstre que a compressibilidade isotérmica (veja o Exemplo 5) é dada por $\beta = 1/P$.

24. Se, no Exemplo 4, uma molécula do produto C é produzida de uma molécula do reagente A e de uma molécula do reagente B, e as concentrações iniciais de A e B têm um mesmo valor $[A] = [B] = a$ mols/L, então

$$[C] = a^2kt/(akt + 1)$$

onde k é uma constante.

(a) Encontre a taxa de reação no instante t.

(b) Mostre que, se $x = [\mathrm{C}]$, então

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2$$

(c) O que acontece com a concentração quando $t \to \infty$?

(d) O que acontece com a taxa de reação quando $t \to \infty$?

(e) O que os resultados da parte (c) e (d) significam em termos práticos?

25. No Exemplo 6, consideramos uma população de bactérias que dobra a cada hora. Suponha que outra população de bactérias triplique a cada hora e comece com 400 bactérias. Encontre a expressão para o número n de bactérias depois de t horas e use-a para estimar a taxa de crescimento da população de bactérias depois de 2,5 horas.

26. O número de células de levedura em uma cultura de laboratório aumenta rapidamente no início, mas eventualmente estabiliza. A população é modelada pela função

$$n = f(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,7t}}$$

onde t é medido em horas. No tempo $t = 0$ a população é de 20 células e está crescendo a uma taxa de 12 células/hora. Encontre os valores de a e b. De acordo com este modelo, o que ocorre com a população de levedura depois de muito tempo?

27. A tabela fornece a população mundial no século XX.

Ano	População (em milhões)	Ano	População (em milhões)
1900	1.650	1960	3.040
1910	1.750	1970	3.710
1920	1.860	1980	4.450
1930	2.070	1990	5.280
1940	2.300	2000	6.080
1950	2.560		

(a) Estime a taxa de crescimento populacional em 1920 e em 1980 fazendo a média das inclinações de duas retas secantes.

(b) Use uma calculadora gráfica ou computador para achar uma função cúbica (um polinômio de terceiro grau) que modele os dados (veja a Seção 1.2).

(c) Utilize o modelo da parte (b) para achar um modelo para a taxa de crescimento populacional no século XX.

(d) Use a parte (c) para estimar as taxas de crescimento em 1920 e 1980. Compare com sua estimativa da parte (a).

(e) Estime a taxa de crescimento em 1985.

28. A tabela mostra como a média de idade das mulheres japonesas quando se casam pela primeira vez variou na última metade do século XX.

t	$A(t)$	t	$A(t)$
1950	23,0	1980	25,2
1955	23,8	1985	25,5
1960	24,4	1990	25,9
1965	24,5	1995	26,3
1970	24,2	2000	27,0
1975	24,7		

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para modelar esses dados por um polinômio de quarto grau.

(b) Use a parte (a) para achar um modelo para $A'(t)$.

(c) Estime a taxa de variação da idade no primeiro casamento dessas mulheres em 1990.

(d) Faça o gráfico dos pontos dados e dos modelos para A e A'.

29. Considere a lei de fluxo laminar fornecida no Exemplo 7. Considere um vaso sanguíneo com raio 0,01 cm, comprimento 3 cm, diferença de pressão 3.000 dinas/cm^2 e viscosidade $\eta = 0{,}027$.

(a) Encontre a velocidade do sangue ao longo do eixo central $r = 0$, no raio $r = 0{,}005$ cm e na parede $r = R = 0{,}01$ cm.

(b) Encontre o gradiente da velocidade em $r = 0$, $r = 0{,}005$ e $r = 0{,}01$.

(c) Onde a velocidade é máxima? Onde a velocidade varia mais?

30. A frequência da vibração de uma corda de violino é dada por

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

onde L é o comprimento da corda, T é sua tensão e ρ é sua densidade linear. [Veja o Capítulo 11 em D. E. Hall, *Musical Acoustics*, 3. ed. (Pacific Grover, CA, Brooks/Cole, 2002).]

(a) Encontre a taxa de variação da frequência em relação

(i) ao comprimento (quando T e ρ são constantes),

(ii) à tensão (quando L e ρ são constantes), e

(iii) à densidade linear (quando L e T são constantes).

(b) A intensidade de uma nota (quão alta ou baixa soa a nota) é determinada pela frequência f. (Quanto maior a frequência, maior a intensidade.) Use os sinais das derivadas da parte (a) para determinar o que acontece com a intensidade de uma nota

(i) quando o comprimento efetivo de uma corda é decrescido colocando-se o dedo sobre ela, de forma que uma porção menor da corda vibre;

(ii) quando a tensão é aumentada girando-se a cravelha (pino de afinação);

(iii) quando a densidade linear é aumentada, mudando-se a corda.

31. O custo, em dólares, da produção de x metros de certo tecido é

$$C(x) = 1.200 + 12x - 0{,}1x^2 + 0{,}0005x^3$$

(a) Encontre a função de custo marginal.

(b) Encontre $C'(200)$ e explique seu significado. O que ele prediz?

(c) Compare $C'(200)$ com o custo da manufaturação do 201º metro de tecido.

32. A função de custo para um certo produto é

$$C(x) = 339 + 25x - 0{,}09x^2 + 0{,}0004x^3$$

(a) Encontre e interprete $C'(100)$.

(b) Compare $C'(100)$ com o custo de produzir o 101º item.

