

3.5 Exercícios

1-4

- (a) Encontre y' derivando implicitamente.
- (b) Resolva a equação explicitamente isolando y e derive para obter y' em termos de x .
- (c) Verifique que suas soluções para as partes (a) e (b) são consistentes substituindo a expressão por y na sua solução para a parte (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$ 2. $4x^2 + 9y^2 = 36$
 3. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ 4. $\cos x + \sqrt{y} = 5$

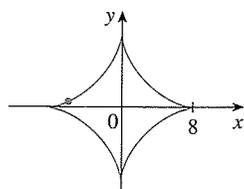
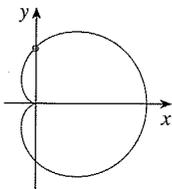
5-20 Encontre dy/dx por derivação implícita.

5. $x^3 + y^3 = 1$ 6. $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$
 7. $x^2 + xy - y^2 = 4$ 8. $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$
 9. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$ 10. $xe^y = x - y$
 11. $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$ 12. $1 + x = \operatorname{sen}(xy^2)$
 13. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$ 14. $e^y \operatorname{sen} x = x + xy$
 15. $e^{xy} = x - y$ 16. $\sqrt{x + y} = 1 + x^2y^2$
 17. $\operatorname{tg}^{-1}(x^2y) = x + xy^2$ 18. $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 1$
 19. $e^y \cos x = 1 + \operatorname{sen}(xy)$ 20. $\operatorname{tg}(x - y) = \frac{y}{1 + x^2}$

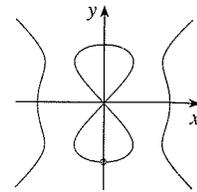
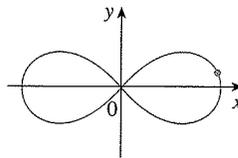
21. Se $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ e $f(1) = 2$, encontre $f'(1)$.
 22. Se $g(x) + x \operatorname{sen} g(x) = x^2$, encontre $g'(0)$.
 23-24 Considere y como a variável independente e x como a variável dependente e use a derivação implícita para encontrar dx/dy .
 23. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$ 24. $y \sec x = x \operatorname{tg} y$

25-32 Use a derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

25. $y \operatorname{sen} 2x = x \cos 2y$, $(\pi/2, \pi/4)$
 26. $\operatorname{sen}(x + y) = 2x - 2y$, (π, π)
 27. $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1, 1)$ (elipse)
 28. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$, $(1, 2)$ (hipérbole)
 29. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$ 30. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$
 $(0, \frac{1}{2})$ (cardioide) $(-3\sqrt{3}, 1)$ (astroide)



31. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$ 32. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$
 $(3, 1)$ $(0, -2)$
 (lemniscata) (curva do diabo)



33. (a) A curva com equação $y^2 = 5x^4 - x^2$ é chamada **kampyle** (do grego, curvado) **de Eudoxo**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, 2)$.
 (b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e a reta tangente em uma tela comum. (Se sua ferramenta gráfica puder traçar curvas definidas implicitamente, então use esse recurso. Caso não seja possível, você pode ainda criar o gráfico dessa curva traçando suas metades superior e inferior separadamente.)
 34. (a) A curva com equação $y^2 = x^3 + 3x^2$ é denominada **cúbica de Tschirnhausen**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, -2)$.
 (b) Em que pontos essa curva tem uma tangente horizontal?
 (c) Ilustre as partes (a) e (b) traçando a curva e as retas tangentes sobre uma tela comum.



35-38 Encontre y'' por derivação implícita.

35. $9x^2 + y^2 = 9$ 36. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$
 37. $x^3 + y^3 = 1$ 38. $x^4 + y^4 = a^4$

39. Se $xy + e^y = e$, encontre o valor de y'' no ponto onde $x = 0$.
 40. Se $x^2 + xy + y^3 = 1$, encontre o valor de y''' no ponto onde $x = 1$.
 41. Formas extravagantes podem ser criadas usando-se a capacidade de traçar funções definidas implicitamente de um SCA.
 (a) Trace a curva com equação

$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

Em quantos pontos essa curva tem tangentes horizontais? Estime as abscissas desses pontos.

- (b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(0, 1)$ e $(0, 2)$.
 (c) Encontre as abscissas exatas dos pontos da parte (a).
 (d) Crie curvas ainda mais extravagantes modificando a equação da parte (a).
 42. (a) A curva com equação



$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

foi comparada com um "vagão sacolejante". Use um SCA para traçar essa curva e descubra o porquê desse nome.

