Um pouco de história da trigonometria

Professor: Antonio Carlos Brolezzi

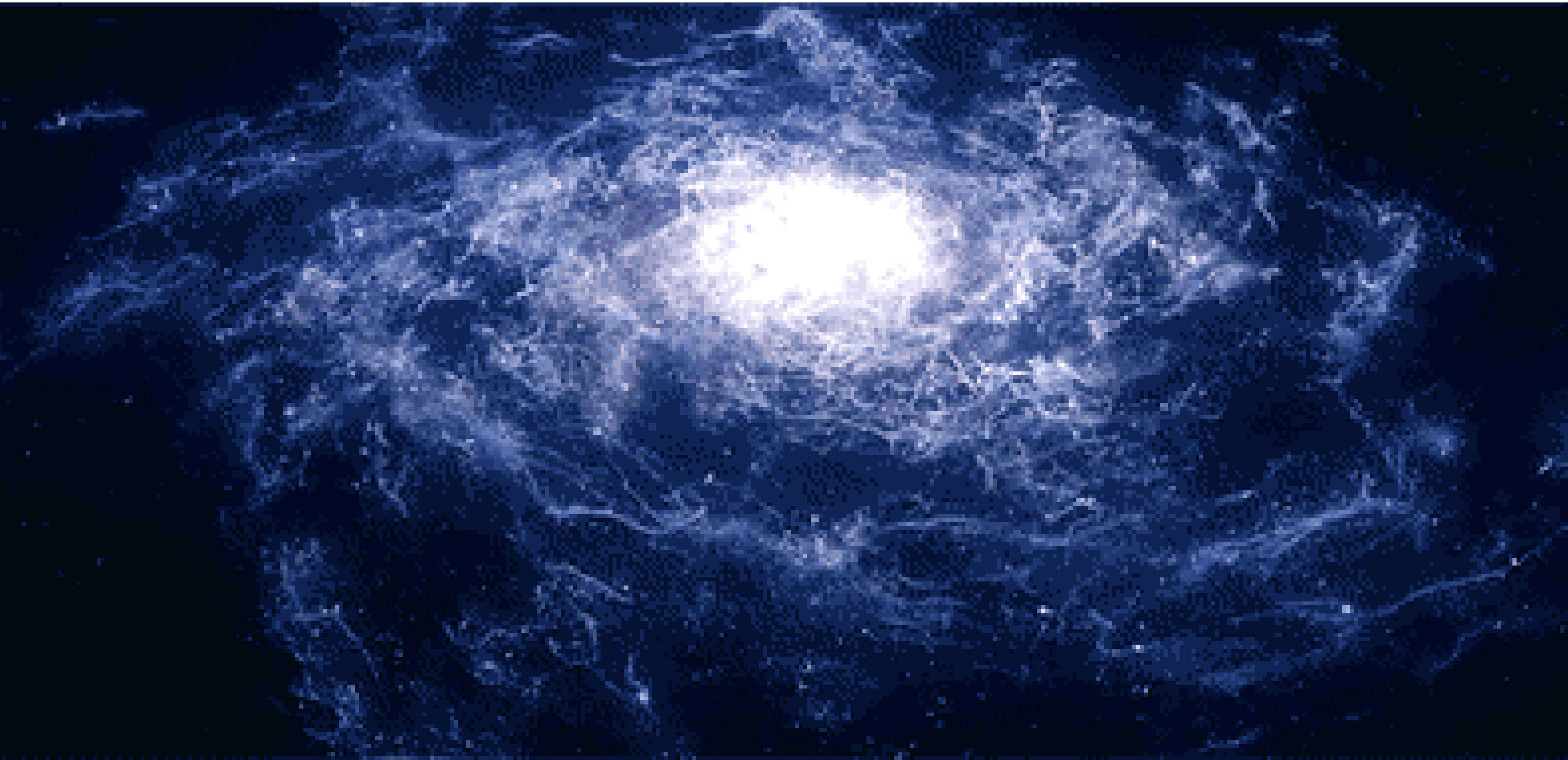
IME/USP

http://www.ime.usp.br/~brolezzi

brolezzi@usp.br

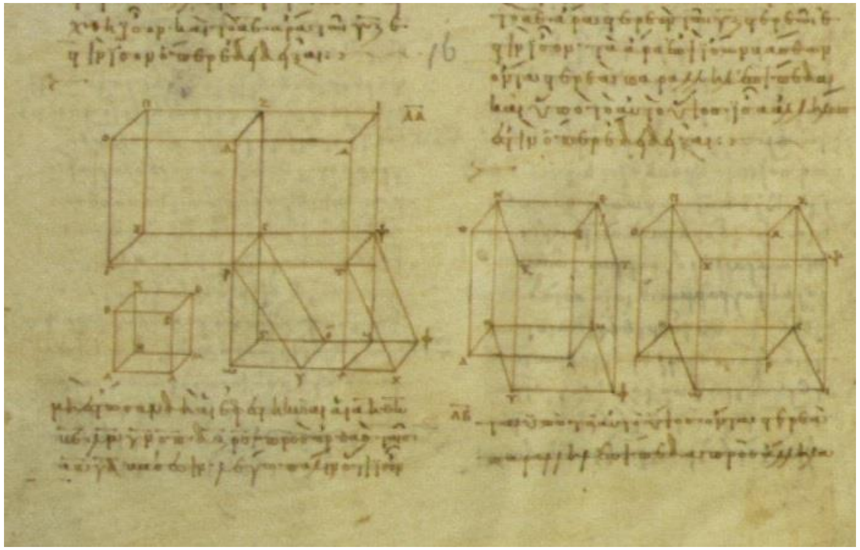
Os povos da Antiguidade admiravam o céu, seus mistérios e sua influência na vida - clima, colheitas, estações do ano ...

A Matemática foi criada em grande parte para entender e tentar acessar os segredos do Universo



As primeiras divisões da Matemática (Grécia Antiga):

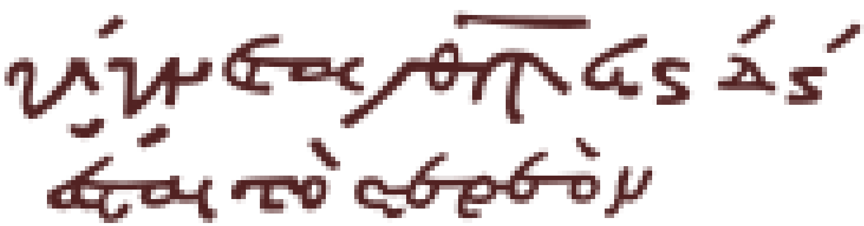
Números e Grandezas

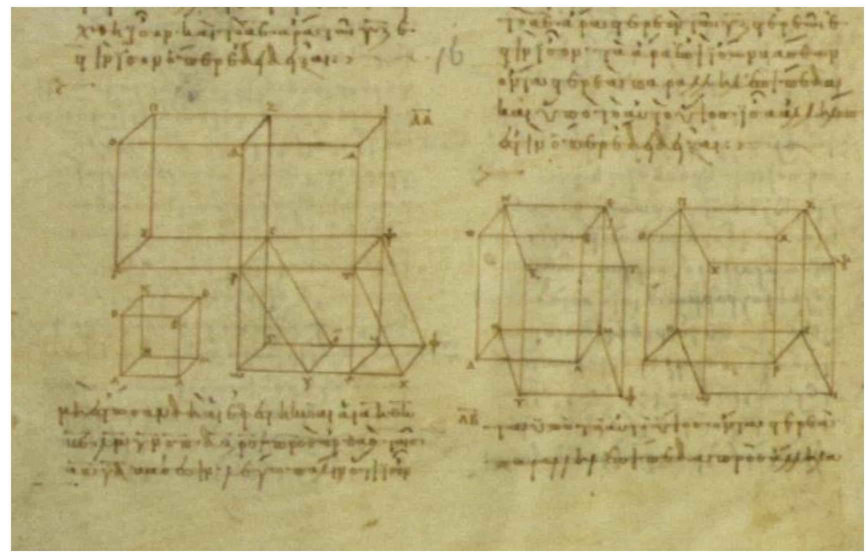


As primeiras divisões da Matemática (Grécia Antiga):

Números e Grandezas

Em repouso e em movimento

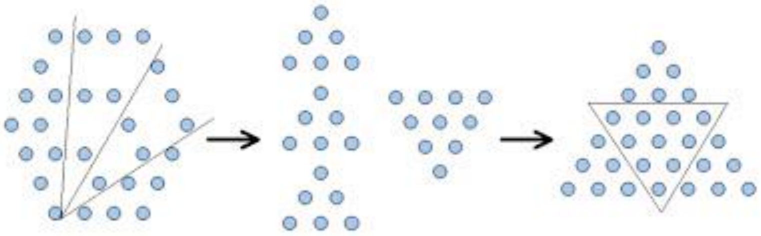




As primeiras divisões da Matemática (Grécia Antiga):

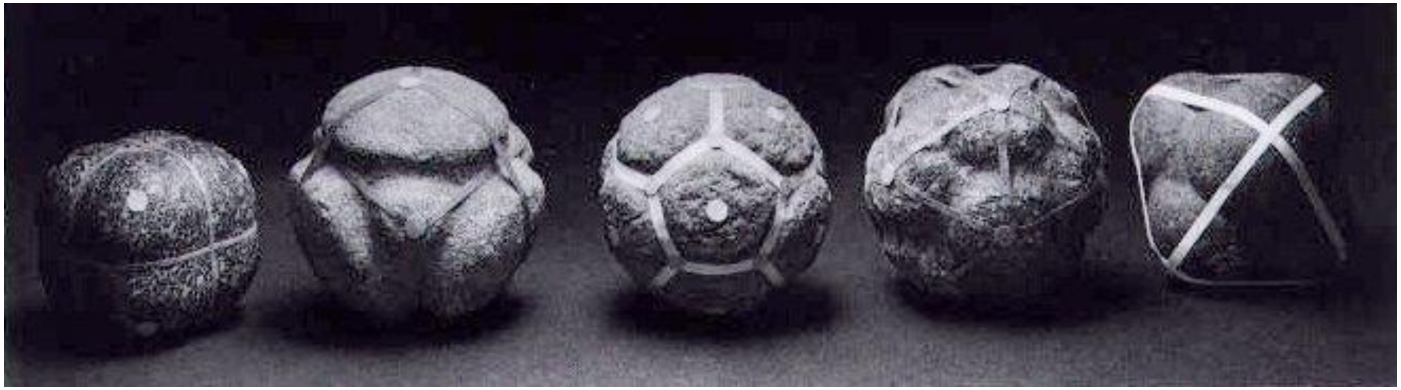
Números em repouso:

Aritmética



Grandezas em repouso:

Geometria



As primeiras divisões da Matemática (Grécia Antiga):

Números em movimento:

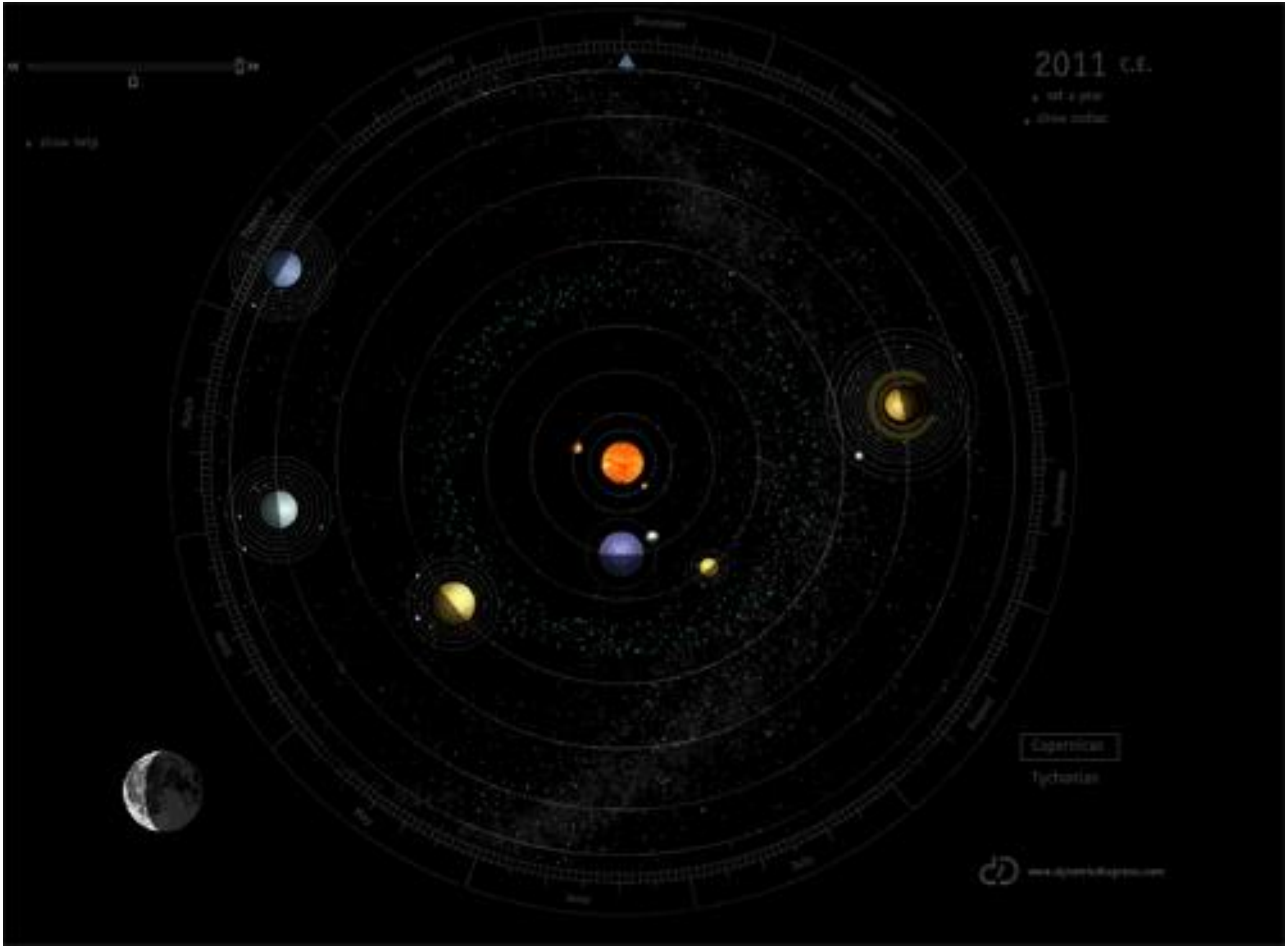
Música

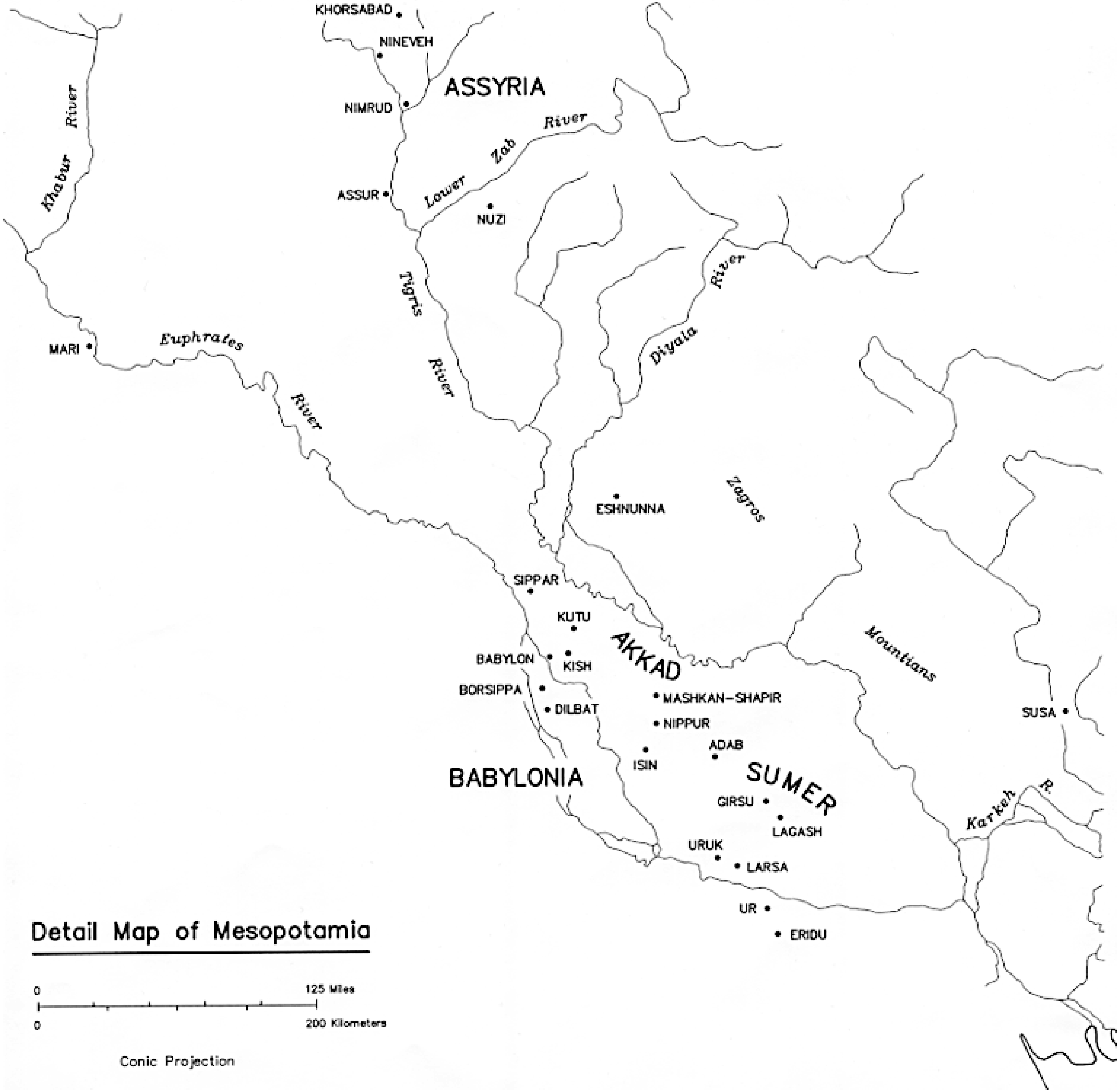
As primeiras divisões da Matemática (Grécia Antiga):

Grandezas em movimento:

Astronomia

Ângulos: a Matemática do Movimento, da Astronomia




KHORSABAD
NINEVEH
ASSYRIA
NIMRUD
River
Lower Zab
ASSUR
NUZI
Khabur
River
Tigris
River
MARI
Euphrates
River
Diyala
River
ESHNUNNA
Zagros
Mountians
SIPPAR
KUTU
AKKAD
BABYLON
KISH
BORSIPPA
DILBAT
MASHKAN-SHAPIR
NIPPUR
ADAB
ISIN
BABYLONIA
SUMER
GIRSU
LAGASH
URUK
LARSA
UR
ERIDU
SUSA
Karkeh R.
Detail Map of Mesopotamia
0
125 Miles
0
200 Kilometers
Conic Projection

A linguagem dos ângulos e a astronomia nasceram na Mesopotâmia

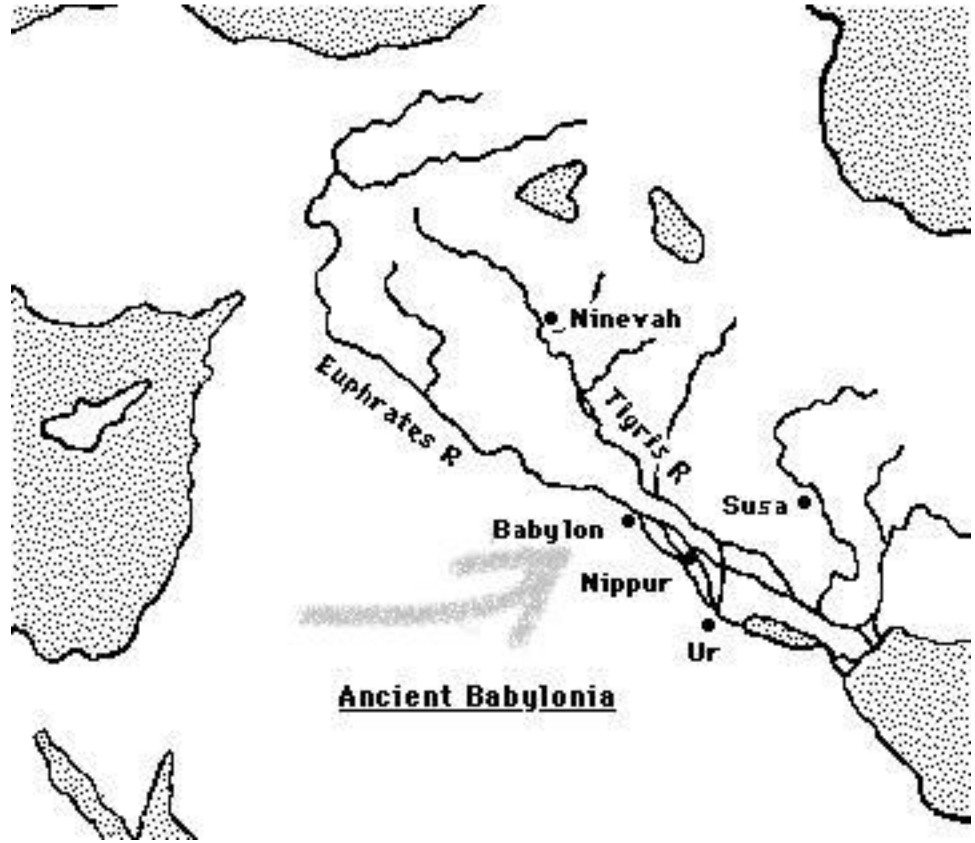
Fontes principais:
tabletas de barro cozido

