

### 3.3 Exercícios

1-16 Derive.

1.  $f(x) = 3x^2 - 2 \cos x$
2.  $f(x) = \sqrt{x} \sin x$
3.  $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \cotg x$
4.  $y = 2 \sec x - \operatorname{cosec} x$
5.  $g(t) = t^3 \cos t$
6.  $g(t) = 4 \sec t + \operatorname{tg} t$
7.  $h(\theta) = \operatorname{cosec} \theta + e^\theta \cotg \theta$
8.  $y = e^u (\cos u + cu)$
9.  $y = \frac{x}{2 - \operatorname{tg} x}$
10.  $y = \sin \theta \cos \theta$
11.  $f(\theta) = \frac{\sec \theta}{1 + \sec \theta}$
12.  $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$
13.  $y = \frac{t \sin t}{1 + t}$
14.  $y = \frac{1 - \sec x}{\operatorname{tg} x}$
15.  $f(x) = xe^x \operatorname{cosec} x$
16.  $y = x^2 \sin x \operatorname{tg} x$

17. Demonstre que  $\frac{d}{dx} (\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$ .

18. Demonstre que  $\frac{d}{dx} (\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$ .

19. Demonstre que  $\frac{d}{dx} (\cotg x) = -\operatorname{cosec}^2 x$ .

20. Demonstre, pela definição de derivada, que se  $f(x) = \cos x$ , então  $f'(x) = -\sin x$ .

21-24 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

21.  $y = \sec x$ ,  $(\pi/3, 2)$       22.  $y = e^x \cos x$ ,  $(0, 1)$

23.  $y = \cos x - \sin x$ ,  $(\pi, -1)$       24.  $y = x + \operatorname{tg} x$ ,  $(\pi, \pi)$

25. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva  $y = 2x \sin x$  no ponto  $(\pi/2, \pi)$ .

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

26. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva  $y = 3x + 6 \cos x$  no ponto  $(\pi/3, \pi + 3)$ .

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

27. (a) Se  $f(x) = \sec x - x$ , encontre  $f'(x)$ .

(b) Verifique se sua resposta para a parte (a) é razoável fazendo os gráficos de  $f$  e  $f'$  para  $|x| < \pi/2$ .

28. (a) Se  $f(x) = e^x \cos x$ , encontre  $f'(x)$  e  $f''(x)$ .

(b) Verifique que suas respostas para a parte (a) são razoáveis fazendo os gráficos de  $f$ ,  $f'$  e  $f''$ .

29. Se  $H(\theta) = \theta \sin \theta$ , encontre  $H'(\theta)$  e  $H''(\theta)$ .

30. Se  $f(t) = \operatorname{cosec} t$ , encontre  $f''(\pi/6)$ .

31. (a) Use a Regra do Quociente para derivar a função

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}$$

(b) Simplifique a expressão para  $f(x)$  escrevendo-a em termos de  $\sin x$  e  $\cos x$  e, então, encontre  $f'(x)$ .

(c) Mostre que suas respostas para as partes (a) e (b) são equivalentes.

32. Suponha  $f(\pi/3) = 4$  e  $f'(\pi/3) = -2$ , e faça  $g(x) = f(x) \sin x$  e  $h(x) = (\cos x)/f(x)$ . Encontre

(a)  $g'(\pi/3)$       (b)  $h'(\pi/3)$

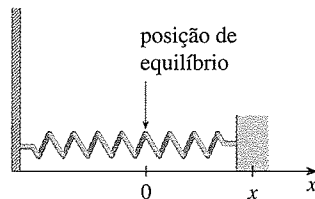
33-34 Para quais valores de  $x$  o gráfico de  $f$  tem uma reta tangente horizontal?

33.  $f(x) = x + 2 \sin x$

34.  $f(x) = e^x \cos x$

35. Um corpo em uma mola vibra horizontalmente sobre uma superfície lisa (veja a figura). Sua equação de movimento é  $x(t) = 8 \sin t$ , onde  $t$  está em segundos e  $x$ , em centímetros.

- (a) Encontre a velocidade e a aceleração no tempo  $t$ .
- (b) Encontre a posição, velocidade e aceleração do corpo na posição de equilíbrio  $t = 2\pi/3$ . Em que direção ele está se movendo nesse momento?



36. Uma tira elástica é presa a um gancho e uma massa é presa na ponta inferior da tira. Quando o corpo é puxado para baixo e então solto, ele vibra verticalmente. A equação do movimento é  $s = 2 \cos t + 3 \sin t$ ,  $t \geq 0$ , onde  $s$  é medido em centímetros e  $t$ , em segundos. (Consideremos o sentido positivo como para baixo.)

- (a) Encontre a velocidade e a aceleração no tempo  $t$ .
- (b) Faça os gráficos das funções velocidade e aceleração.
- (c) Quando o corpo passa pela posição de equilíbrio pela primeira vez?
- (d) A que distância da posição de equilíbrio o corpo chega?
- (e) Quando a velocidade é máxima?

