A velocidade, densidade e corrente não são as únicas taxas importantes na física. São inclusas também a potência (a taxa segundo a qual um trabalho é realizado), a taxa do fluxo de calor, o gradiente da temperatura (a taxa de variação da temperatura em relação à posição) e a taxa de decaimento radioativo de uma substância na física nuclear.

Química

EXEMPLO 4 Uma reação química resulta na formação de uma ou mais substâncias (conhecidas como *produtos*) a partir de um ou mais materiais iniciais (ditos *reagentes*). Por exemplo, a "equação"

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

indica que duas moléculas de hidrogênio e uma molécula de oxigênio formam duas moléculas de água. Consideremos a reação

$$A + B \rightarrow C$$

onde A e B são reagentes e C é o produto. A **concentração** de um reagente A é o número de mols (1 mol $= 6{,}022 \times 10^{23}$ moléculas) por litro e é denotada por [A]. A concentração varia durante a reação, logo [A], [B] e [C] são funções do tempo (t). A taxa média da reação do produto C sobre um intervalo de tempo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ é

$$\frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{[C](t_2) - [C](t_1)}{t_2 - t_1}$$

Mas os químicos estão mais interessados na **taxa de reação instantânea**, obtida fazendo-se o limite da taxa de reação média quando o intervalo de tempo Δt tende a 0:

$$\text{taxa de reação} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{d[C]}{dt}$$

Uma vez que a concentração do produto aumenta quando a reação avança, a derivada $d[C]/dt$ será positiva. (Você pode ver intuitivamente que a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função crescente é positiva.) Assim, a taxa de reação de C é positiva. A concentração de reagentes, entretanto, decresce durante a reação; logo, para tornar as taxas de reação de A e B números positivos, colocamos sinais de menos na frente das derivadas $d[A]/dt$ e $d[B]/dt$. Uma vez que [A] e [B] decrescem na mesma taxa que [C] aumenta, temos

$$\text{taxa de reação} = \frac{d[C]}{dt} = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt}$$

Mais geralmente, o resultado é que para uma reação da forma

$$aA + bB \rightarrow cC + dD$$

temos

$$-\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[D]}{dt}$$

A taxa de reação pode ser determinada graficamente. Em alguns casos podemos usar a taxa de reação para achar fórmulas explícitas para as concentrações como funções do tempo que nos permitem calcular a taxa de reação (veja o Exercício 24).

EXEMPLO 5 Uma das quantidades de interesse na termodinâmica é a compressibilidade. Se uma dada substância é mantida a uma temperatura constante, então seu volume V depende de sua pressão P. Podemos considerar a taxa de variação de volume em relação à pressão, isto é, a derivada dV/dP. À medida que P aumenta, V diminui, logo, $dV/dP < 0$. A **compressibilidade** é definida introduzindo-se o sinal negativo e dividindo essa derivada pelo volume V:

$$\text{compressibilidade isotérmica} = \beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

Assim, β mede quão rápido, por unidade de volume, o volume de uma substância decresce quando a pressão sobre ela cresce, a uma temperatura constante.

Por exemplo, o volume V (em metros cúbicos) de uma amostra do ar a 25 °C está relacionado com a pressão P (em quilopascals) pela equação

$$V = \frac{5{,}3}{P}$$

A taxa de variação de V em relação a P quando $P = 50$ kPa é

$$\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = -\left.\frac{5{,}3}{P^2}\right|_{P=50}$$

$$= -\frac{5{,}3}{2.500} = -0{,}00212 \text{ m}^3/\text{kPa}$$

A compressibilidade naquela pressão é

$$\beta = -\frac{1}{V}\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = \frac{0{,}00212}{\frac{5{,}3}{50}} = 0{,}02 \text{ (m}^3/\text{kPa)/m}^3$$

Biologia

EXEMPLO 6 Seja $n = f(t)$ o número de indivíduos numa população animal ou de plantas num tempo t. A variação no tamanho da população entre os tempos $t = t_1$ e $t = t_2$ é $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$, e então a taxa média de crescimento durante o período de tempo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ é

$$\text{taxa média de crescimento} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

A **taxa de crescimento instantâneo** é obtida dessa taxa média de crescimento fazendo-se o período de tempo Δt tender a 0:

$$\text{taxa de crescimento} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

Estritamente falando, isso não é muito preciso, pois o gráfico real de uma função de população $n = f(t)$ seria uma função escada, que é descontínua sempre que ocorre um nascimento ou morte e, portanto, não seria derivável. Contudo, para uma grande população animal ou vegetal, podemos substituir o gráfico por uma curva aproximante lisa, como na Figura 7.

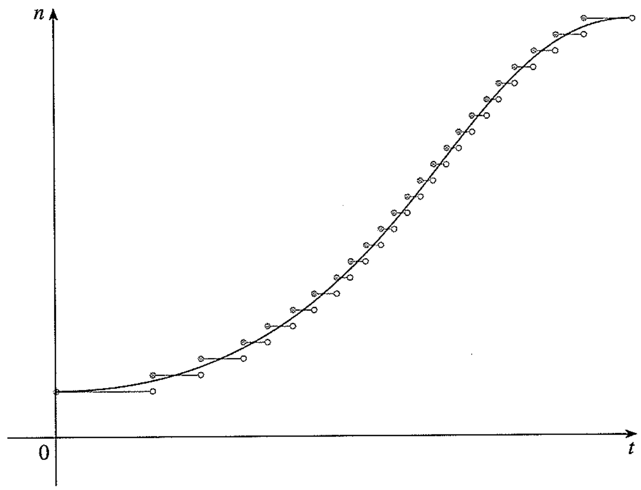


FIGURA 7
Uma curva aproximante lisa de uma função crescimento

Para ser mais específico, considere uma população de bactérias em um meio nutriente homogêneo. Suponha que tomando amostras da população em certos intervalos, determina-se que ela duplica a cada hora. Se a população inicial for n_0 e o tempo for medido em horas, então

$$f(1) = 2f(0) = 2n_0$$

$$f(2) = 2f(1) = 2^2 n_0$$

$$f(3) = 2f(2) = 2^3 n_0$$

e, em geral,

$$f(t) = 2^t n_0$$

A função da população é $n = n_0 2^t$.