Escrita: cuneiforme

Período: 3500 - 561 aC

Região: entre os rios
Tigres e Eufrates
(Oriente Médio)

Principal cidade-estado:
Babilônia

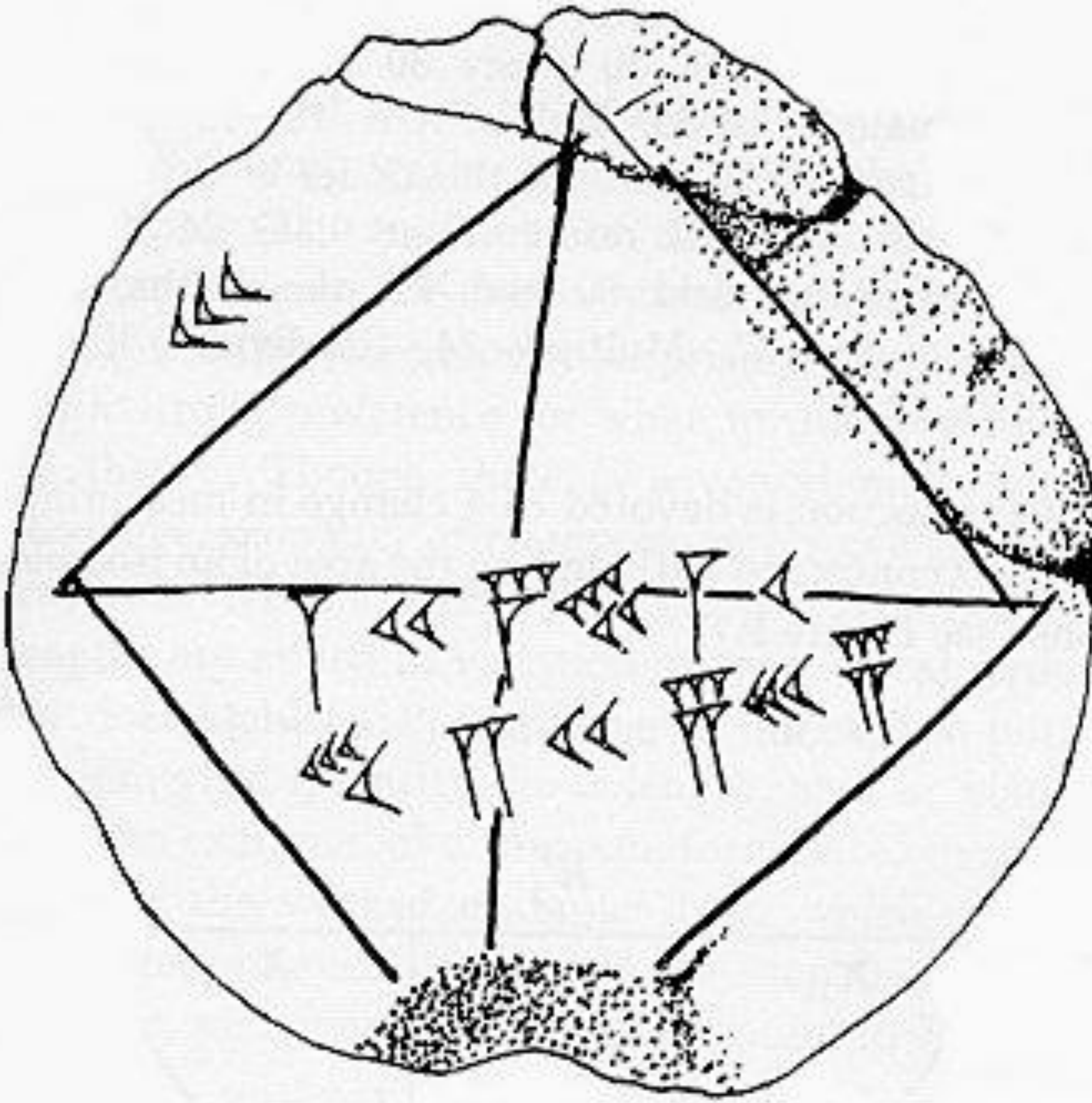


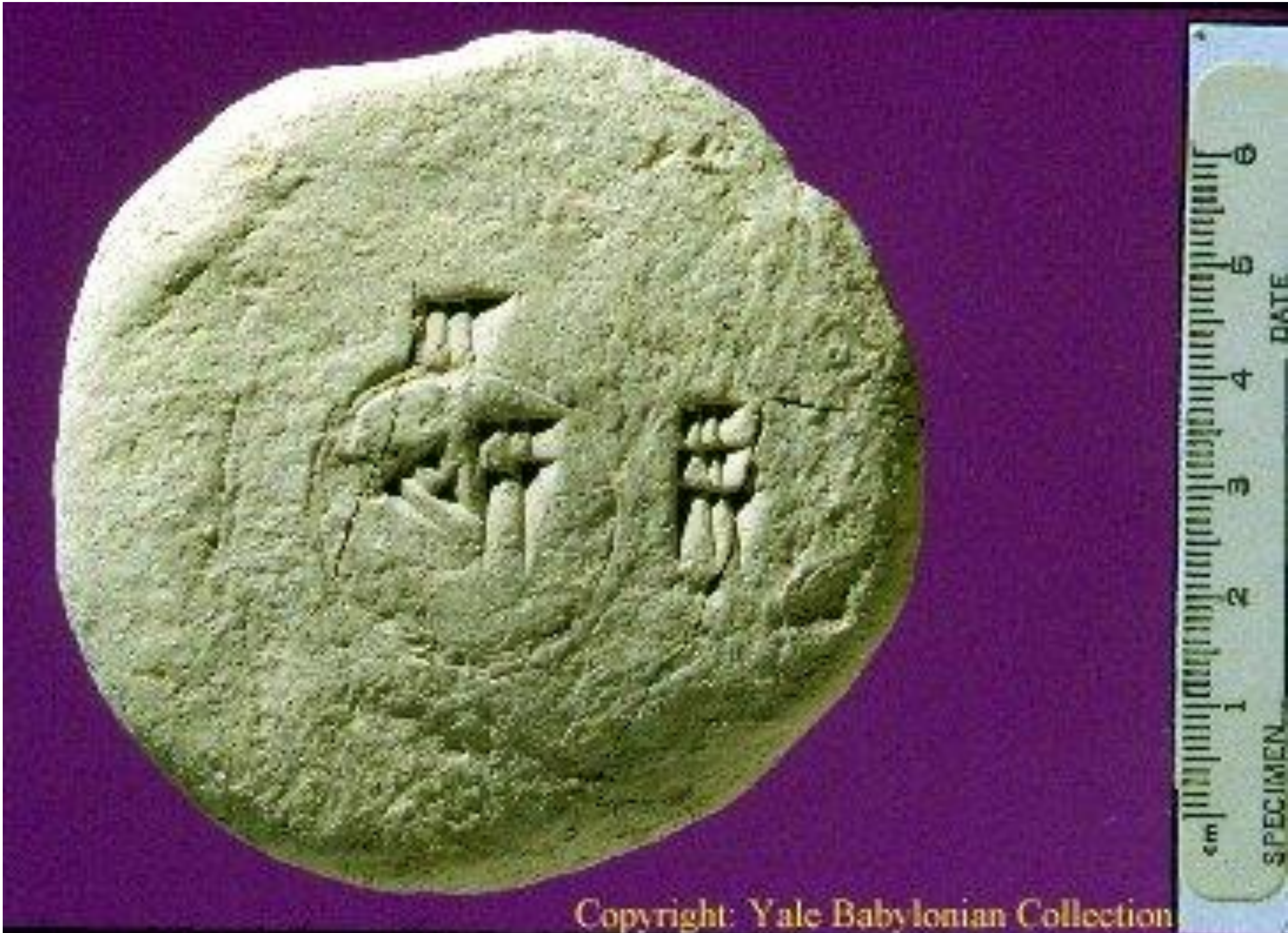
A tradução das tabletas cuneiformes teve início em 1870, quando se descobriu uma inscrição trilingüe nas encostas do monte Behistun, narrando a vitória do rei Dario sobre Cambises.

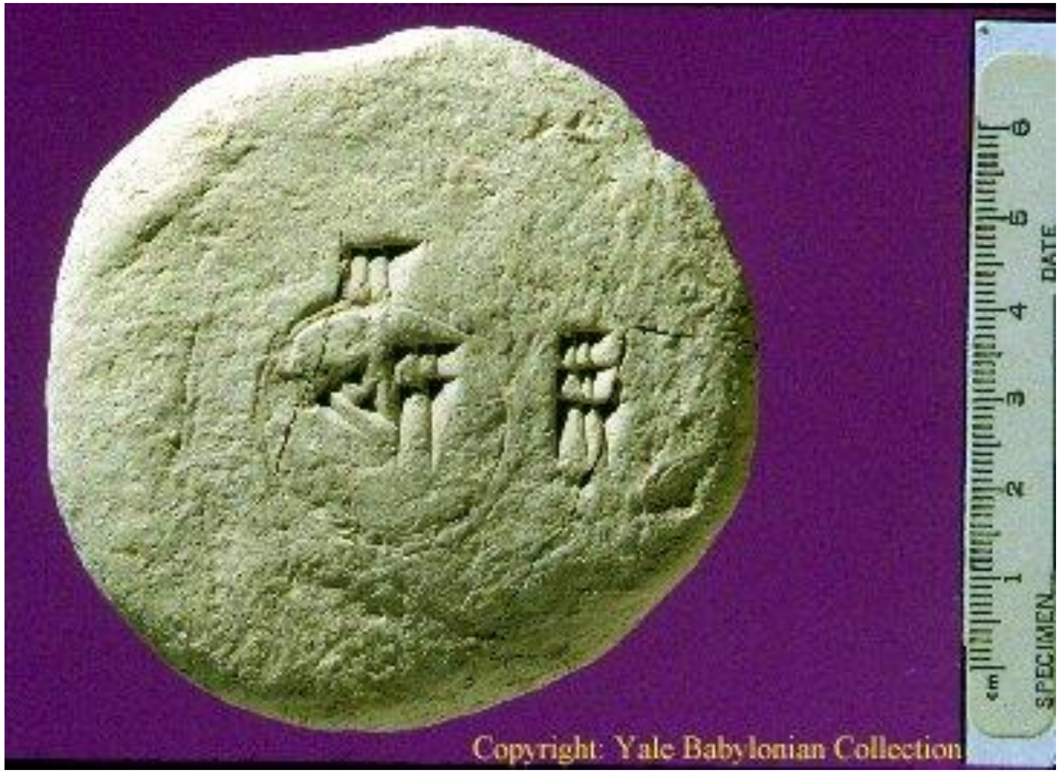
Tableta com numerais cuneiformes babilônios de 2800 aC

Somente em 1934 Otto Neugebauer decifrou, interpretou e publicou as tabletas matemáticas babilônias.

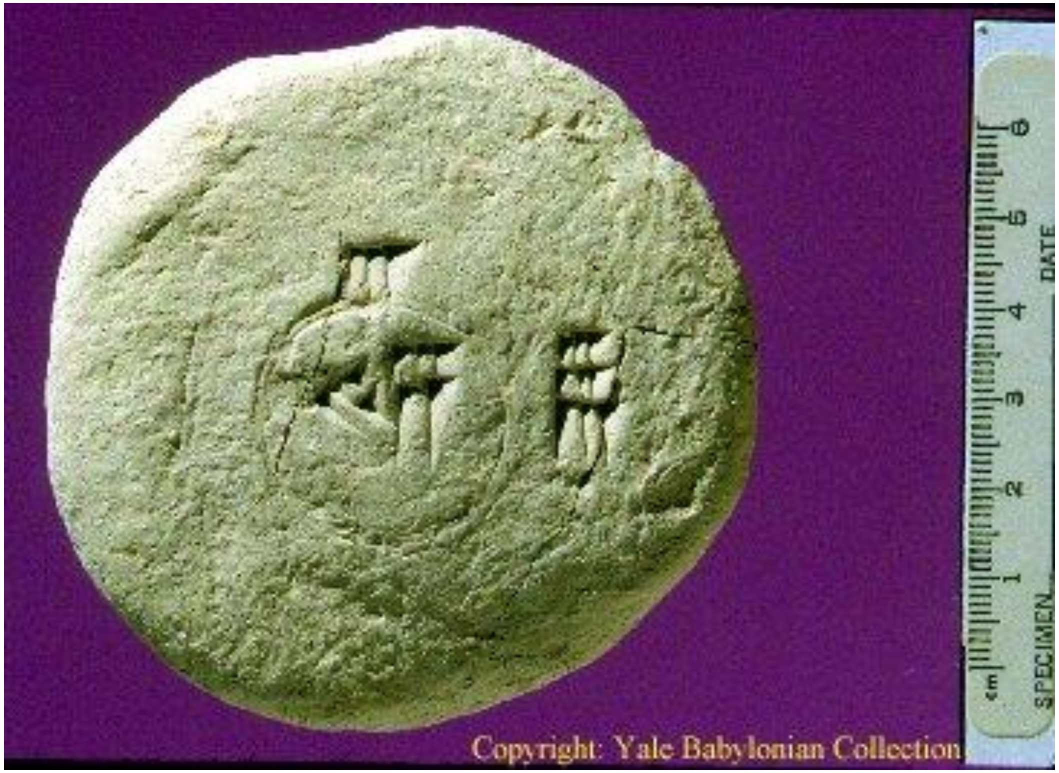

cm
1
2
3




Copyright: Yale Babylonian Collection
SPECIMEN
DATE



YBC 7302 um círculo com os números 3, 9 e 45.
45 representa a área do círculo, e 3 sua circunferência.
Usavam $A = 5C^2 = 5 \times 3^2 = 45$.



Veja que $\mathrm{A} \cong (0;5)C^2 = \frac{5}{60}C^2 = \frac{C^2}{12}$.

De fato, $A = \pi r^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{4\pi} \cong \frac{C^2}{12}$.

Fontes da História da Matemática do Egito Antigo

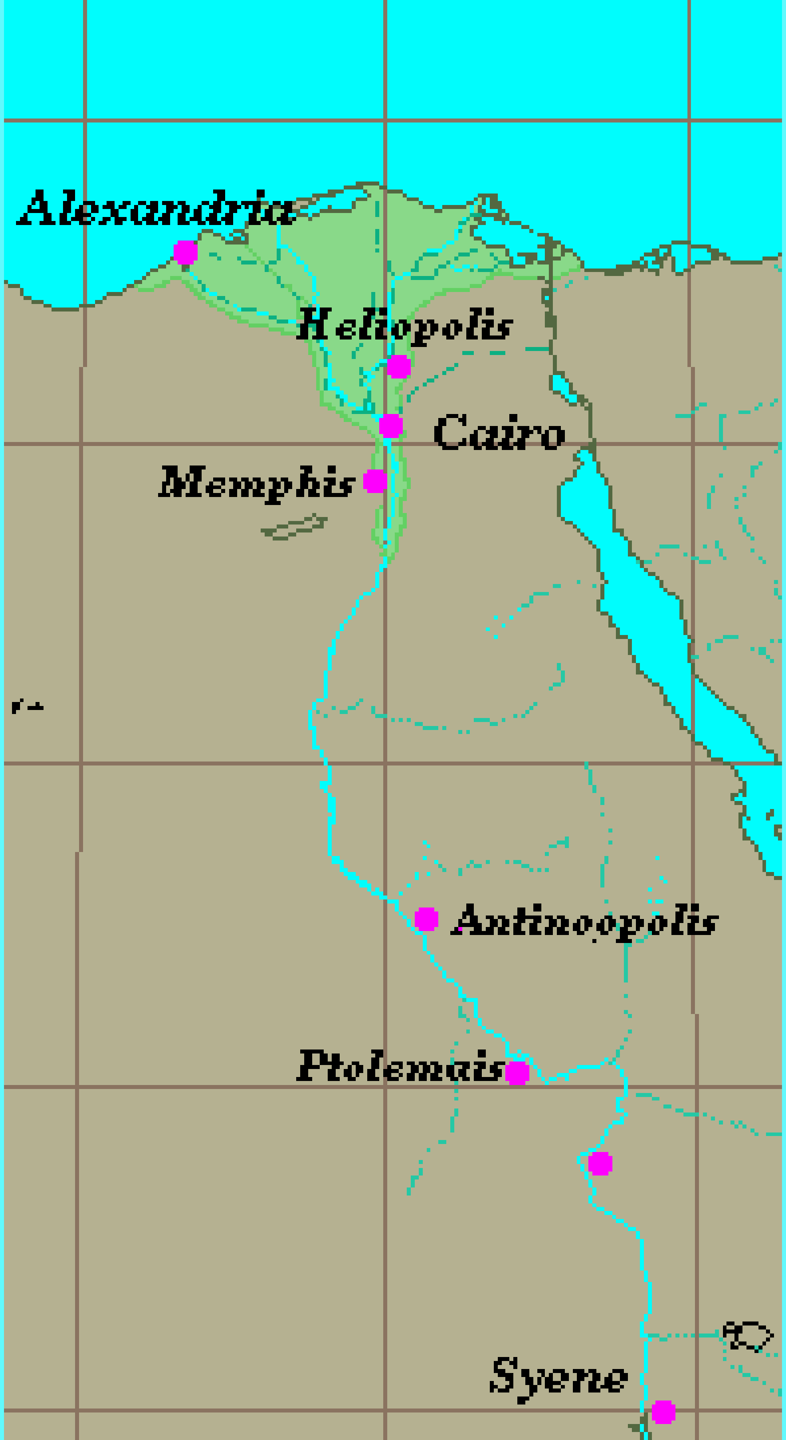
Fontes principais:

- inscrições em monumentos;
- inscrições em objetos;
- papiros.