37. Uma escada com 6 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Seja  $\theta$  o ângulo entre o topo da escada e a parede e  $x$ , a distância do pé da escada até a parede. Se o pé da escada escorregar para longe da parede, com que velocidade  $x$  variará em relação a  $\theta$  quando  $\theta = \pi/3$ ?

38. Um objeto de massa  $m$  é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo  $\theta$  com o plano, então a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu mg}{\mu \sin \theta + \cos \theta}$$

onde  $\mu$  é uma constante chamada *coeficiente de atrito*.

- (a) Encontre a taxa de variação de  $F$  em relação a  $\theta$ .
- (b) Quando essa taxa de variação é igual a 0?
- (c) Se  $m = 20$  kg,  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup> e  $\mu = 0,6$ , faça o gráfico de  $F$  como uma função de  $\theta$  e use-o para encontrar o valor de  $\theta$  para o qual  $dF/d\theta = 0$ . Esse valor é consistente com a resposta dada na parte (b)?

39-48 Encontre o limite

39.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{x}$

40.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 4x}{\text{sen } 6x}$

41.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{tg } 6t}{\text{sen } 2t}$

42.  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\text{sen } \theta}$

43.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{5x^3 - 4x}$

44.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x \text{ sen } 5x}{x^2}$

45.  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta + \text{tg } \theta}$

46.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x}$

47.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \text{tg } x}{\text{sen } x - \cos x}$

48.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(x - 1)}{x^2 + x - 2}$

49-50 Encontre a derivada dada, encontrando as primeiras derivadas e observando o padrão que ocorre.

49.  $\frac{d^{99}}{dx^{99}}(\text{sen } x)$

50.  $\frac{d^{35}}{dx^{35}}(x \text{ sen } x)$

51. Encontre constantes  $A$  e  $B$  de forma que a função  $y = A \text{ sen } x + B \text{ cos } x$  satisfaça a equação diferencial  $y'' + y' - 2y = \text{sen } x$ .

52. (a) Avalie  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \text{ sen } \frac{1}{x}$ .

(b) Avalie  $\lim_{x \rightarrow 0} x \text{ sen } \frac{1}{x}$ .

(c) Ilustre as partes (a) e (b) fazendo o gráfico de  $y = x \text{ sen}(1/x)$ .

53. Derive cada identidade trigonométrica para obter uma nova identidade (ou uma familiar).

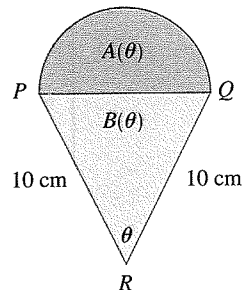
(a)  $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$

(b)  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

(c)  $\text{sen } x + \cos x = \frac{1 + \text{cotg } x}{\text{cossec } x}$

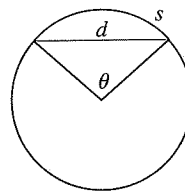
54. Um semicírculo com diâmetro  $PQ$  está sobre um triângulo isósceles  $PQR$  para formar uma região com um formato de sorvete, conforme mostra a figura. Se  $A(\theta)$  é a área do semicírculo e  $B(\theta)$  é a área do triângulo, encontre

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



55. A figura mostra um arco de círculo com comprimento  $s$  e uma corda com comprimento  $d$ , ambos subtendidos por um ângulo central  $\theta$ . Encontre

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{s}{d}$$



56. Seja  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$ .

(a) Faça o gráfico de  $f$ . Que tipo de descontinuidade parece ocorrer em 0?

(b) Calcule os limites laterais de  $f$  em 0. Esses valores confirmam sua resposta para a parte (a)?

### 3.4 A Regra da Cadeia

Suponha que você precise derivar a função

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

As fórmulas de derivação que você aprendeu nas seções precedentes deste capítulo não lhe permitem calcular  $F'(x)$ .

Observe que  $F$  é uma função composta. Na realidade, se assumirmos  $y = f(u) = \sqrt{u}$  e  $u = g(x) = x^2 + 1$ , então poderemos escrever  $y = F(x) = f(g(x))$ , ou seja,  $F = f \circ g$ . Sabemos como derivar ambas,  $f$  e  $g$ , então seria útil ter uma regra que nos dissesse como achar a derivada de  $F = f \circ g$  em termos das derivadas de  $f$  e  $g$ .

O resultado é que a derivada da função composta  $f \circ g$  é o produto das derivadas de  $f$  e  $g$ . Esse fato é um dos mais importantes das regras de derivação e é chamado *Regra da Cadeia*. Ela parece plausível se interpretarmos as derivadas como taxas de variação. Considere  $du/dx$  como a taxa de variação de  $u$  com relação a  $x$ ,  $dy/du$  como a taxa de variação de  $y$  com relação a  $u$ , e  $dy/dx$  como a taxa de variação de  $y$  com relação a  $x$ . Se  $u$  variar duas vezes mais rápido que  $x$ , e  $y$  variar três vezes mais rápido que  $u$ , então parece plausível que  $y$  varie seis vezes mais rápido que  $x$  e, portanto, esperamos que

Veja a Seção 1.3 para uma revisão das funções compostas.