- (b) Em quantos pontos essa curva tem retas tangentes horizontais?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

Requer sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

Encontre as coordenadas x desses pontos.

43. Encontre os pontos sobre a lemniscata do Exercício 31 onde a tangente é horizontal.

44. Mostre, fazendo a derivação implícita, que a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

45. Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) .

46. Mostre que a soma das coordenadas das intersecções com os eixos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c .

47. Mostre, usando a derivação implícita, que qualquer reta tangente em um ponto P a um círculo com centro O é perpendicular ao raio OP .

48. A Regra da Potência pode ser demonstrada usando a derivação implícita para o caso onde n é um número racional, $n = p/q$, e $y = f(x) = x^n$ é suposta de antemão ser uma função derivável. Se $y = x^{p/q}$, então $y^q = x^p$. Use a derivação implícita para mostrar que

$$y' = \frac{p}{q} x^{(p/q)-1}$$

- 49–60 Encontre a derivada da função. Simplifique quando possível.

49. $y = \text{tg}^{-1}\sqrt{x}$

50. $y = \sqrt{\text{tg}^{-1}x}$

51. $y = \text{sen}^{-1}(2x + 1)$

52. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1} \text{sec}^{-1}x$

53. $G(x) = \sqrt{1 - x^2} \arccos x$

54. $y = \text{tg}^{-1}(x - \sqrt{1 + x^2})$

55. $h(t) = \text{cotg}^{-1}(t) + \text{cotg}^{-1}(1/t)$ 56. $F(\theta) = \arcsen \sqrt{\text{sen } \theta}$

57. $y = x \text{sen}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2}$ 58. $y = \text{cos}^{-1}(\text{sen}^{-1}t)$

59. $y = \arccos\left(\frac{b + a \cos x}{a + b \cos x}\right)$, $0 \leq x \leq \pi$, $a > b > 0$

60. $y = \text{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

- 61–62 Encontre $f'(x)$. Verifique se sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f' .

61. $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \arcsen x$

62. $f(x) = \text{arctg}(x^2 - x)$

63. Demonstre a fórmula para $(d/dx)(\text{cos}^{-1}x)$ pelo mesmo método usado para $(d/dx)(\text{sen}^{-1}x)$.

64. (a) Uma maneira de definir $\text{sec}^{-1}x$ é dizer que $y = \text{sec}^{-1}x \iff \text{sec } y = x$ e $0 \leq y < \pi/2$ ou $\pi \leq y < 3\pi/2$. Mostre que, com essa definição,

$$\frac{d}{dx}(\text{sec}^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

- (b) Outra maneira de definir $\text{sec}^{-1}x$ que é às vezes usada é dizer que $y = \text{sec}^{-1}x \iff \text{sec } y = x$ e $0 \leq y \leq \pi$, $y \neq 0$. Mostre que, com essa definição,

$$\frac{d}{dx}(\text{sec}^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

- 65–68 Duas curvas são **ortogonais** se suas retas tangentes forem perpendiculares em cada ponto de intersecção. Mostre que as famílias dadas de curvas são **trajetórias ortogonais** uma em relação a outra, ou seja, toda curva de uma família é ortogonal a toda curva da outra família. Esboce ambas as famílias de curvas no mesmo sistema de coordenadas.

65. $x^2 + y^2 = r^2$, $ax + by = 0$

66. $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = by$

67. $y = cx^2$, $x^2 + 2y^2 = k$

68. $y = ax^3$, $x^2 + 3y^2 = b$

69. Mostre que a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ e a hipérbole $x^2/A^2 - y^2/B^2 = 1$ são trajetórias ortogonais se $A^2 < a^2$ e $a^2 - b^2 = A^2 + B^2$ (logo, a elipse e a hipérbole possuem os mesmos focos).

70. Encontre o valor do número a de tal modo que as famílias das curvas $y = (x + c)^{-1}$ e $y = a(x + k)^{1/3}$ sejam trajetórias ortogonais.

71. (a) A Equação de van der Waals para n mols de um gás é

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

onde P é a pressão, V é o volume e T é a temperatura do gás. A constante R é a constante de gás universal e a e b são constantes positivas que são características de um gás em particular. Se T permanece constante, use a derivação implícita para encontrar dV/dP .

- (b) Encontre a taxa de variação de volume em relação à pressão de 1 mol de dióxido de carbono em um volume de $V = 10$ L e uma pressão de $P = 2,5$ atm. Use $a = 3,592$ L²-atm/mol² e $b = 0,04267$ L/mol.