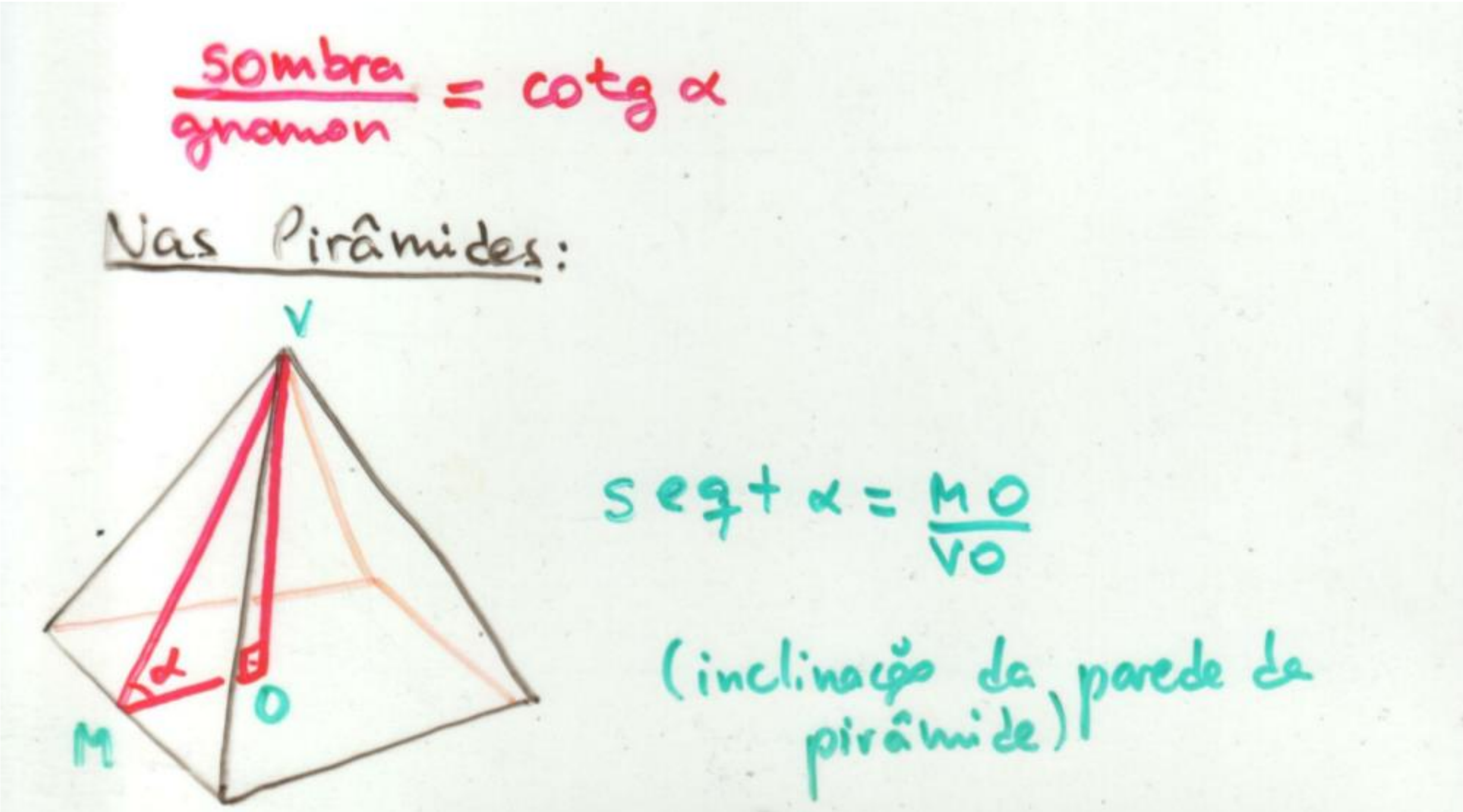
Escrita principal: hieróglifos

Período imperial: 2800 - 715 aC

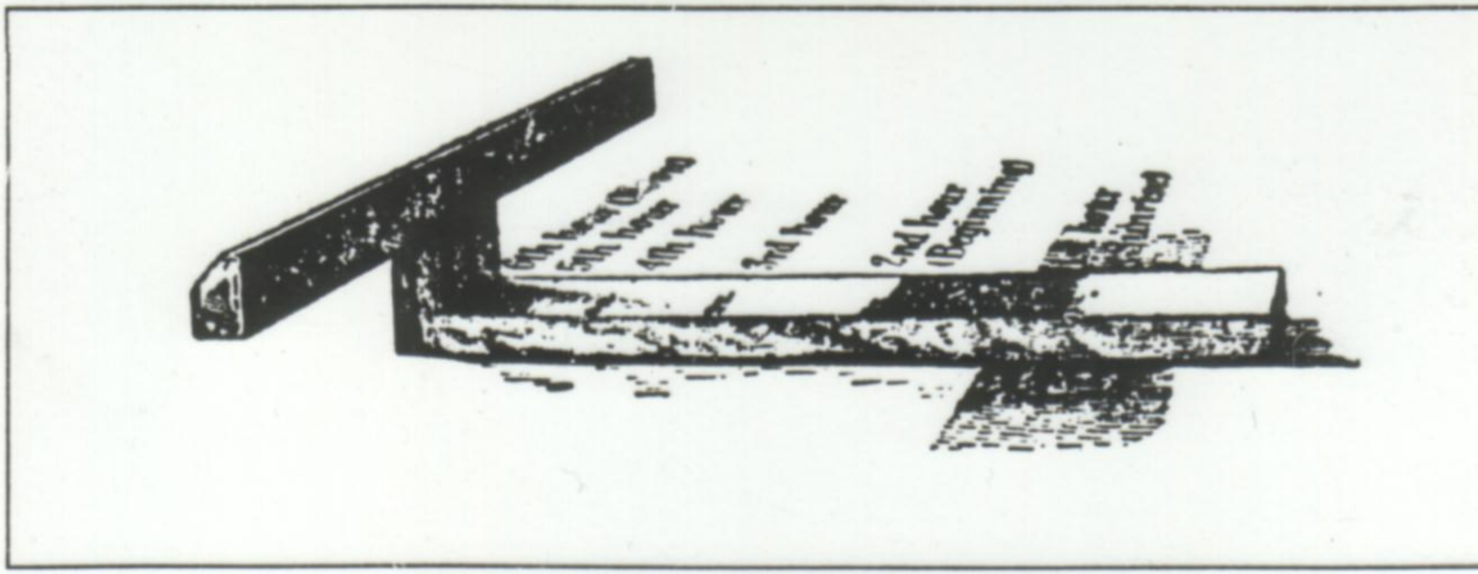
Região: litoral mediterrâneo da África



Os egípcios conheciam a relação entre a sombra e o gnomon



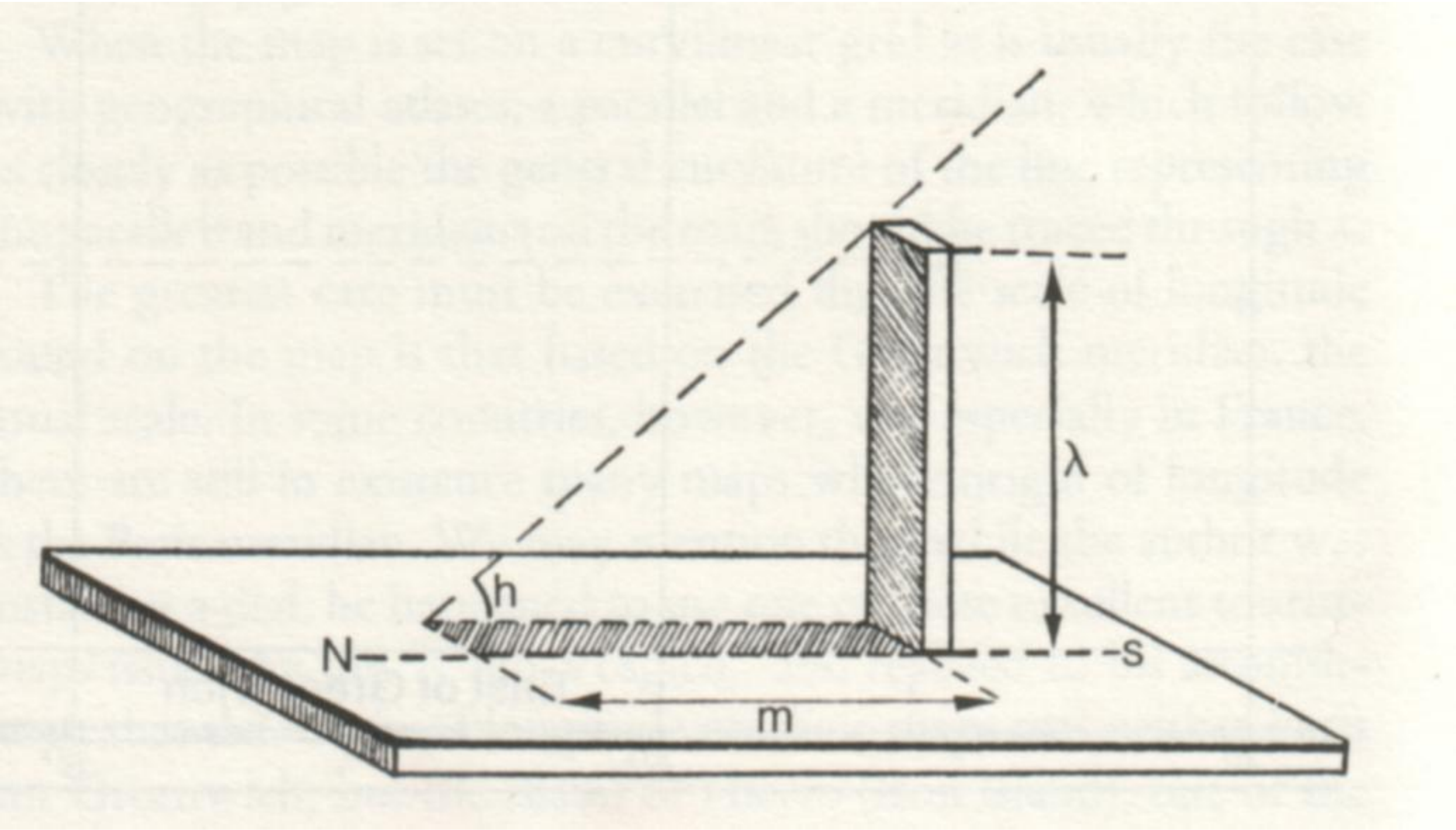
Mas tratava-se de um conhecimento prático, não demonstrativo



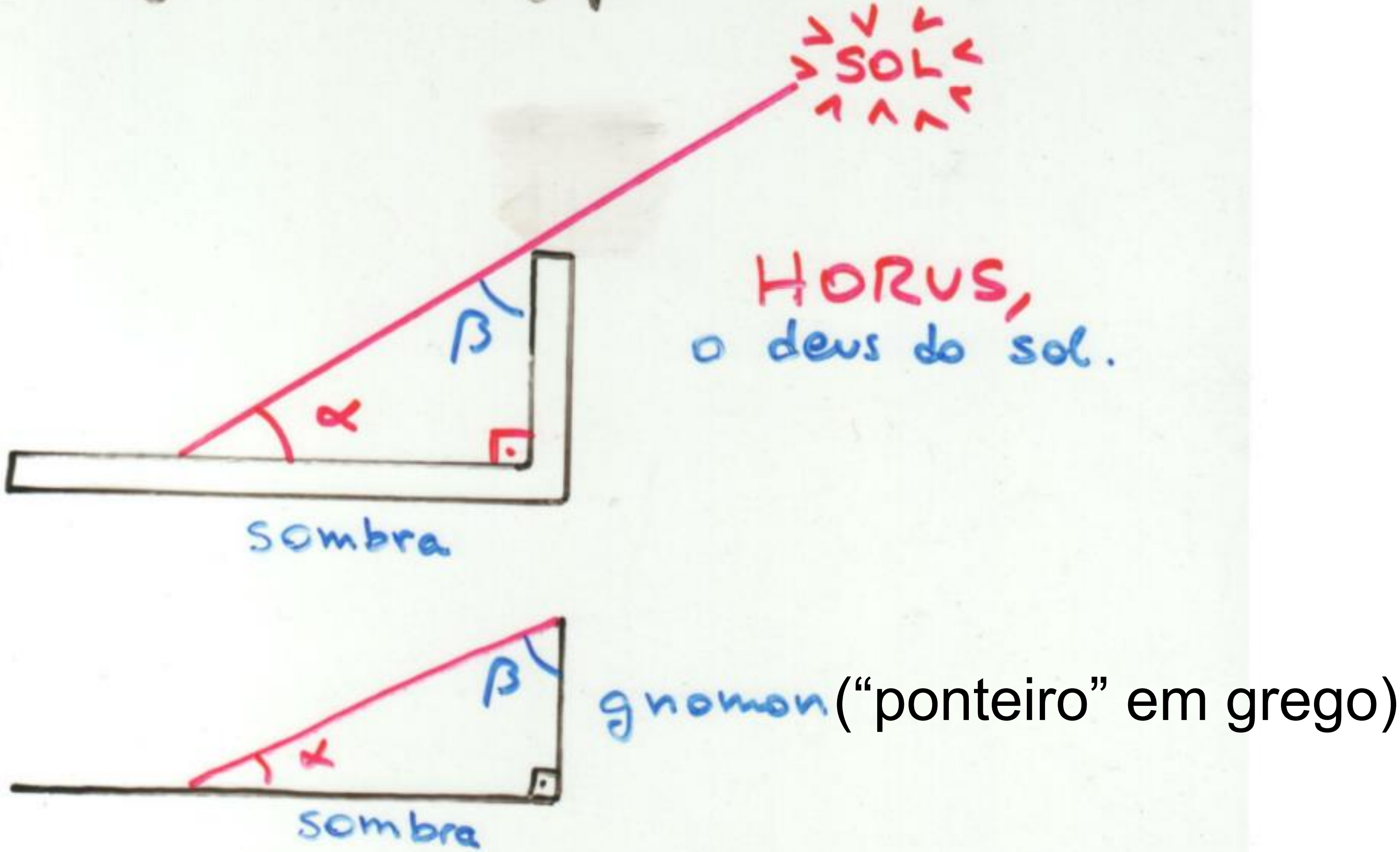
Mais Antigo Relógio de Sol

Tipo egípcio, recuperado por Borchardt, agora no Museu de Berlim. Data de 1500 aC. De manhã, a haste em forma de "T" era virada em direção ao leste, e à tarde era virada para o oeste. Origem: *Ancient Times*, de Breasted. Cfr. SMITH, David Eugene. *History of Mathematics* (Vol. 2). New York, Dover, 1953. 725 p., p. 670

Modelo do Relógio de Sol Egípcio

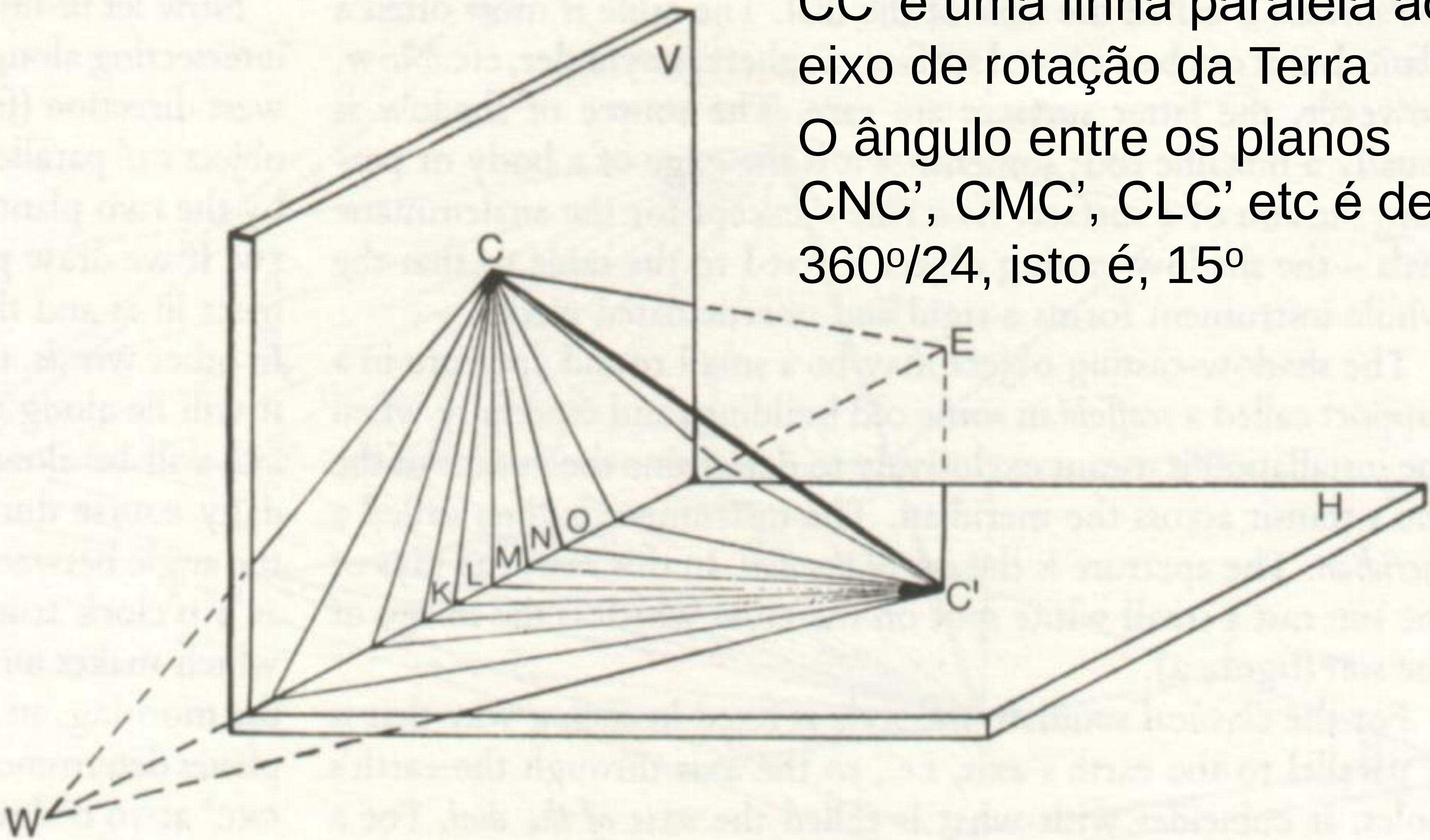


Relógio de Sol Egípcio:



"Todo conhecimento vem da sombra, e a sombra vem do gnomon" (Provérbio Chinês)

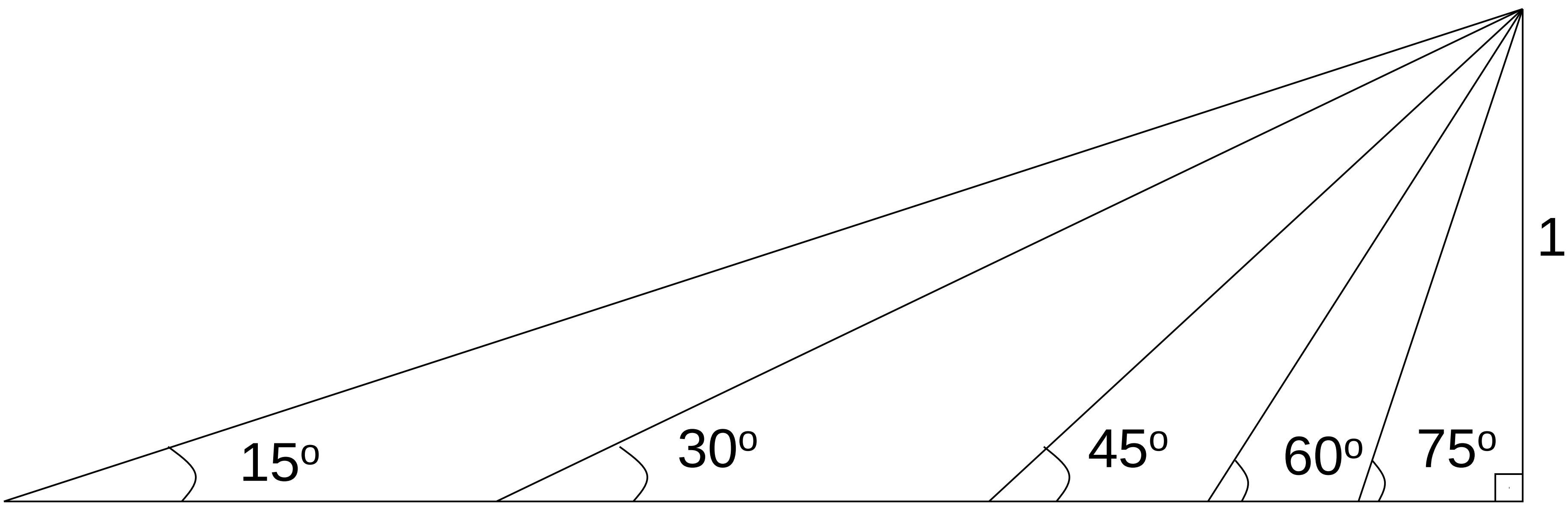
O princípio do relógio de sol supõe uma divisão da inclinação da sombra em intervalos de 15º



CC’ é uma linha paralela ao eixo de rotação da Terra

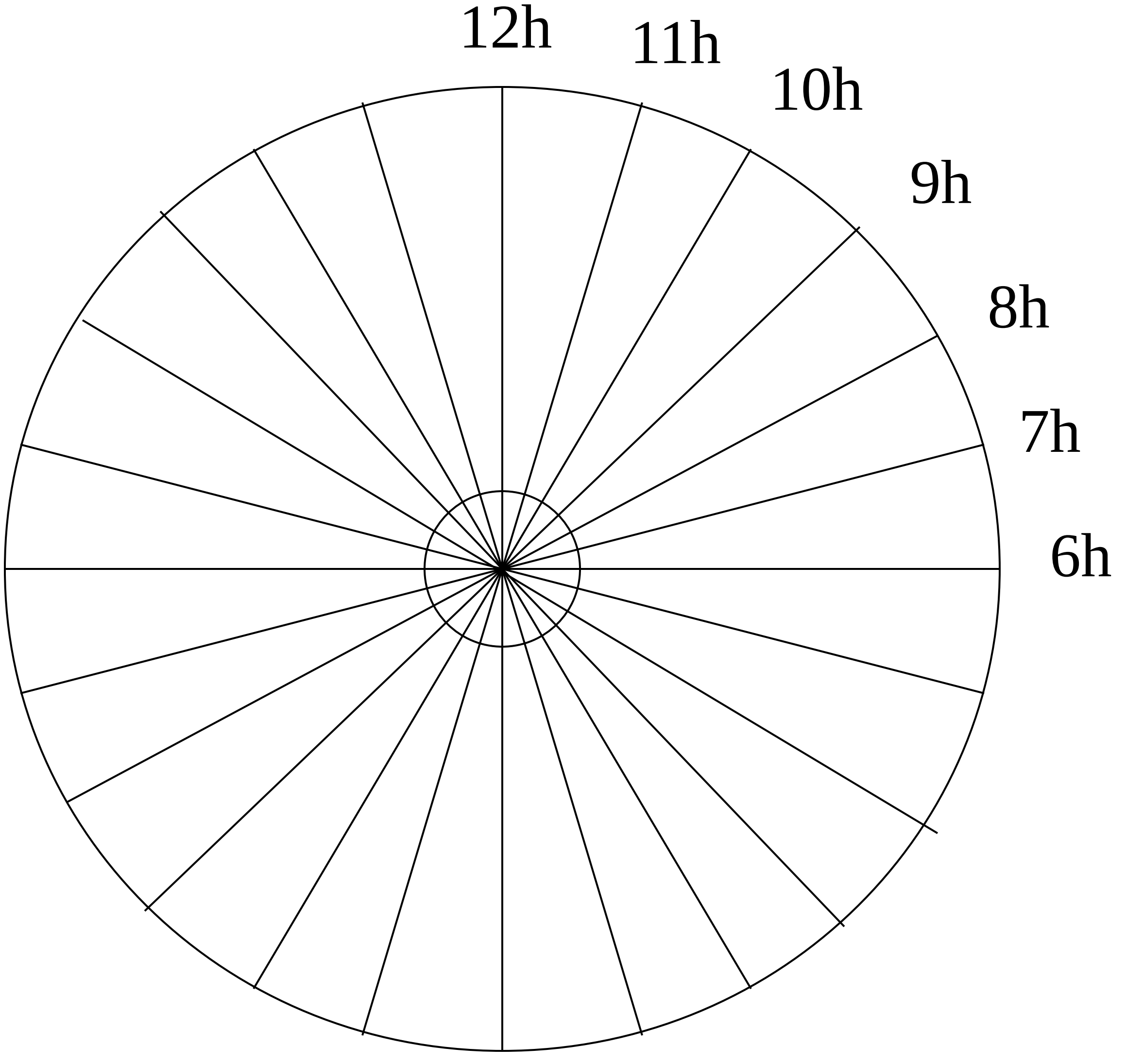
O ângulo entre os planos CNC’, CMC’, CLC’ etc é de 360º/24, isto é, 15º