33. Se $p(x)$ for o valor total da produção quando há x trabalhadores em uma fábrica, então a *produtividade média* da força de trabalho da fábrica é

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

(a) Encontre $A'(x)$. Por que a companhia precisa empregar mais trabalhadores se $A'(x) > 0$?

(b) Mostre que $A'(x) > 0$ se $p'(x)$ for maior que a produtividade média.

34. Se R denota a reação do corpo a algum estímulo de intensidade x, a *sensibilidade* S é definida como a taxa de variação da reação em relação a x. Um exemplo ocorre quando a luminosidade x de uma fonte de luz é aumentada e o olho reage diminuído a área R da pupila. A fórmula experimental

$$R = \frac{40 + 24x^{0,4}}{1 + 4x^{0,4}}$$

tem sido usada para modelar a dependência de R com respeito a x, quando R é medido em milímetros quadrados e x, em uma unidade apropriada de luminosidade.

(a) Encontre a sensibilidade.

(b) Ilustre a parte (a) traçando ambos R e S como funções de x. Comente sobre os valores de R e S em baixos níveis de luminosidade. Isso é o que você esperaria?

35. A lei dos gases para um gás ideal à temperatura absoluta T (em kelvins), pressão P (em atmosferas) e volume V (em litros) é $PV = nRT$, em que n é o número de mols de gás e $R = 0{,}0821$ é a constante do gás. Suponha que, em um certo instante, $P = 8{,}0$ atm, e está crescendo a uma taxa de 0,10 atm/min, e $V = 10$ L, e está decrescendo a uma taxa de 0,15 L/min. Encontre a taxa de variação de T em relação ao tempo naquele instante, se $n = 10$ mols.

36. Em uma fazenda de piscicultura, uma população de peixes é colocada dentro de um pequeno lago e removida regularmente. Um modelo para a taxa de variação da população é dado pela equação

$$\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t)$$

onde r_0 é a taxa de nascimento dos peixes, P_c é a população máxima que o pequeno lago pode manter (ou seja, sua *capacidade de suporte*) e β é a porcentagem da população que é recolhida.

(a) Qual o valor de dP/dt que corresponde à população estável?

(b) Se o pequeno lago pode manter 10.000 peixes, a taxa de nascimento é 5% e a taxa de colheita, 4%, encontre o nível estável da população.

(c) O que acontece se β for aumentada para 5%?

37. No estudo de ecossistemas, o modelo *predador-presa* é muitas vezes usado para estudar a interação entre as espécies. Considere uma população de lobos da tundra, dada por $W(t)$, e caribus, dada por $C(t)$, no norte do Canadá. A interação foi modelada pelas equações:

$$\frac{dC}{dt} = aC - bCW \qquad \frac{dW}{dt} = -cW + dCW$$

(a) Que valores de dC/dt e dW/dt correspondem às populações estáveis?

(b) Como representar matematicamente a afirmação: "O caribu está extinto."?

(c) Suponha que $a = 0{,}05$, $b = 0{,}001$, $c = 0{,}05$, e $d = 0{,}0001$. Encontre todos os pares (C, W) que levam a populações estáveis. Segundo esse modelo, é possível para as espécies viverem em equilíbrio, ou uma ou as duas espécies acabarão por se extinguir?

3.8 Crescimento e Decaimento Exponenciais

Em muitos fenômenos naturais, quantidades crescem ou decaem a uma taxa proporcional a seu tamanho. Por exemplo, se $y = f(t)$ for o número de indivíduos numa população animal ou de bactérias no instante t, então parece plausível esperar que a taxa de crescimento $f'(t)$ seja proporcional à população $f(t)$; ou seja, $f'(t) = kf(t)$ para alguma constante k. De fato, sob as condições ideais (ambiente ilimitado, nutrição adequada, imunidade a doenças), o modelo matemático dado pela equação $f'(t) = kf(t)$ prediz o que acontece na realidade com bastante precisão. Outro exemplo ocorre na física nuclear, onde a massa de uma substância radioativa decai numa taxa proporcional à massa. Na química, a taxa de uma reação unimolecular de primeira ordem é proporcional à concentração da substância. Em finanças, o valor de uma conta de poupança com juros contabilizados continuamente aumenta a uma taxa proporcional a esse valor.

Em geral, se $y(t)$ for o valor de uma quantidade y no instante t, e se a taxa de variação de y com relação a t for proporcional a seu tamanho $y(t)$ em qualquer instante, então

1
$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky}$$

onde k é uma constante. A Equação 1 é às vezes chamada **lei de crescimento natural** (se $k > 0$) ou **lei de decaimento natural** (se $k < 0$). Ela é chamada **equação diferencial**, pois envolve uma função desconhecida y e sua derivada dy/dt.

Não é difícil pensar em uma solução para a Equação 1. Essa equação nos pede para encontrar uma função cuja derivada seja uma constante multiplicada por ela própria. Já encontramos funções dessas neste capítulo. Qualquer função exponencial da forma $y(t) = Ce^{kt}$, onde C é uma constante, satisfaz

$$y'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = ky(t)$$

Veremos na Seção 9.4 que *qualquer* função que satisfaça $dy/dt = ky$ deve ser da forma $y = Ce^{kt}$. Para perceber o significado da constante C, observamos que

$$y(0) = Ce^{k\cdot 0} = C$$