- SCA 72. (a) Use a derivação implícita para encontrar y' se $x^2 + xy + y^2 + 1 = 0$.

- (b) Trace a curva da parte (a). O que você observa? Demonstre que o que você observa está correto.

- (c) Em vista da parte (b), o que você pode dizer sobre a expressão para y' que você encontrou na parte (a)?

73. A equação $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa uma "elipse girada", isto é, uma elipse cujos eixos não são paralelos aos eixos coordenados. Encontre os pontos nos quais essa elipse cruza o eixo x e mostre que as retas tangentes nesses pontos são paralelas.

74. (a) Onde a reta normal à elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$ no ponto $(-1, 1)$ intersecta a elipse uma segunda vez?

- (b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da elipse e da reta normal.

75. Encontre todos os pontos sobre a curva $x^2 y^2 + xy = 2$ onde a inclinação da reta tangente é -1 .

76. Encontre as equações de ambas as retas tangentes para a elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que passem pelo ponto $(12, 3)$.

77. (a) Suponha que f seja uma função injetora, derivável e que sua função inversa f^{-1} seja também derivável. Use a derivação implícita para mostrar que

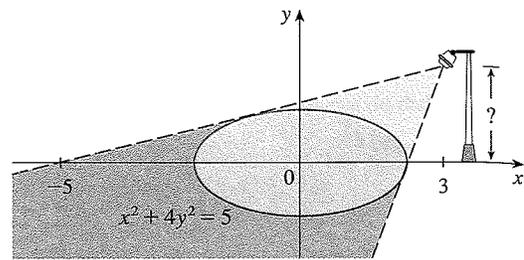
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

desde que o denominador não seja 0.

- (b) Se $f(4) = 5$ e $f'(4) = \frac{2}{3}$, encontre $(f^{-1})'(5)$.

78. (a) Mostre que $f(x) = x + e^x$ é injetora.
 (b) Qual o valor de $f^{-1}(1)$?
 (c) Use a fórmula do Exercício 77(a) para determinar $(f^{-1})'(1)$.
79. A **Função de Bessel** de ordem 0, $y = J(x)$, satisfaz a equação diferencial $xy'' + y' + xy = 0$ para todos os valores de x e seu valor em 0 é $J(0) = 1$.
 (a) Encontre $J'(0)$.
 (b) Use a derivação implícita para encontrar $J''(0)$.
80. A figura mostra uma lâmpada localizada três unidades à direita do eixo y e uma sombra originada pela região elíptica $x^2 + 4y^2 \leq 5$.

Se o ponto $(-5, 0)$ estiver na borda da sombra, qual a altura da lâmpada acima do eixo?



PROJETO APLICADO

SCA FAMÍLIAS DE CURVAS IMPLÍCITAS

Neste projeto você explorará os formatos mutantes de curvas definidas implicitamente ao variar constantes numa família e determinará que características são comuns a todos os membros da família.

1. Considere a família de curvas

$$y^2 - 2x^2(x + 8) = c[(y + 1)^2(y + 9) - x^2]$$

- (a) Traçando as curvas com $c = 0$ e $c = 2$, determine quantos pontos de intersecção existem. (Você pode precisar aplicar o *zoom* para encontrar todas elas.)
 (b) Agora adicione as curvas com $c = 5$ e $c = 10$ aos esboços da parte (a). O que você percebe? E quanto aos outros valores de c ?

2. (a) Trace diversos membros da família de curvas

$$x^2 + y^2 + cx^2y^2 = 1$$

Descreva como a curva muda à medida que você varia o valor de c .

- (b) O que acontece à curva quando $c = -1$? Descreva o que aparece na tela. Você pode provar isso algebricamente?
 (c) Encontre y' por derivação implícita. Para o caso $c = -1$, sua expressão para y' é consistente com o que você descobriu na parte (b)?

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

3.6 Derivadas de Funções Logarítmicas

Nesta seção vamos usar a derivação implícita para achar as derivadas das funções logarítmicas $y = \log_a x$ e, em particular, da função logarítmica natural $y = \ln x$. [É possível demonstrar que as funções logarítmicas são deriváveis: com certeza isso é plausível a partir dos seus gráficos (Veja a Figura 12 na Seção 1.6).]

1

$$\frac{d}{dx} (\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $y = \log_a x$. Então

$$a^y = x$$

Derivando essa equação implicitamente em relação a x , usando a Fórmula 3.4.5, obtemos