Triângulos retângulos com ângulos notáveis
("triângulos das horas")

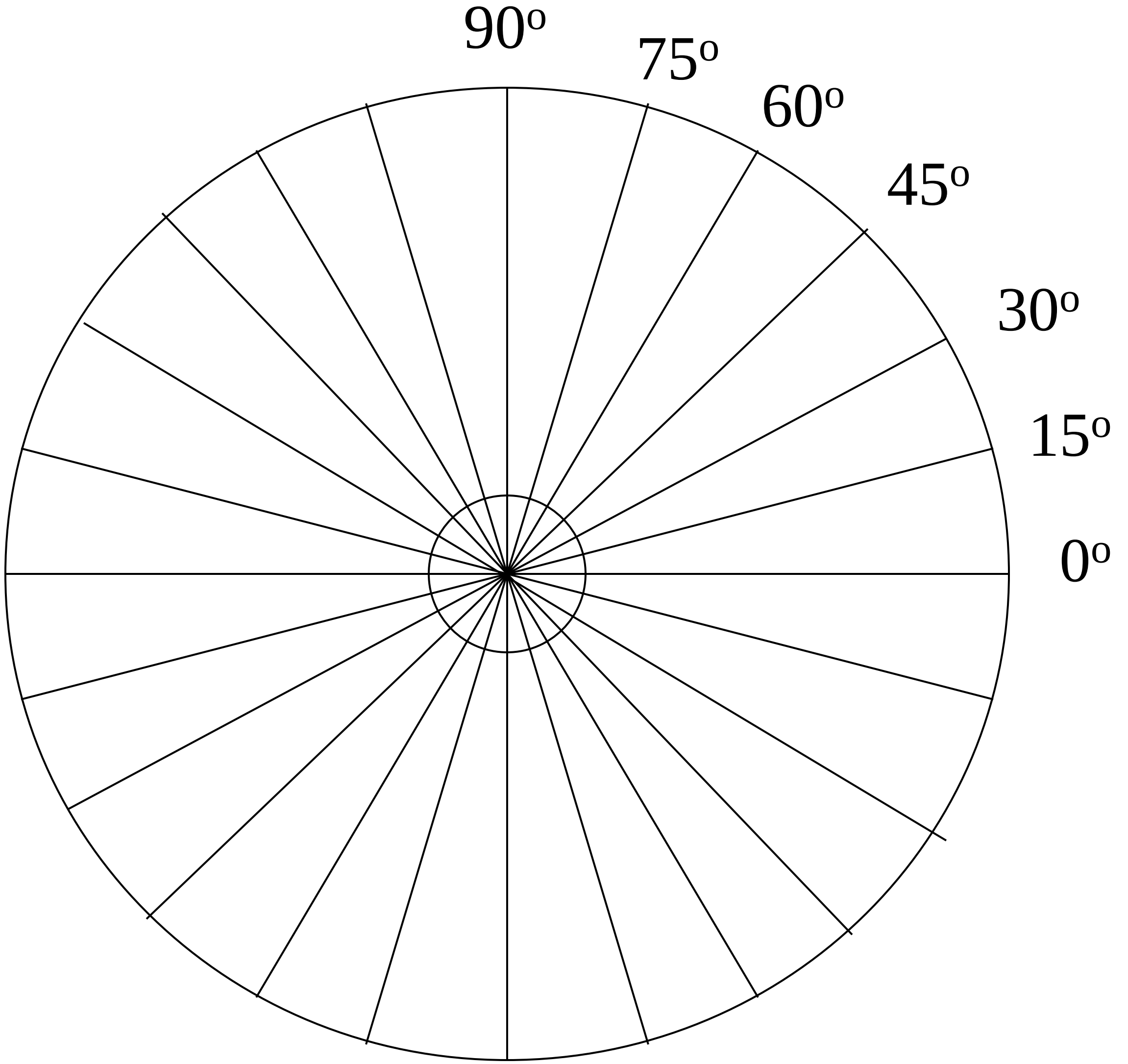


Vamos calcular a relação entre os lados desses triângulos?

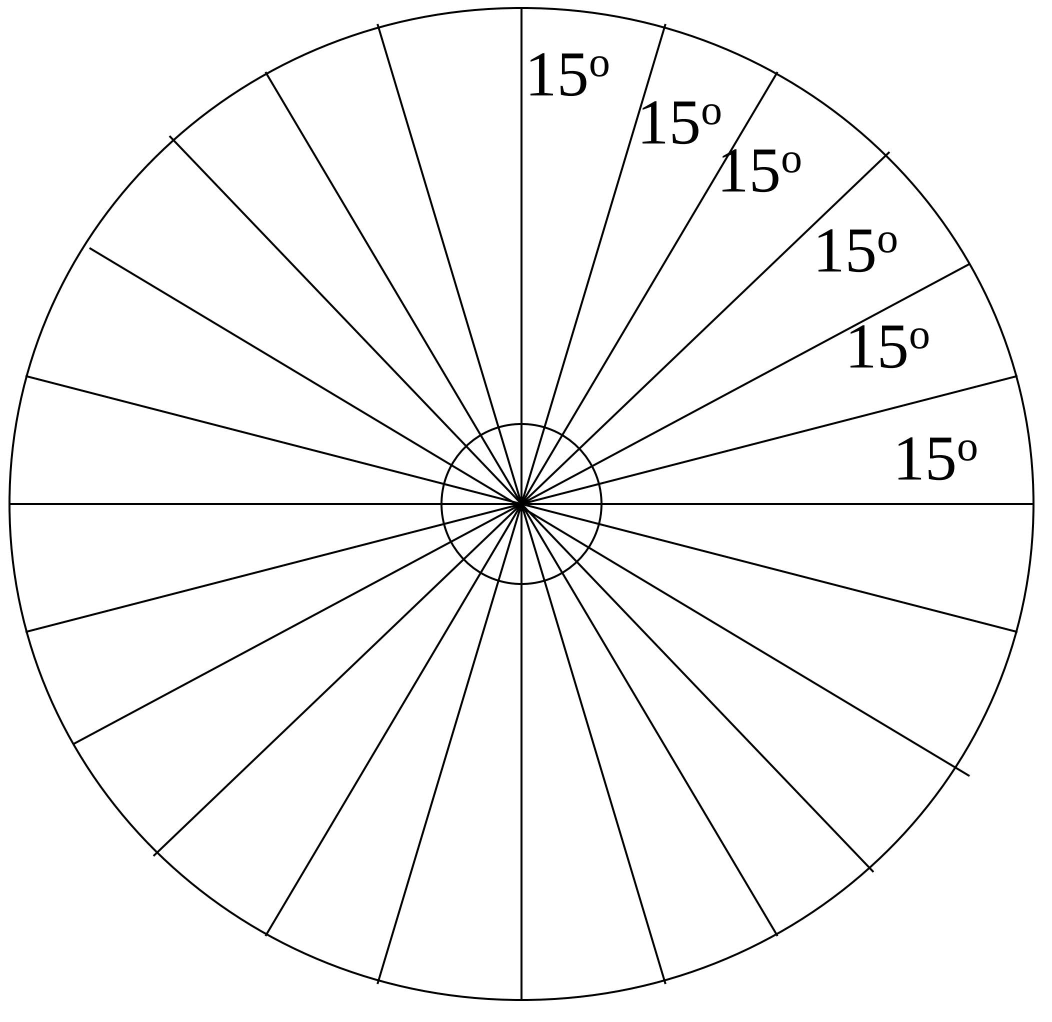
Cada ângulo notável pode ser associado a uma hora do dia



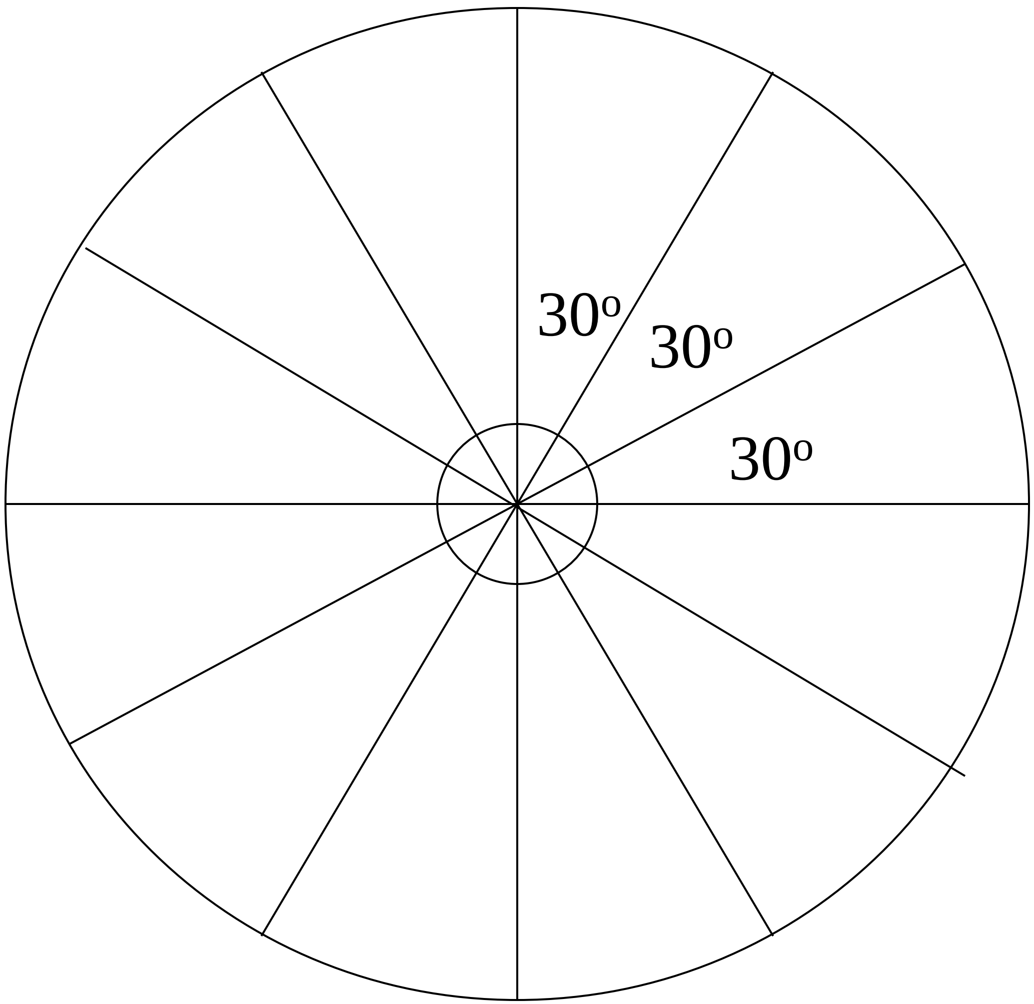
As divisões em 15º assinalam os valores notáveis de ângulos



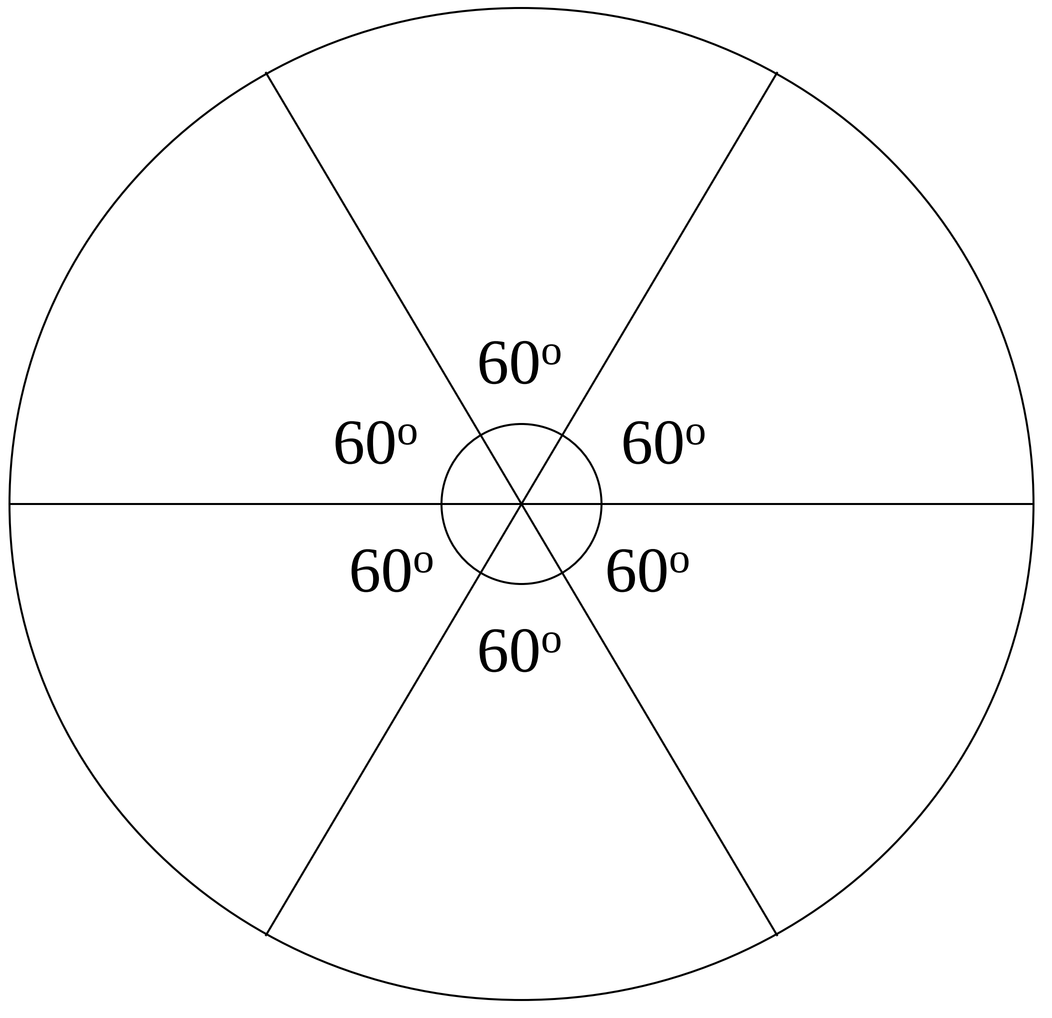
Dividido em 24 partes, cada uma com 15º, pode representar as horas do dia



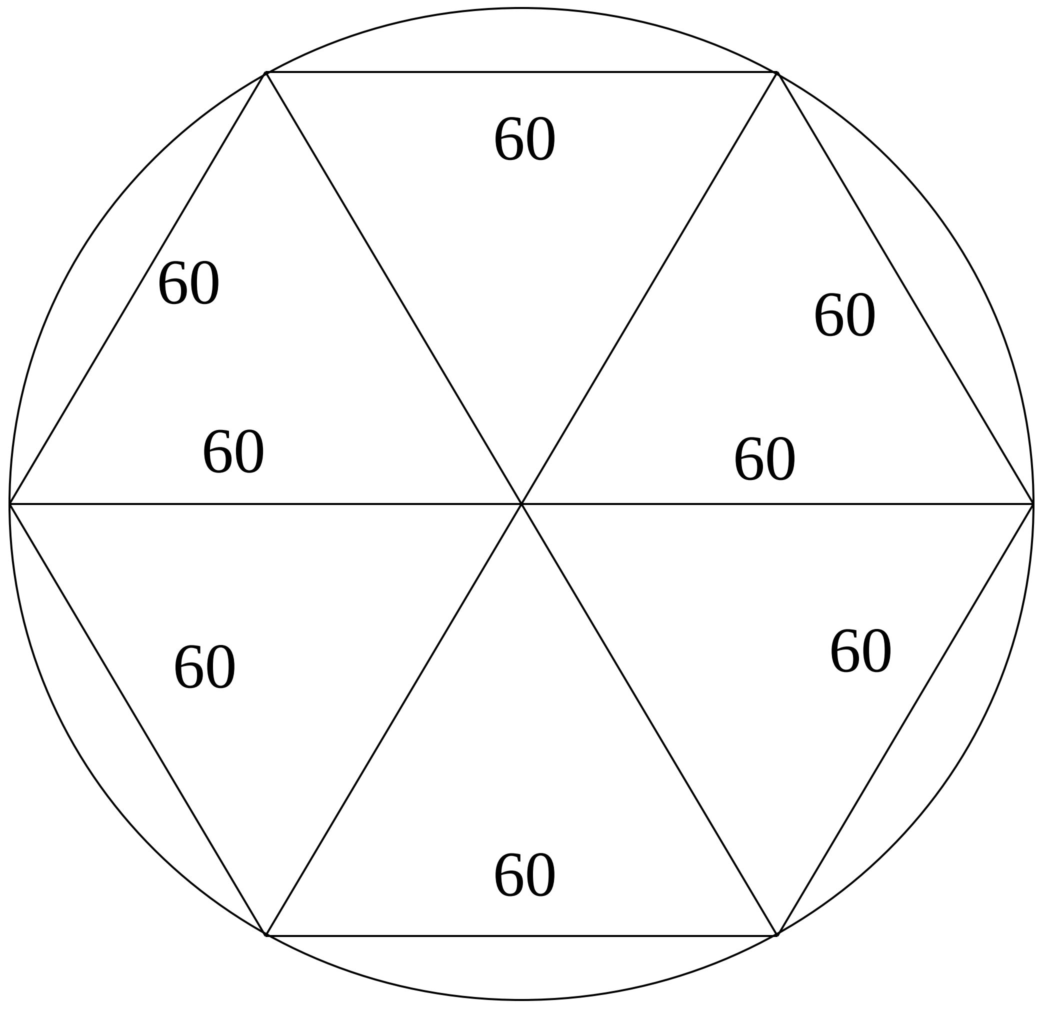
Os 360º possuem diversas divisões interessantes



O círculo trigonométricos foi dividido em 360 partes (graus) seguindo a notação sexagesimal babilônia



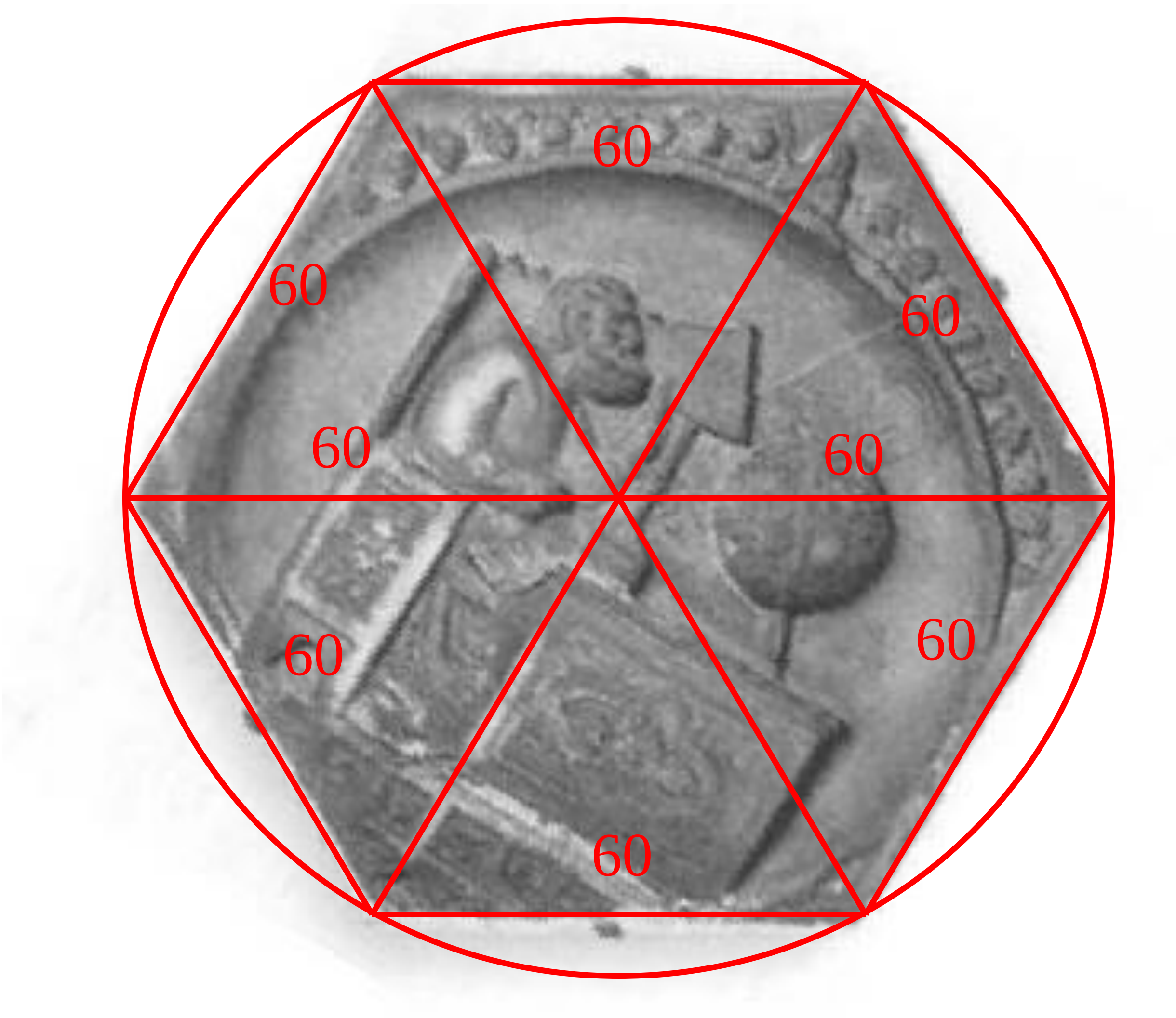
Círculo trigonométrico grego, com raio constante (60, base das frações sexagesimais)