Na Seção 3.4 mostramos que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

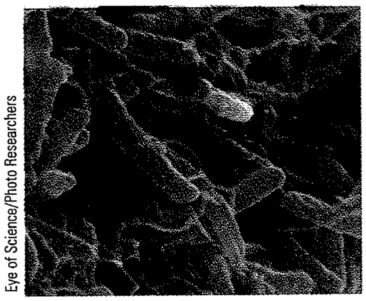
Portanto, a taxa de crescimento da população de bactérias no tempo t é

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}(n_0 2^t) = n_0 2^t \ln 2$$

Por exemplo, suponha que comecemos com uma população inicial de $n_0 = 100$ bactérias. Então, a taxa de crescimento depois de 4 horas é

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=4} = 100 \cdot 2^4 \ln 2 = 1.600 \ln 2 \approx 1.109$$

Isso quer dizer que, depois de 4 horas, a população de bactérias está crescendo a uma taxa de cerca de 1.109 bactérias por hora.



Eye of Science/Photo Researchers

As bactérias E. coli têm cerca de 2 micrômetros (μm) de comprimento e 0,75 μm de largura. A imagem foi produzida com escaneamento por microscópio de elétrons.

EXEMPLO 7 Considerando o fluxo de sangue através de um vaso sanguíneo, como uma veia ou artéria, podemos modelar a forma do vaso sanguíneo por um tubo cilíndrico de raio R e comprimento l, conforme ilustrado na Figura 8.

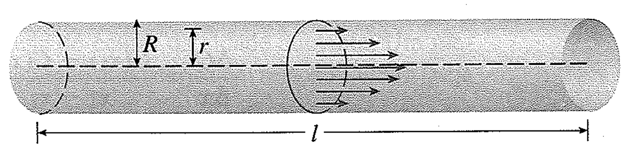


FIGURA 8
Fluxo de sangue em uma artéria

Em razão do atrito nas paredes do tubo, a velocidade v do sangue é maior ao longo do eixo central e decresce à medida que r se distancia do eixo central, até que v torna-se 0 na parede. A relação entre v and r é dada pela **lei do fluxo laminar**, descoberta em 1840 pelo físico francês Jean-Louis-Marie Poiseuille. Esta lei afirma que

Para informações mais detalhadas, veja W. Nichols e M. O'Rourke (eds). *McDonald's Blood Flow in Arteries: Theoretical, Experimental, and Clinical Principles*, 5. ed. (Nova York, 2005).

$$\boxed{1} \qquad v = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

onde η é a viscosidade do sangue e P é a diferença entre as pressões nos extremos do tubo. Se P e l forem constantes, então v é uma função de com o domínio $[0, R]$.

A taxa da variação média da velocidade quando nos movemos de $r = r_1$ para $r = r_2$ é dada por

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

e se fizermos $\Delta r \to 0$, obteremos o **gradiente da velocidade**, isto é, a taxa instantânea de variação da velocidade em relação a r:

$$\text{gradiente da velocidade} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}$$

Usando a Equação 1, obtemos

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{4\eta l}(0 - 2r) = -\frac{Pr}{2\eta l}$$

Para artérias humanas menores podemos tomar $\eta = 0{,}027$, $R = 0{,}008$ cm, $l = 2$ cm e $P = 4\,000$ dinas/cm^2, o que fornece

$$v = \frac{4\,000}{4(0{,}027)2}(0{,}000064 - r^2)$$
$$\approx 1{,}85 \times 10^4(6{,}4 \times 10^{-5} - r^2)$$

Em $r = 0{,}002$ cm, o sangue está fluindo a uma velocidade de

$$v(0{,}002) \approx 1{,}85 \times 10^4(64 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-6})$$
$$= 1{,}11 \text{ cm/s}$$

e o gradiente da velocidade nesse ponto é

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0{,}002} = -\frac{4.000(0{,}002)}{2(0{,}027)2} \approx -74 \text{ (cm/s)/cm}$$

Para sentirmos o que isso significa, vamos mudar nossas unidades de centímetros para micrômetros (1 cm = 10 000 μm). Então o raio da artéria é 80 μm. A velocidade no eixo central é 11 850 μm/s, que decresce para 11 110 μm/s a uma distância de $r = 20$ μm. O fato de que $dv/dr = -74$ (μm/s)/μm quer dizer que quando $r = 20$ μm, a velocidade está decrescendo a uma taxa de cerca de 74 μm/s para cada micrômetro que afastarmos do centro.

Economia

EXEMPLO 8 Suponha que $C(x)$ seja o custo total que uma empresa incorre na produção de x unidades de uma certo produto. A função C é denominada **função de custo**. Se o número de itens produzidos aumenta de x_1 para x_2, o custo adicional será $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$, e a taxa média de variação do custo será

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

O limite dessa grandeza quando $\Delta x \to 0$, ou seja, a taxa de variação instantânea de variação do custo em relação ao número de itens produzidos, é denominado **custo marginal** pelos economistas:

$$\text{custo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$