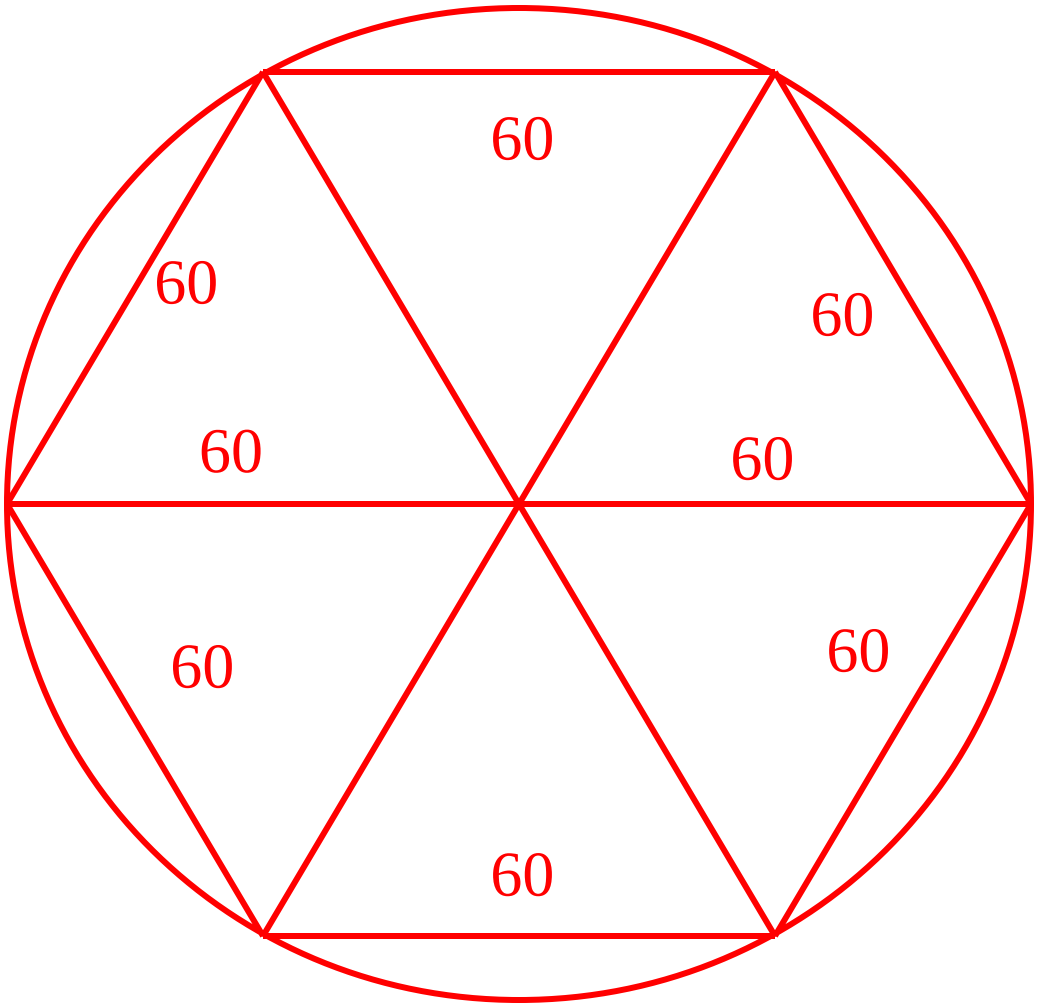
Ptolomeu de Alexandria (c. 85 - 165)

Círculo trigonométrico, tábua de senos

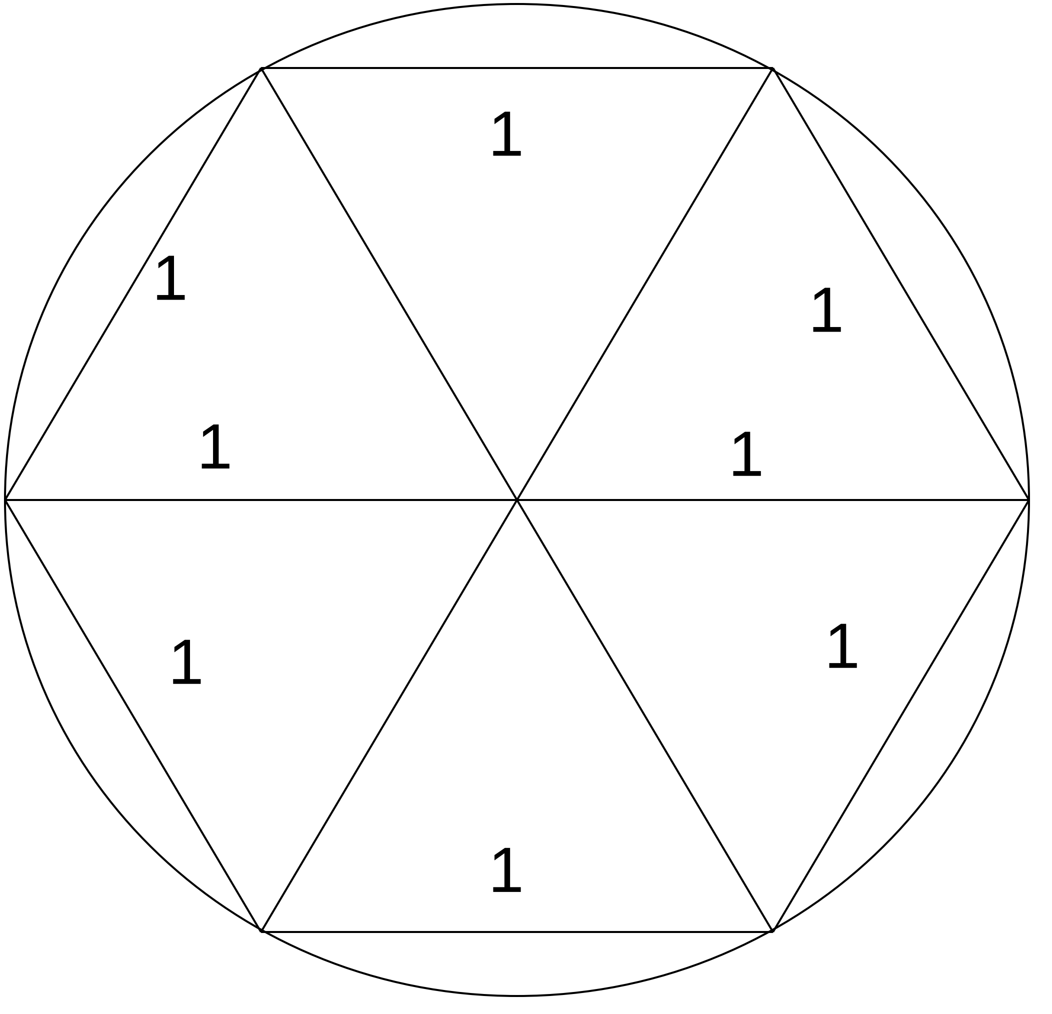
Círculo trigonométrico de Ptolomeu, com raio constante (60, base das frações sexagesimais)



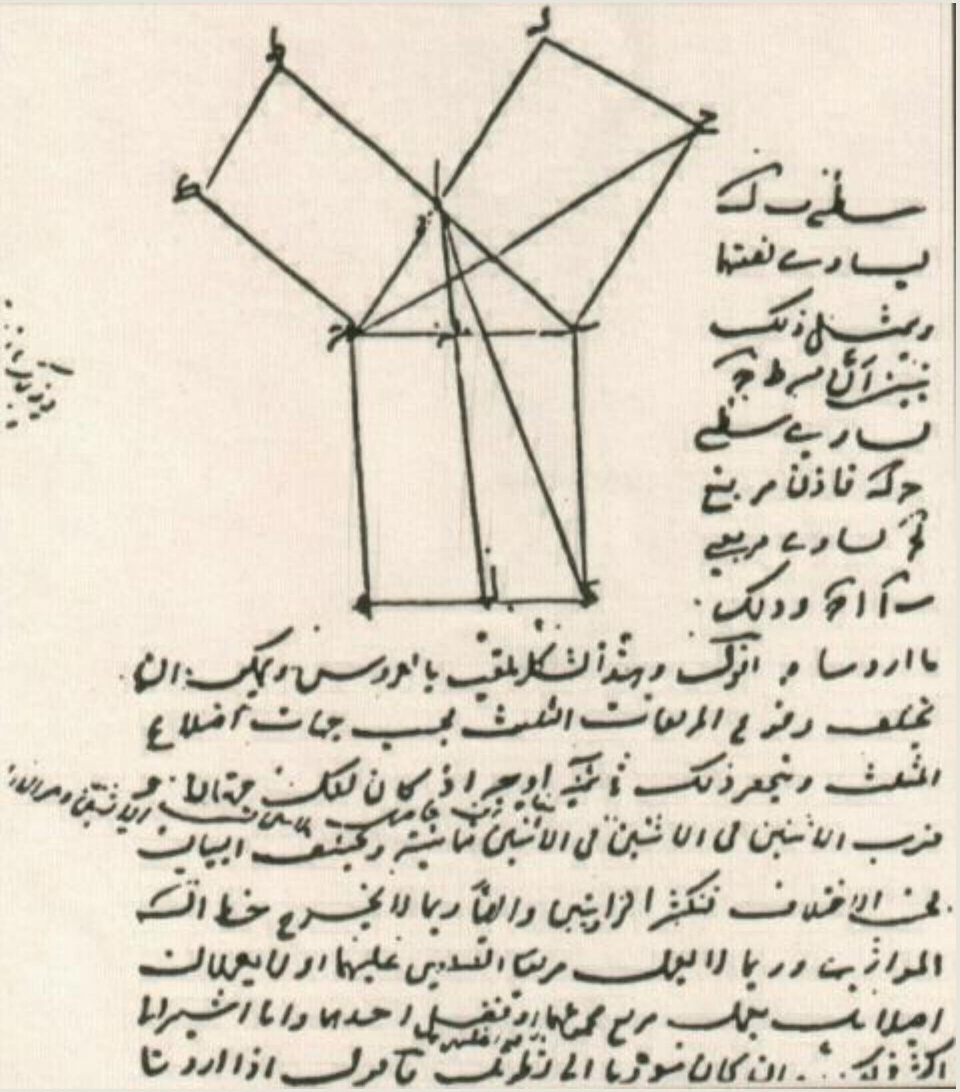
Círculo trigonométrico de Ptolomeu, com raio constante (60, base das frações sexagesimais)



O círculo trigonométrico posteriormente passou a ter raio unitário

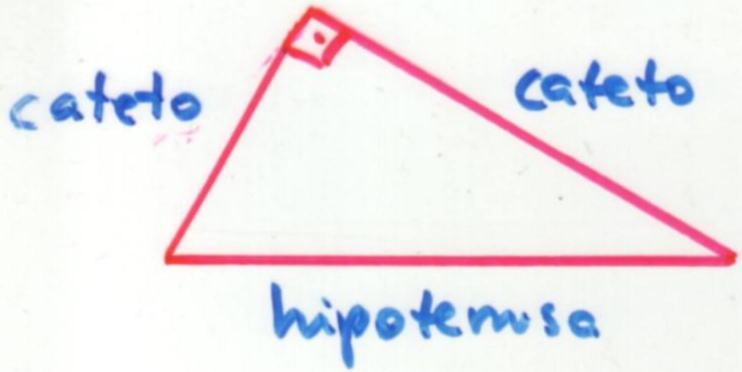


Os gregos inauguraram o método da prova imaterial, a demonstração matemática



Teorema de Pitágoras em *Os Elementos* de Euclides (manuscrito árabe)

Foram os gregos que generalizaram o conhecimento egípcio



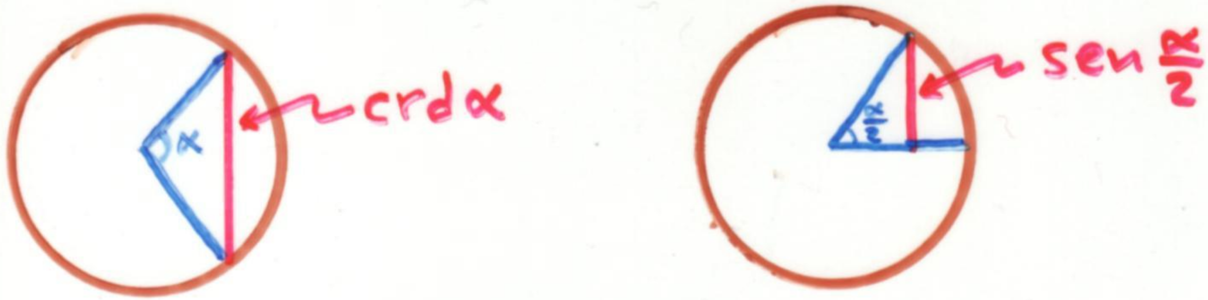
CATHETO'S → Retas Perpendicular
(daí "catetômetro")

HYPO + TENEIN → "esticar" + "sob"
(debaixo do ângulo reto)

HYPÓ → debaixo, sob
- hipotensão
- hipoglicemia
- hipodérmica

HÍPPOS → cavalo
- hipódromo
- hipopótamo
- hipismo

Origem da palavra seno, do “Almagesto” (O Maior): nome dado pelos árabes à obra de Ptolomeu sobre astronomia matemática



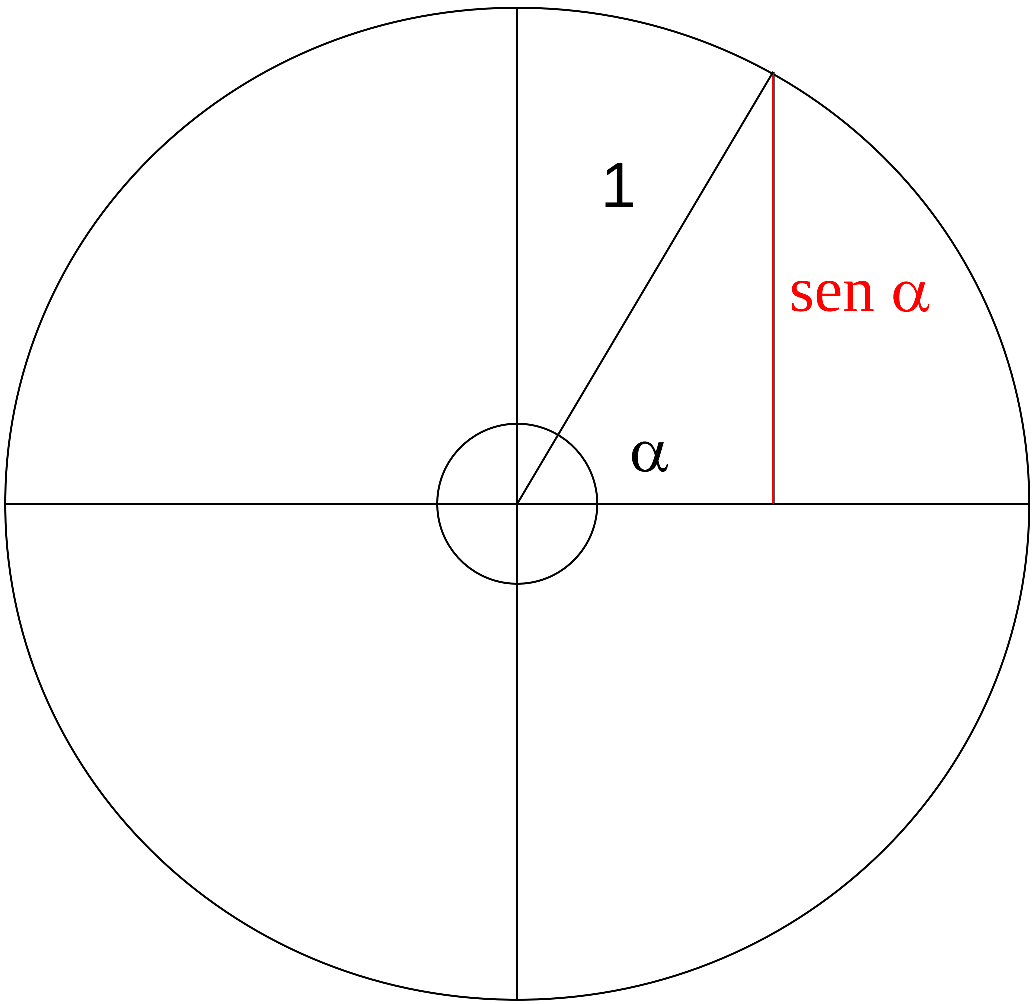
Seno ⇒ Meia-corda

Sânscrito → JIVA (meia-corda)
Árabe → JAIB (baia, enseada)

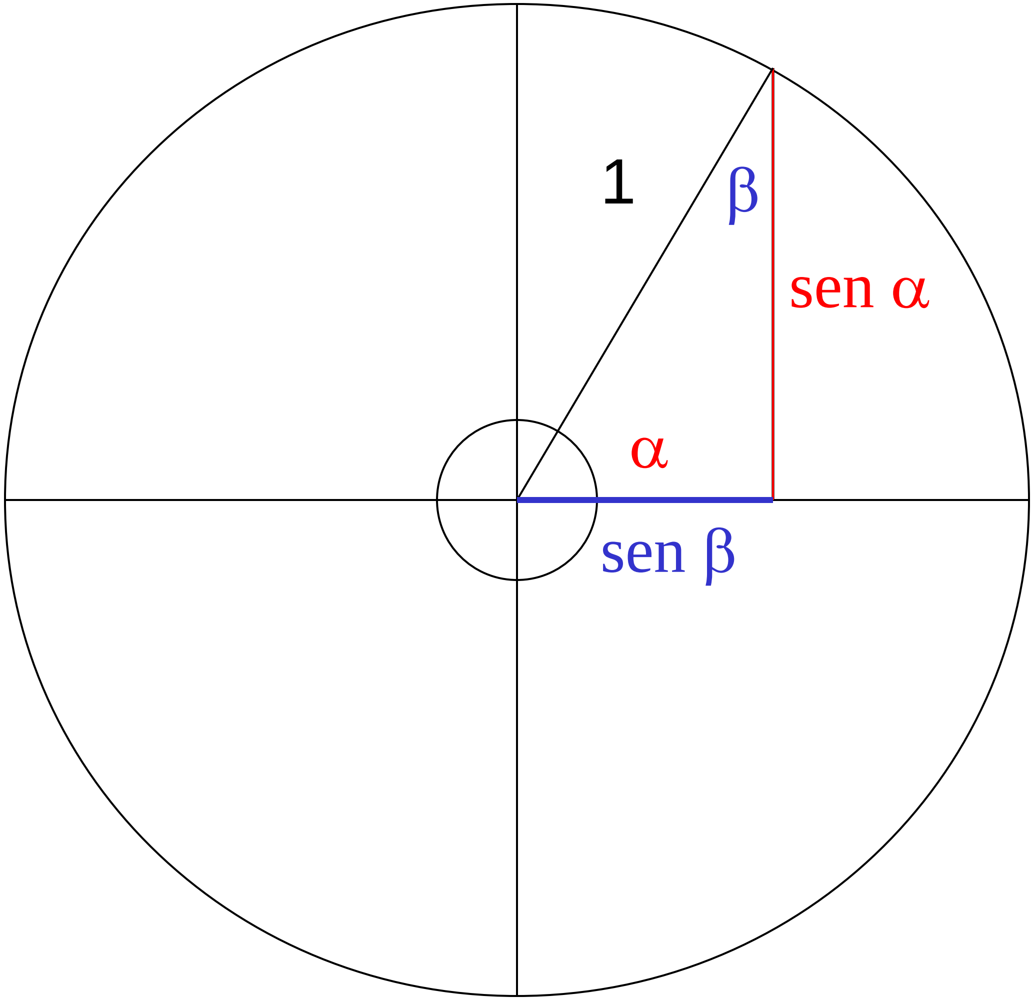
Os tradutores latinos (Gerardo de Cremona, 1150), traduziram do árabe diretamente.

Em latim, baia, enseada é SINUS
(daí sinuoso, sinuosidade, sino, e <u>SENO</u>)

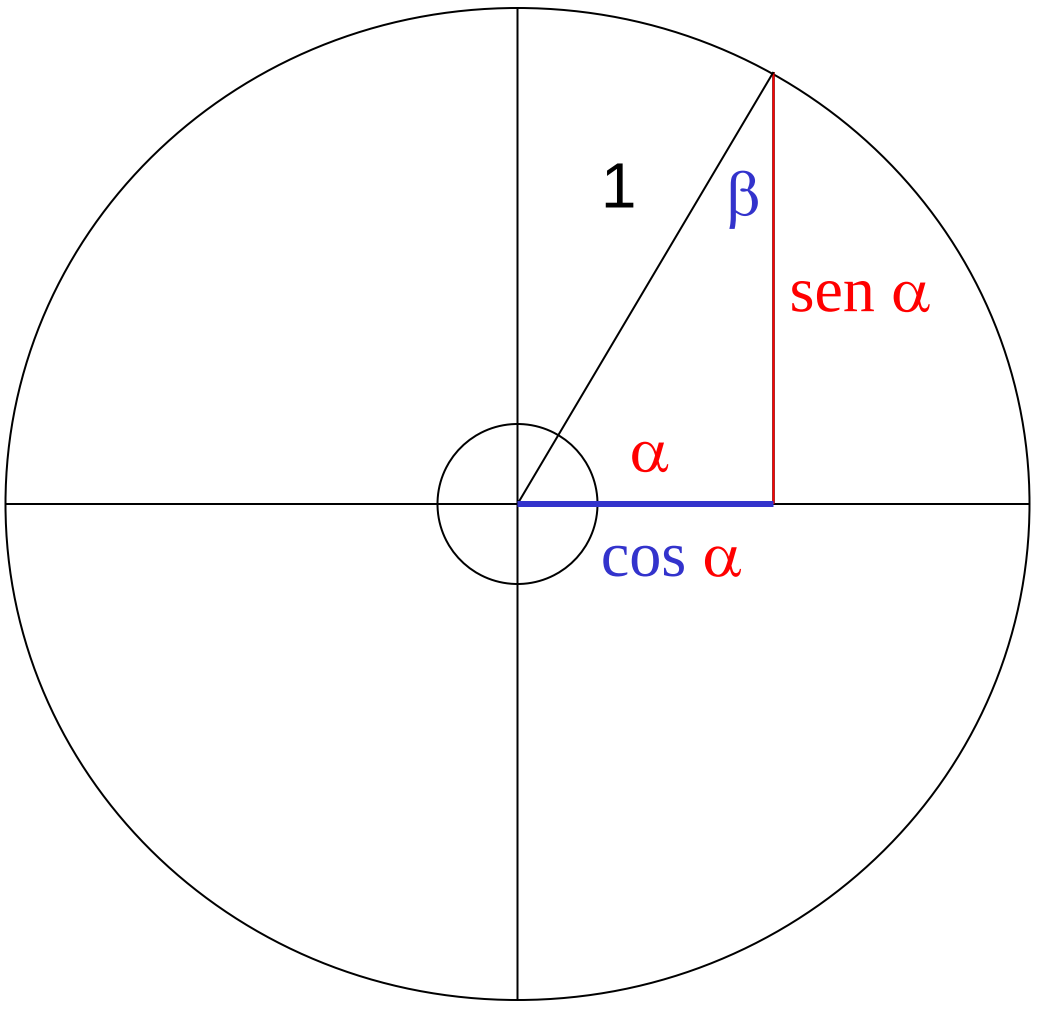
Para os gregos não haviam *razões* trigonométricas, mas *linhas* trigonométricas



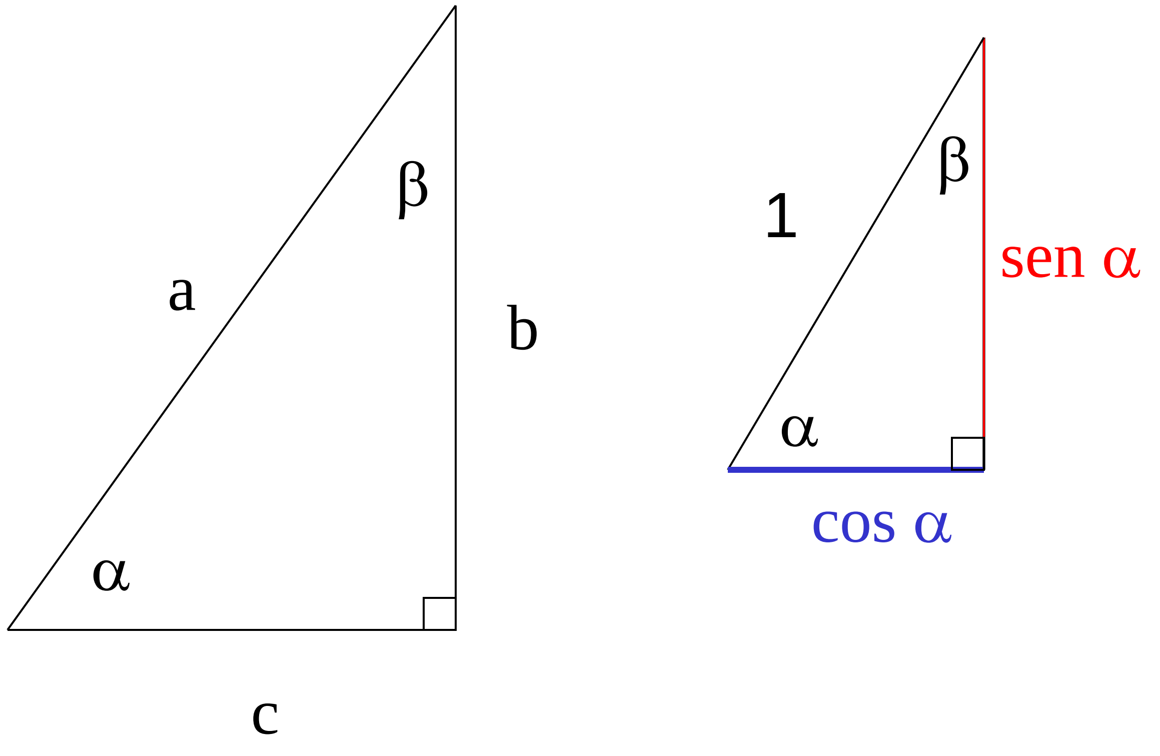
Havia apenas o seno, o cosseno era apenas o seno do ângulo complementar (não tinha nome próprio)



A palavra cosseno vem de *complementi sinus* (seno do ângulo complementar)

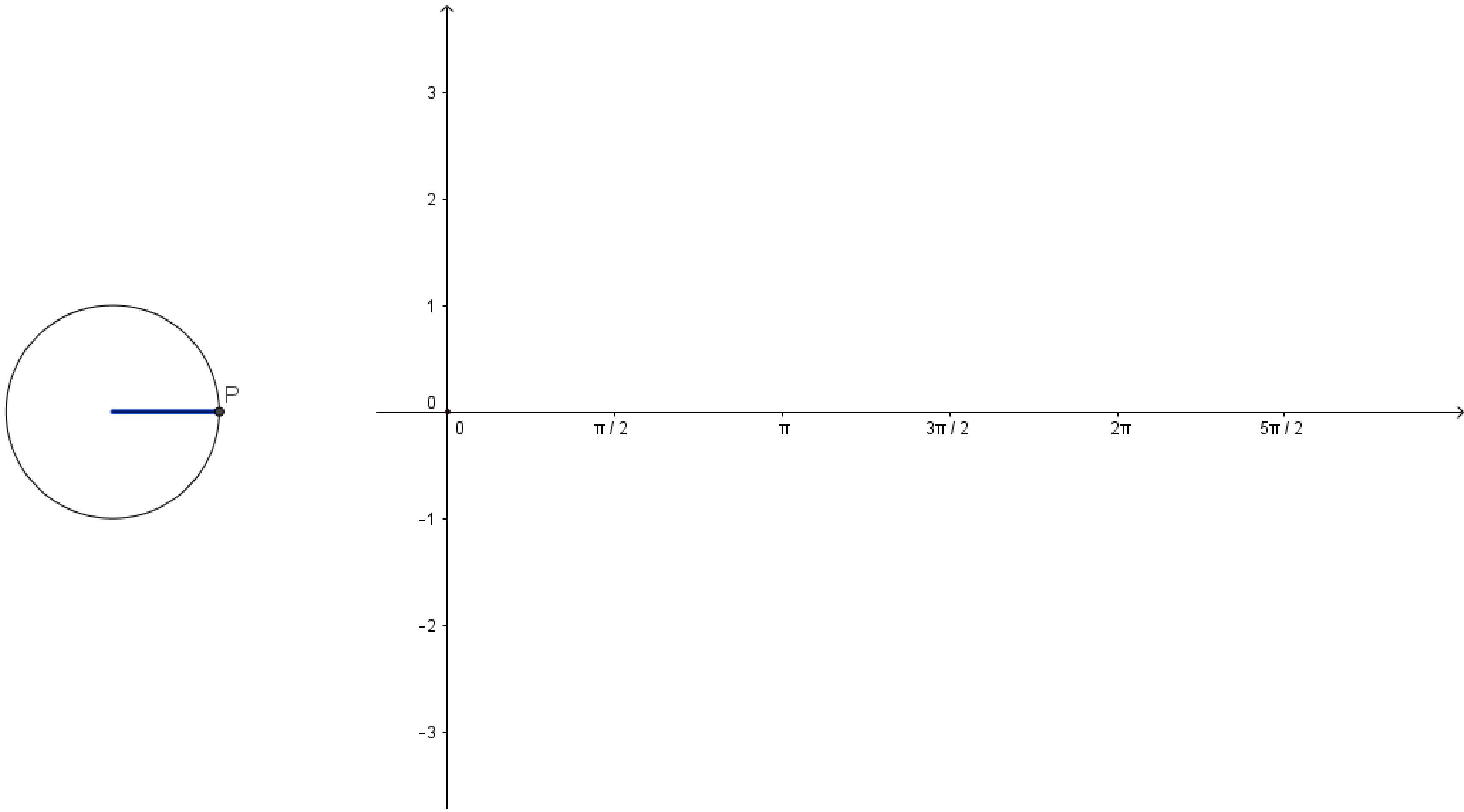


Seno e cosseno não eram razões entre lados, mas comprimentos de segmentos de reta, aplicáveis aos demais triângulos por semelhança

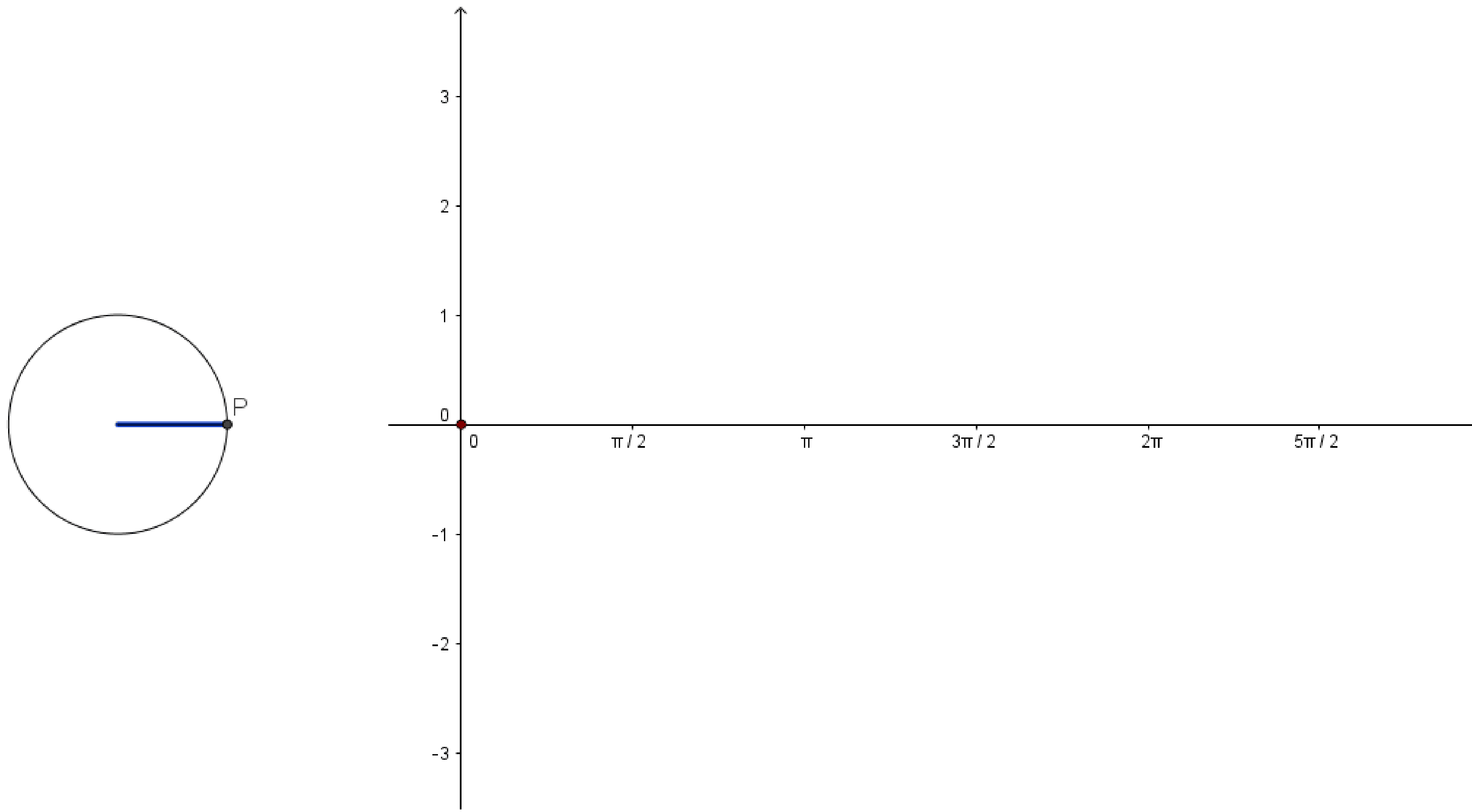


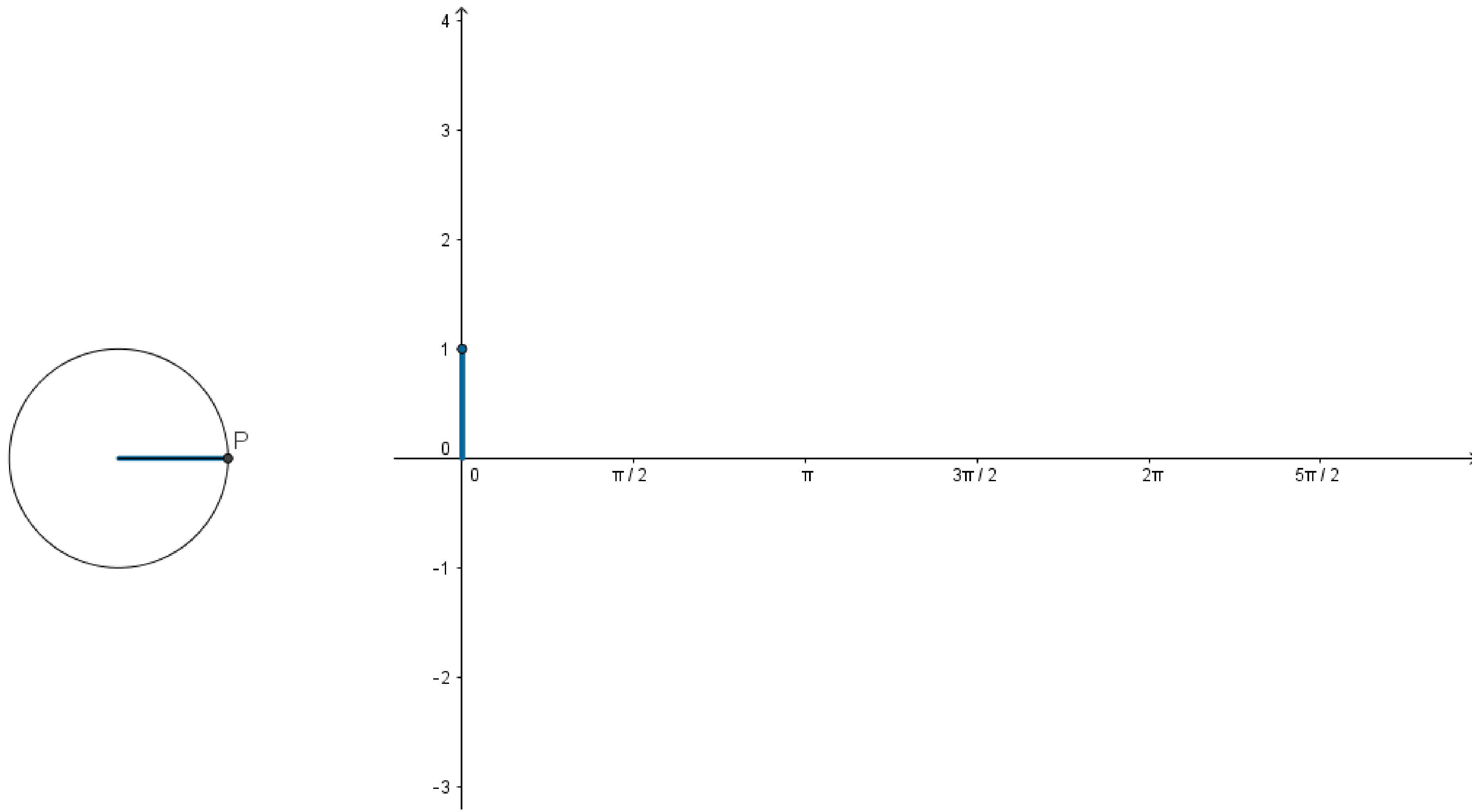
$\text{sen } \alpha = b/a$

$\cos \alpha = c/a$

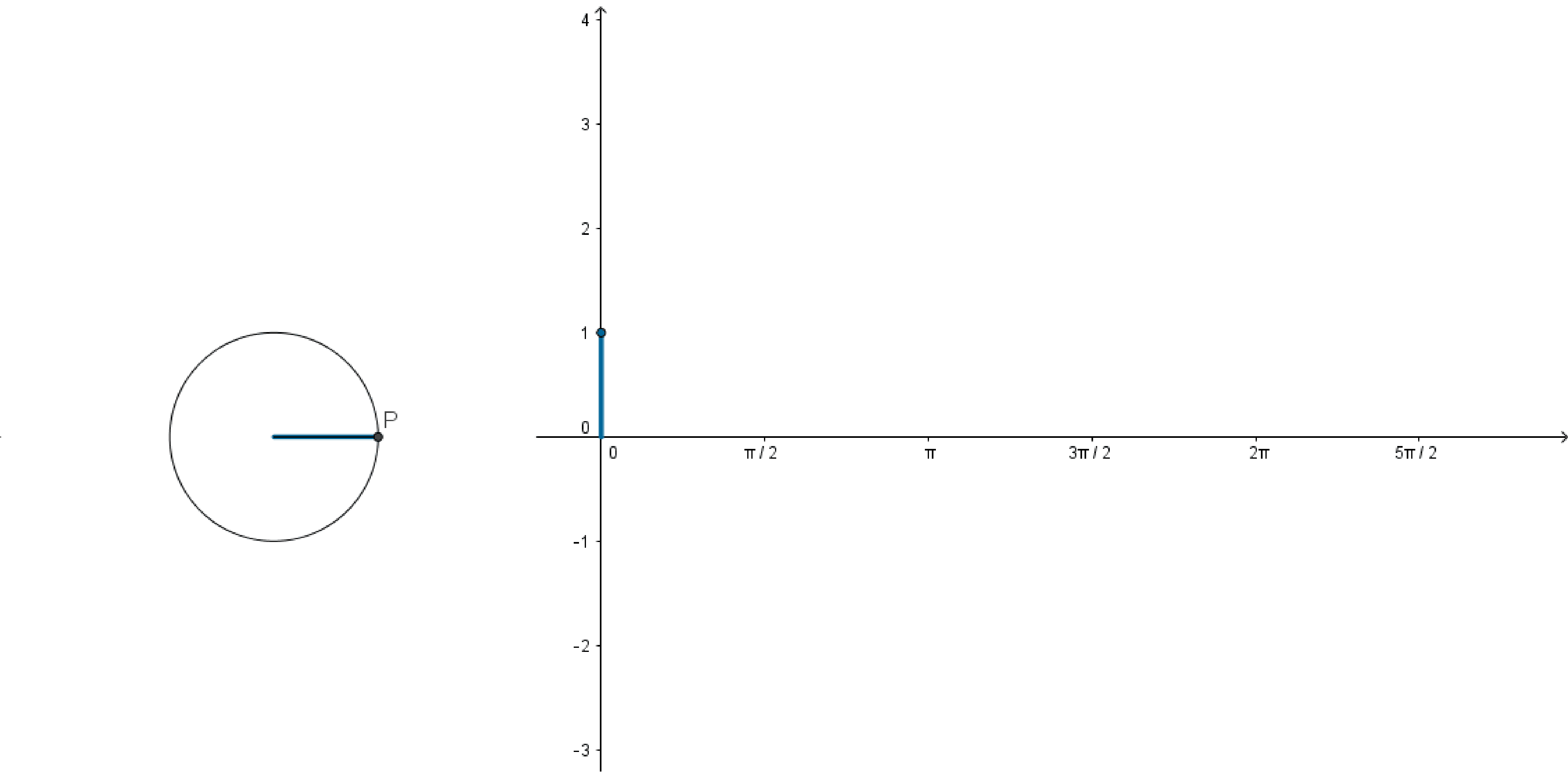


P
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2

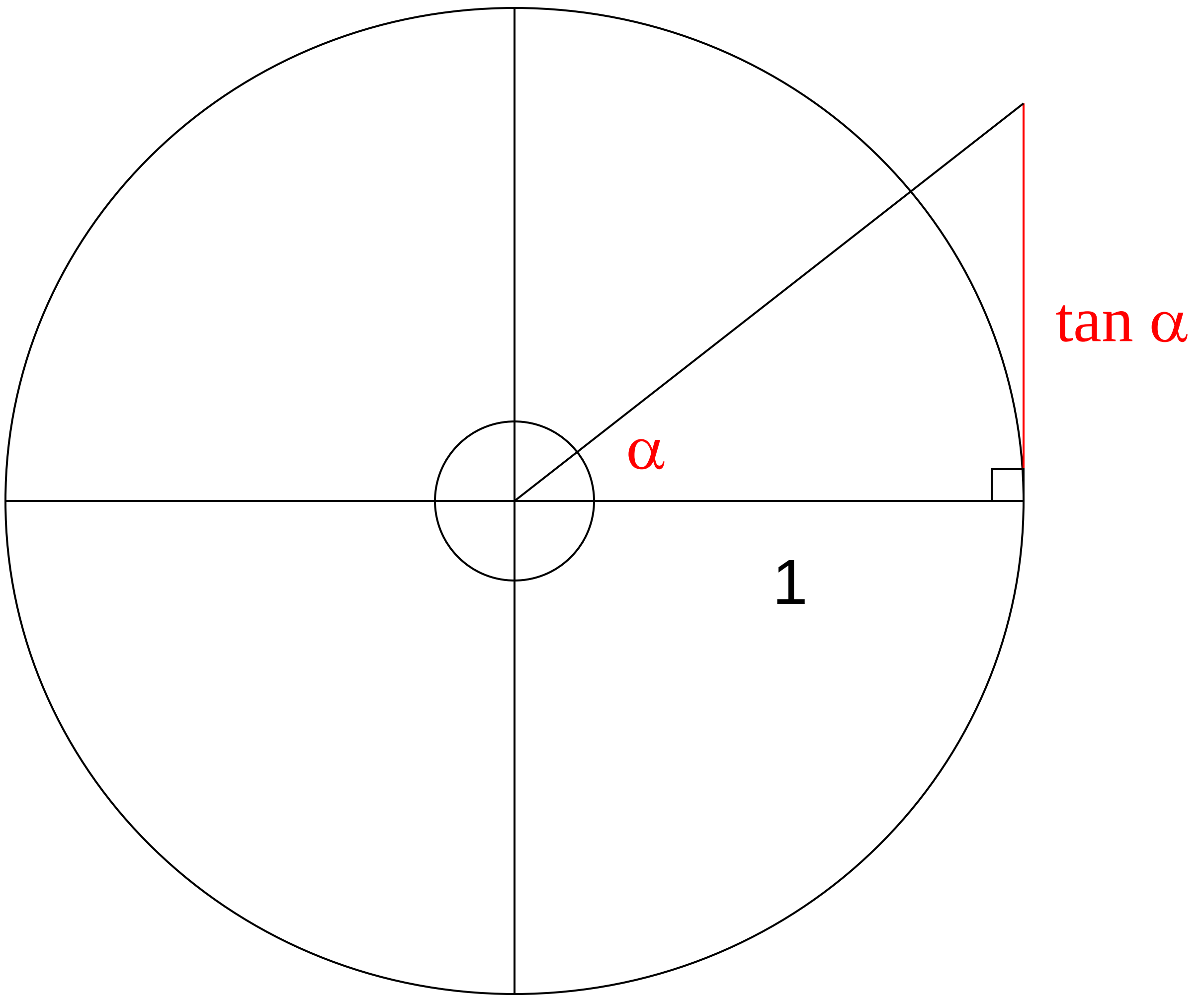

P
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2



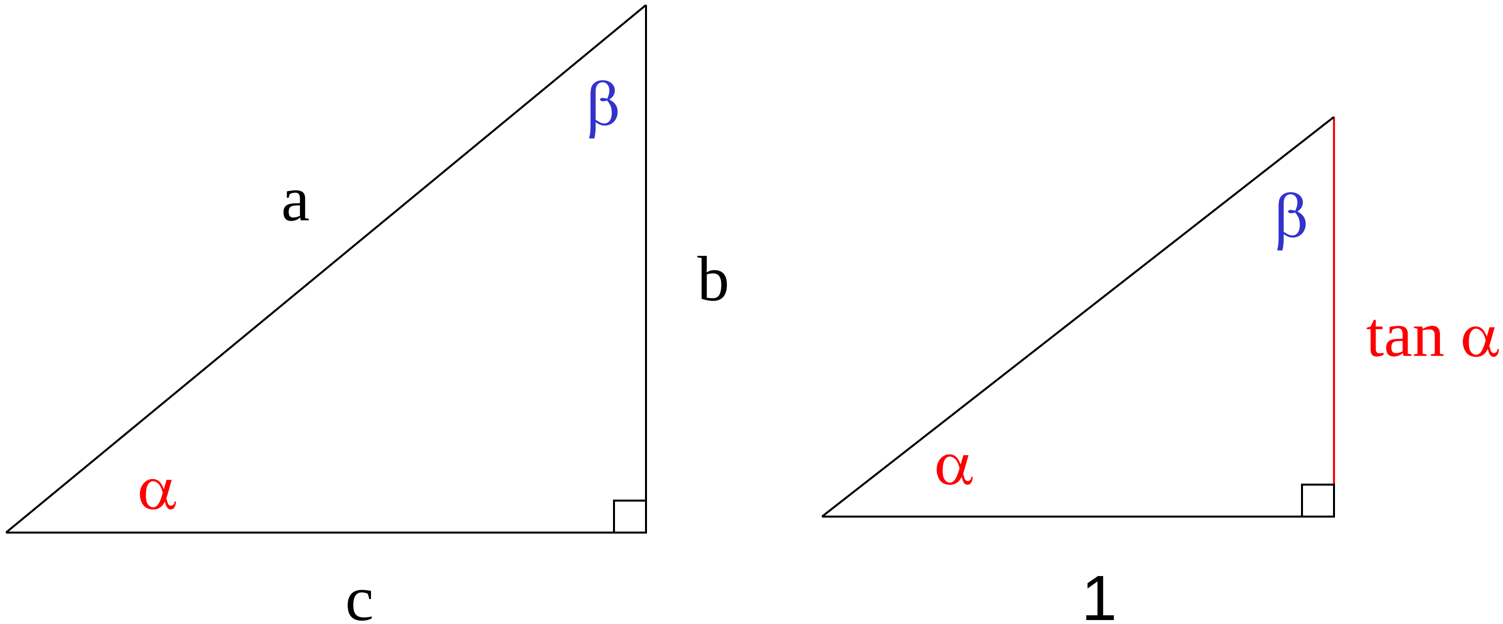
P
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2


P
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2

Tangente se refere à reta que apenas toca (*tange*) o círculo

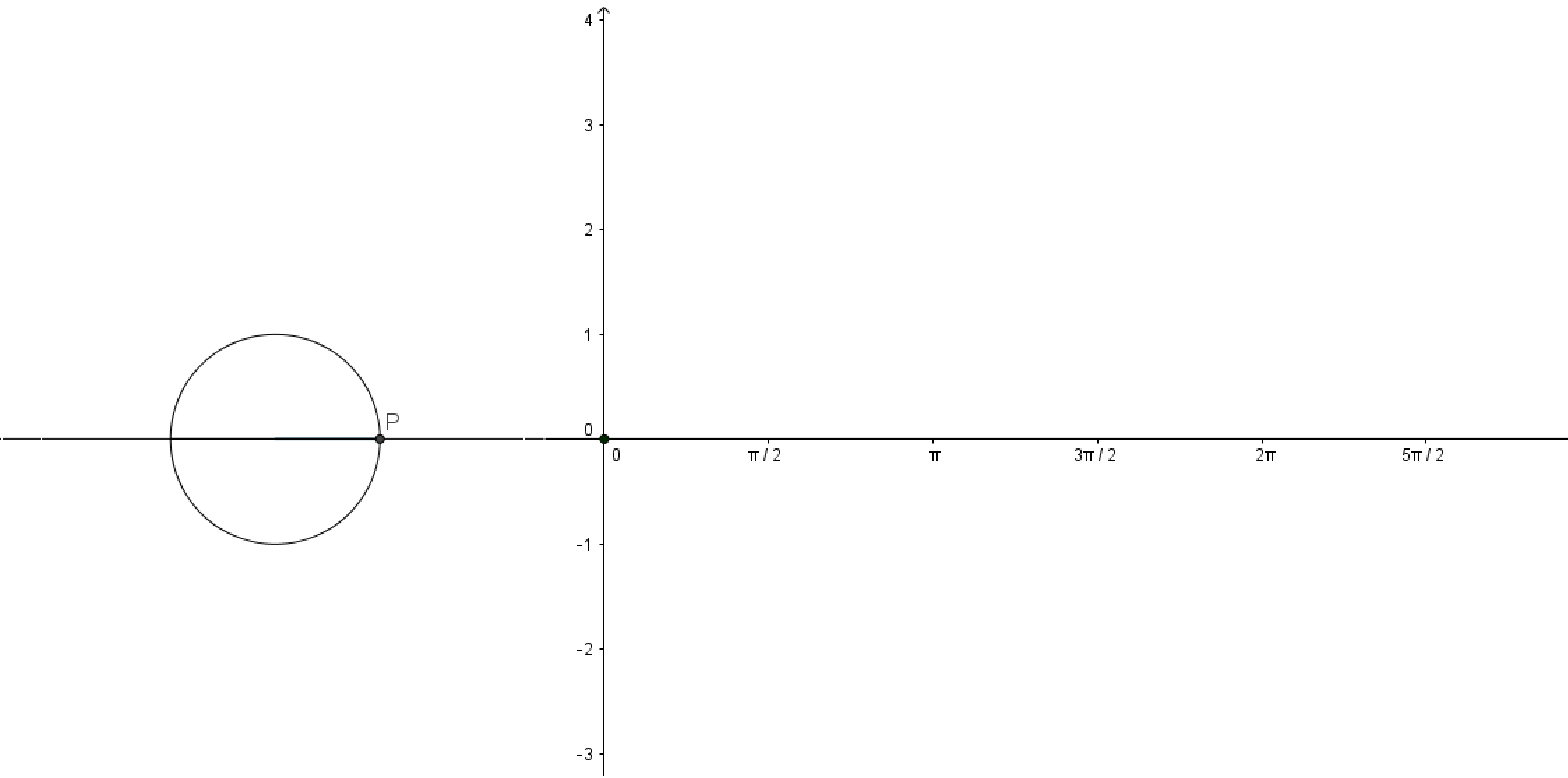


Cotangente também vem de *tangente do ângulo complementar*

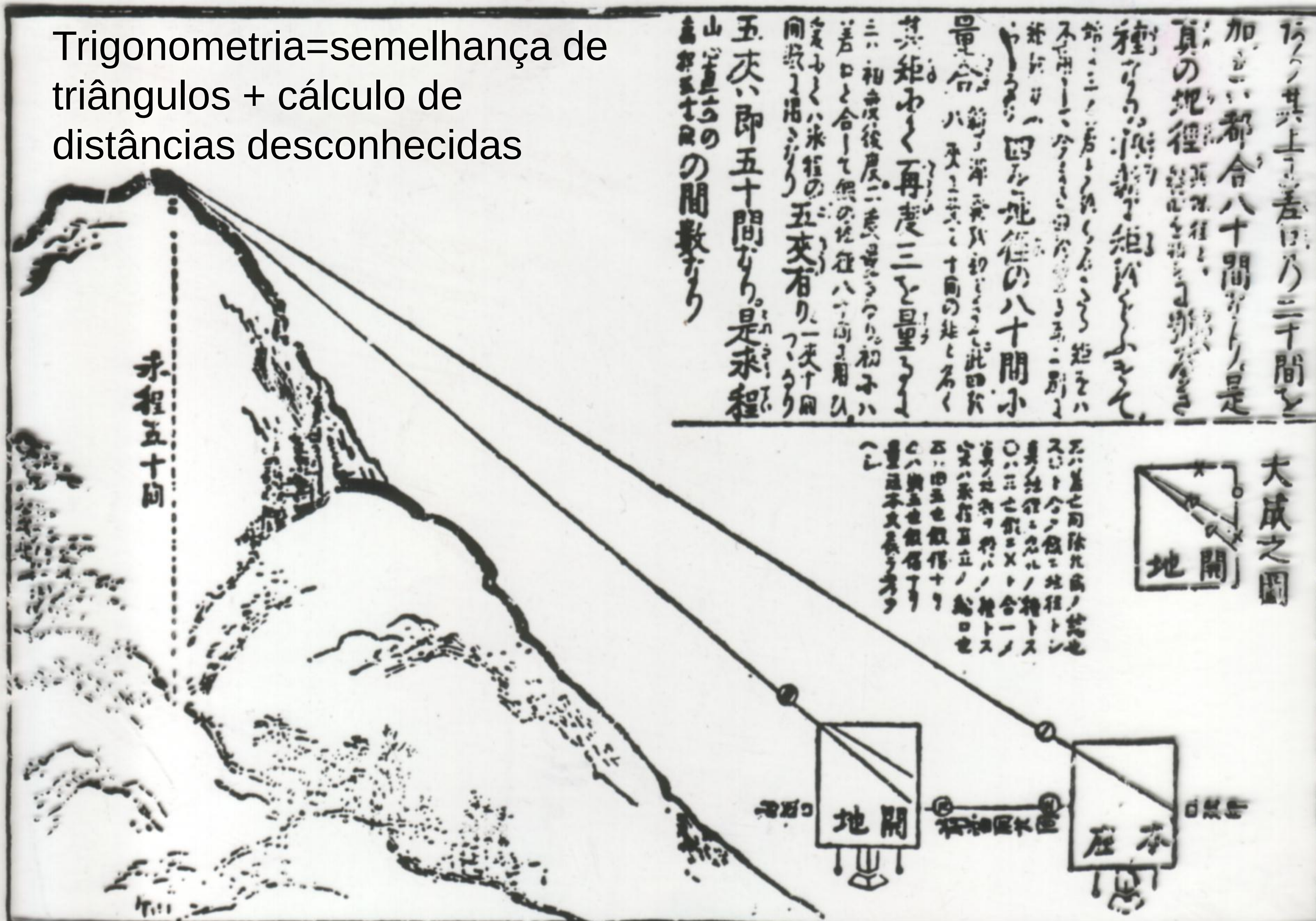


$\tan \alpha = b/c$

$\tan \beta = \cot\text{an}\ \alpha = c/b$


P
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
π / 2
π
3π / 2
2π
5π / 2

Trigonometria=semelhança de triângulos + cálculo de distâncias desconhecidas



JAPANESE TRIGONOMETRY OF c. 1700

Trigonometria oriental mostrando o cálculo da altura de uma montanha

Grécia Antiga: berço da Matemática sistematizada

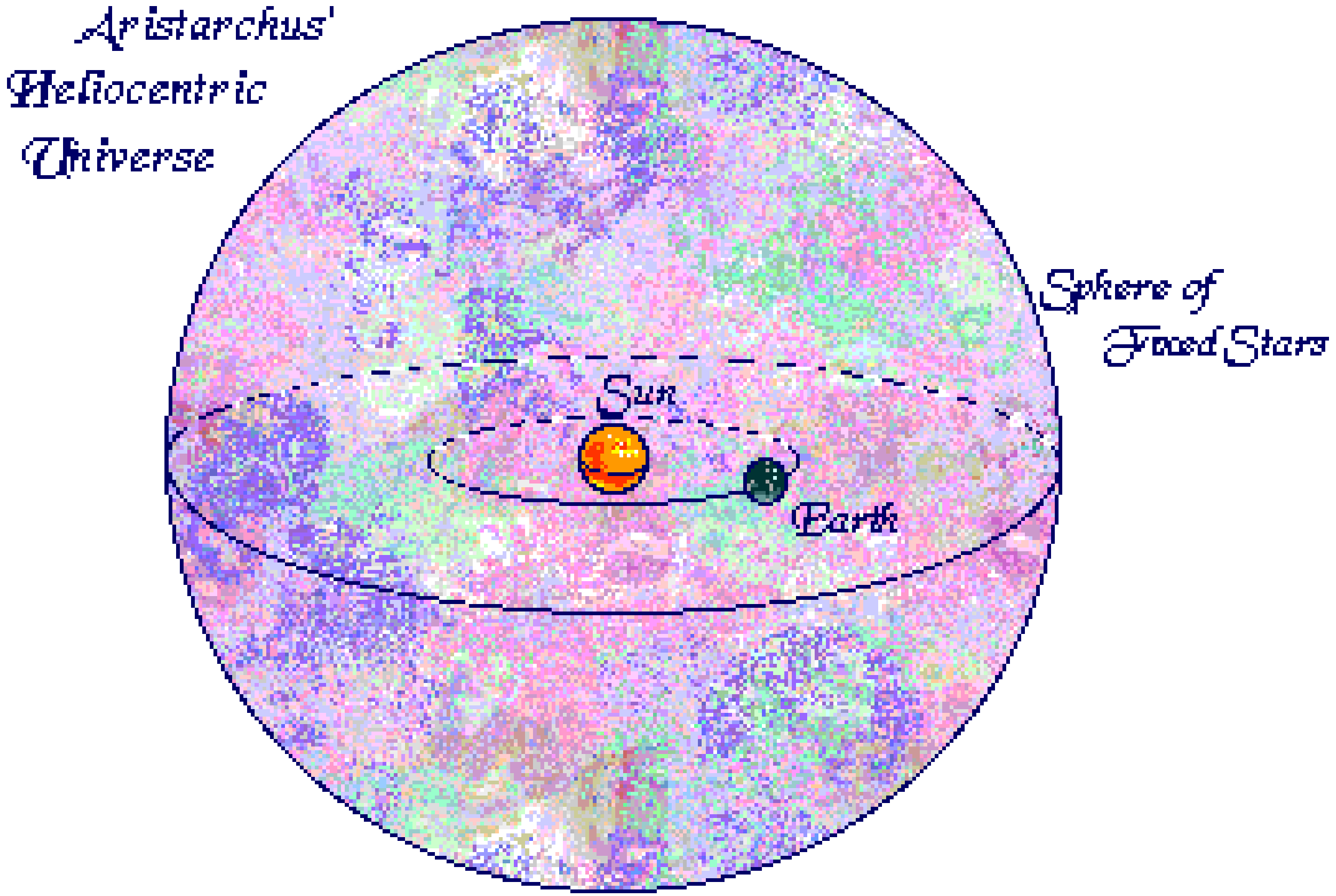
Fontes principais: referências históricas em escritos filosóficos ou matemáticos

Escrita: grego

Período: 750 - 50 aC

Região: em torno do mar Egeu

Helenismo: a cultura grega espalhou-se pelo mundo através do império que Alexandre Magno construiu entre 333 e 323 aC,
fundando diversos centros cosmopolitas de integração racial e cultural, alguns com o nome de *Alexandria*.
Alexandre foi aluno de Aristóteles.



Aristarco de Samos (c. 310 - 230 aC)

O “Copérnico” da Antiguidade

Aristarco mediu a distância da Terra a Lua de modo simples

Diagram of the Earth's Relationship to the Moon

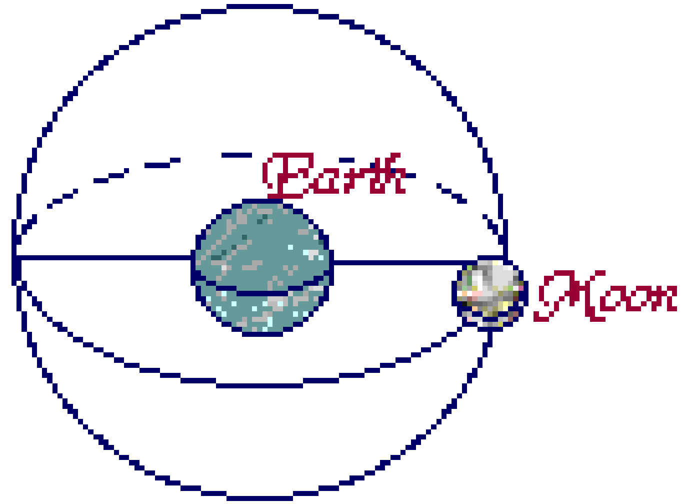
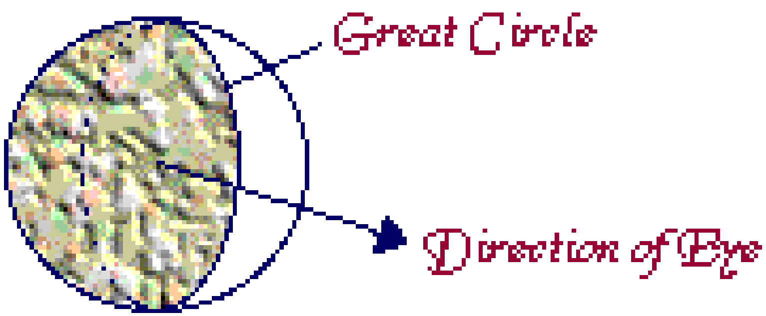
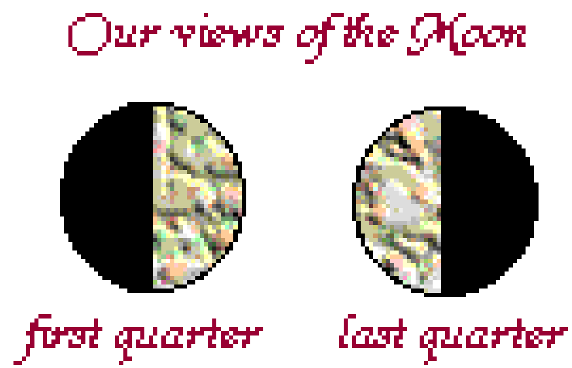


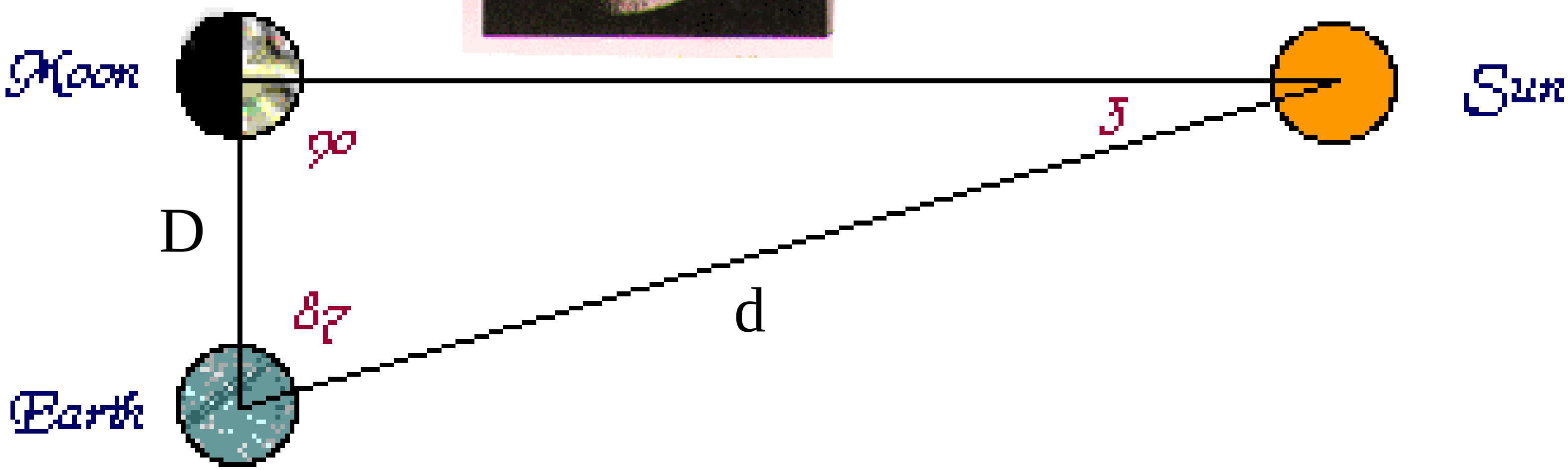
Diagrama da relação entre a Terra e a Lua





The great circle dividing the moon extends outward in the same plane as the eye of the viewer.

O círculo máximo que divide a lua estende-se no mesmo plano que o olho do observador



O conjunto EMS forma um triângulo retângulo

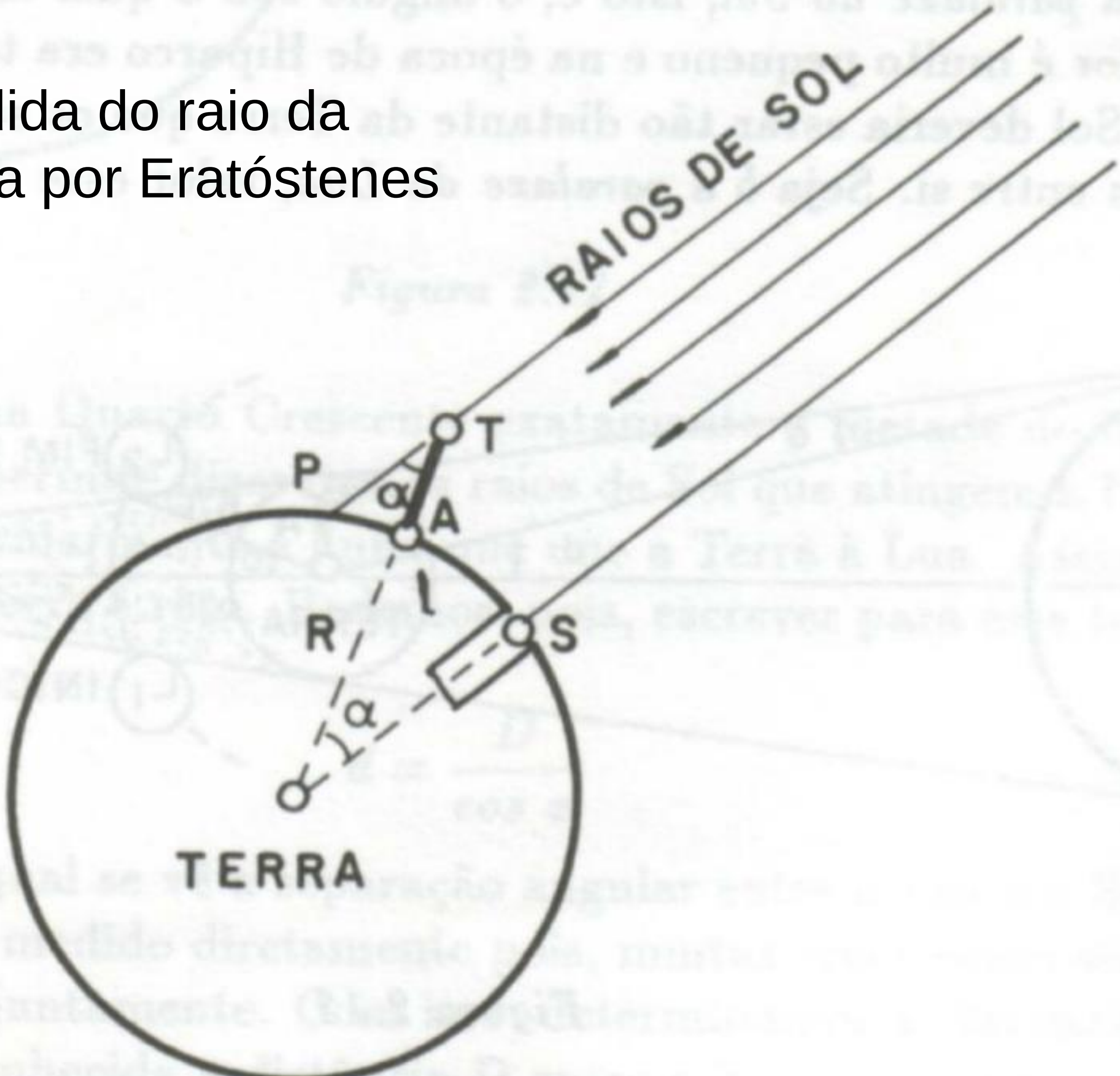
“A razão da distância entre E e S e T e L é maior que 18 por 1 e menor que 20 por 1”

Eratóstenes de Cirene (atual Líbia) (c. 276 - 196 aC)

“Beta” (segundo melhor em tudo)

Bibliotecário de Alexandria

Medida do raio da
Terra por Eratóstenes



Hiparco de Nicea (atual Turquia) (c. 190 - 120 aC)

“O maior astrônomo da Antiguidade”

Corrigiu vários cálculos de Aristarco

Valores atuais (médias em quilômetros)

Distância da Terra ao Sol: 149.600.000

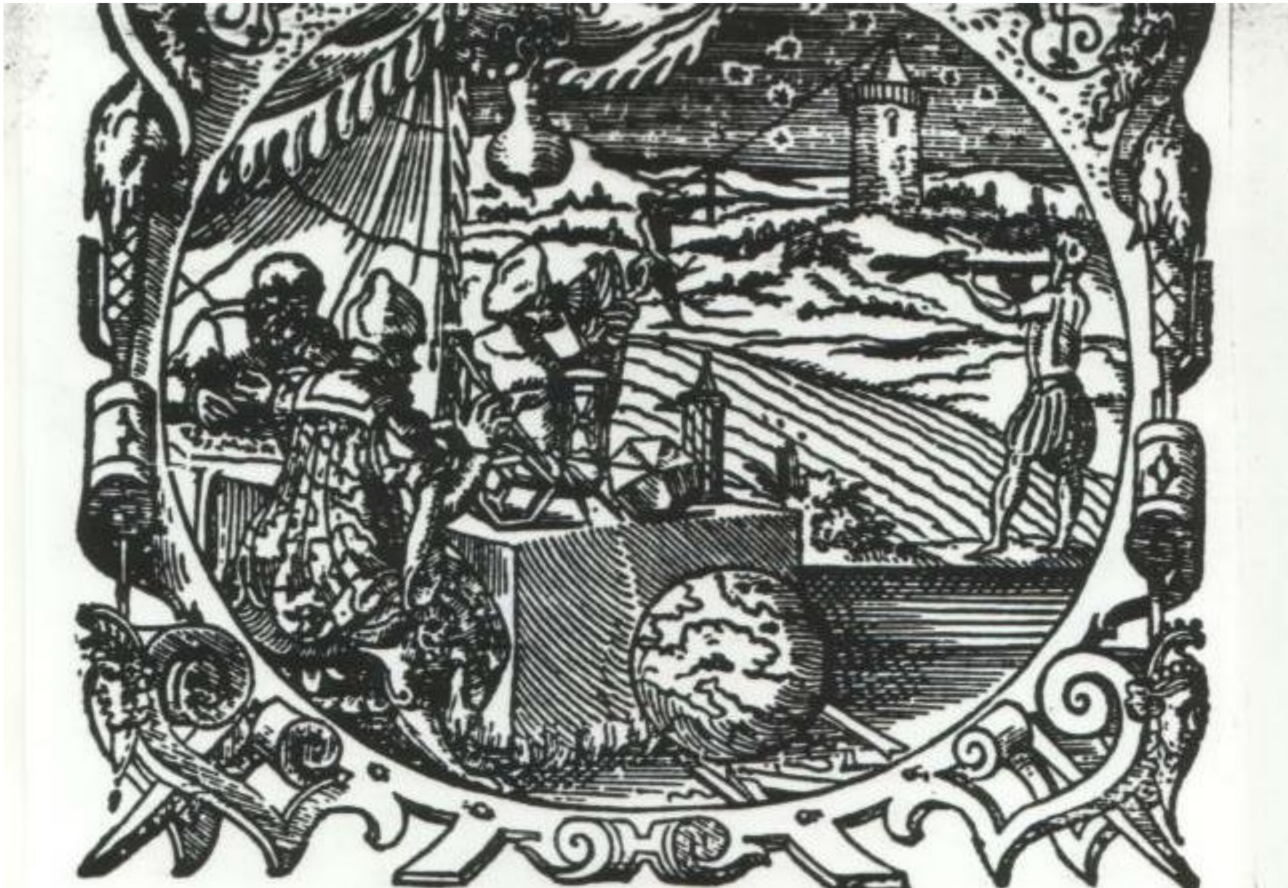
Distância da Terra à Lua: 384.400

Diâmetro do Sol: 1.390.000

Diâmetro da Lua: 3476

Diâmetro da Terra: 12.756

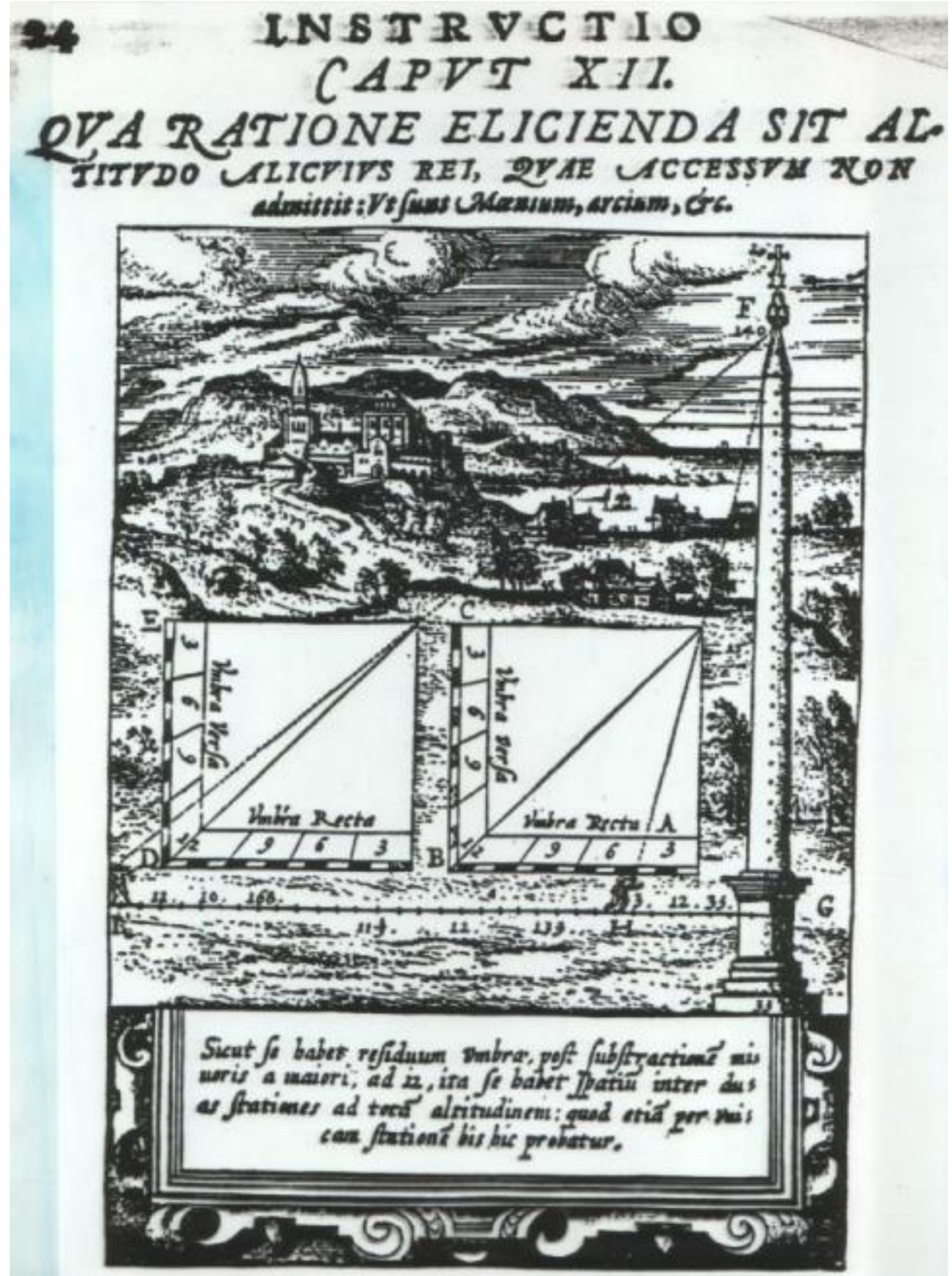
Aplicações da trigonometria



PRACTICAL MATHEMATICS IN THE 17TH CENTURY

From Simon Jacob's work of 1560 (1565 ed.)

Trigonometria surgiu do estudo da semelhança de triângulos com o objetivo de calcular distâncias inacessíveis

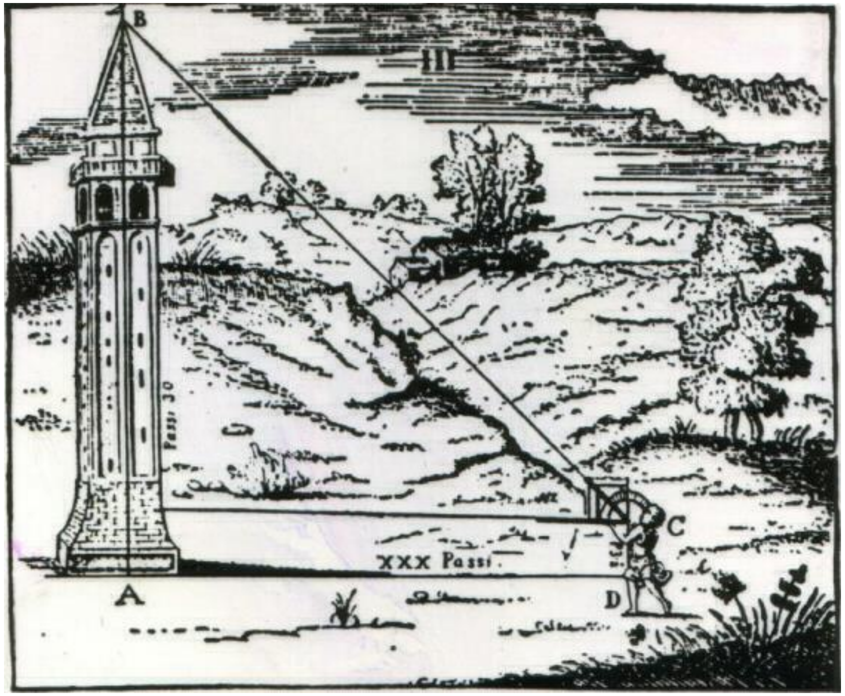

24 INSTRVCTIO

CAPVT XII.

QVA RATIONE ELICIENDA SIT ALTITVDO ALICVIVS REI, QVAE ACCESSVM NON admittit: Vt sunt Mœnium, arcium, &c.

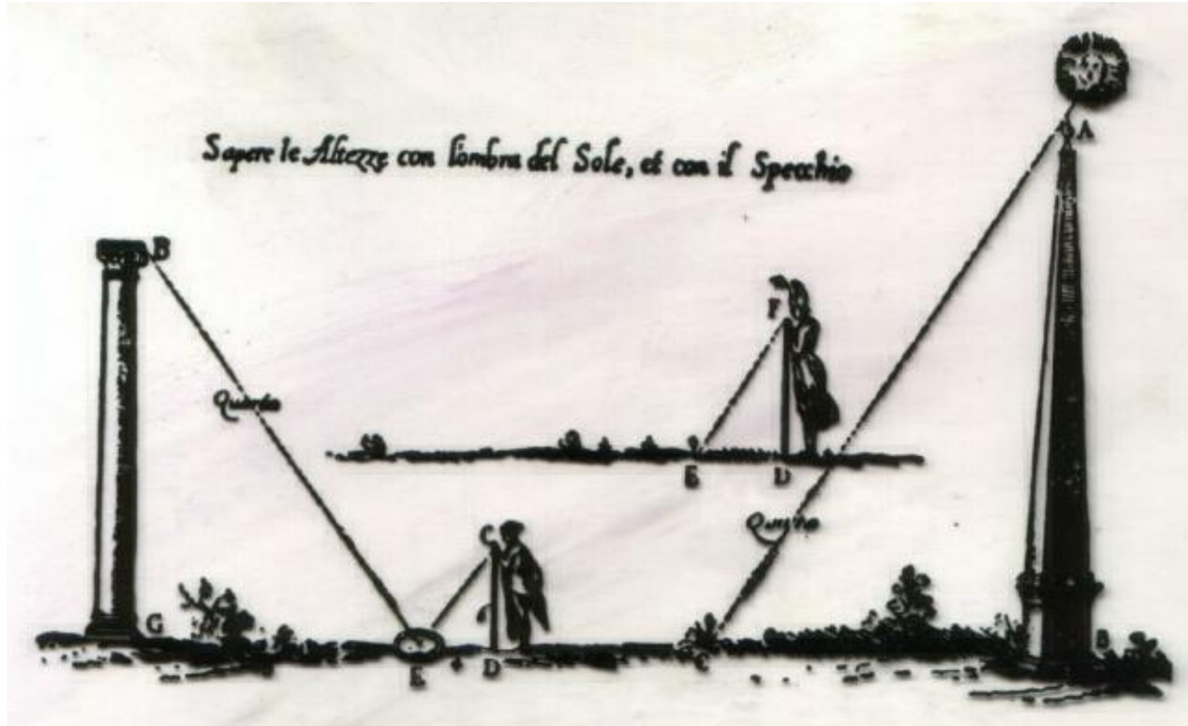
Sicut se habet residuum vmbræ, post substractioné minoris a maiori, ad 12, ita se habet spatiũ inter duas stationes ad totã altitudinem: quod etiã per vnicam stationẽ bis hic probatur.

O caminho pedagógico que defendemos:
a consideração da Matemática em sua fase de construção científica, e não da Matemática pronta e sistematizada.



O estudo da História da Matemática é
a grande fonte para a apreensão da ordem lógica que revela a Matemática enquanto Ciência em construção.
Exemplo: ensinar trigonometria pelas aplicações que fizeram com que surgisse, a necessidade do cálculo de distâncias inacessíveis.

Chamamos essa abordagem de *Arte de Contar*, pois *contar* em diversas línguas se aplica tanto a contar histórias quanto a contar objetos.

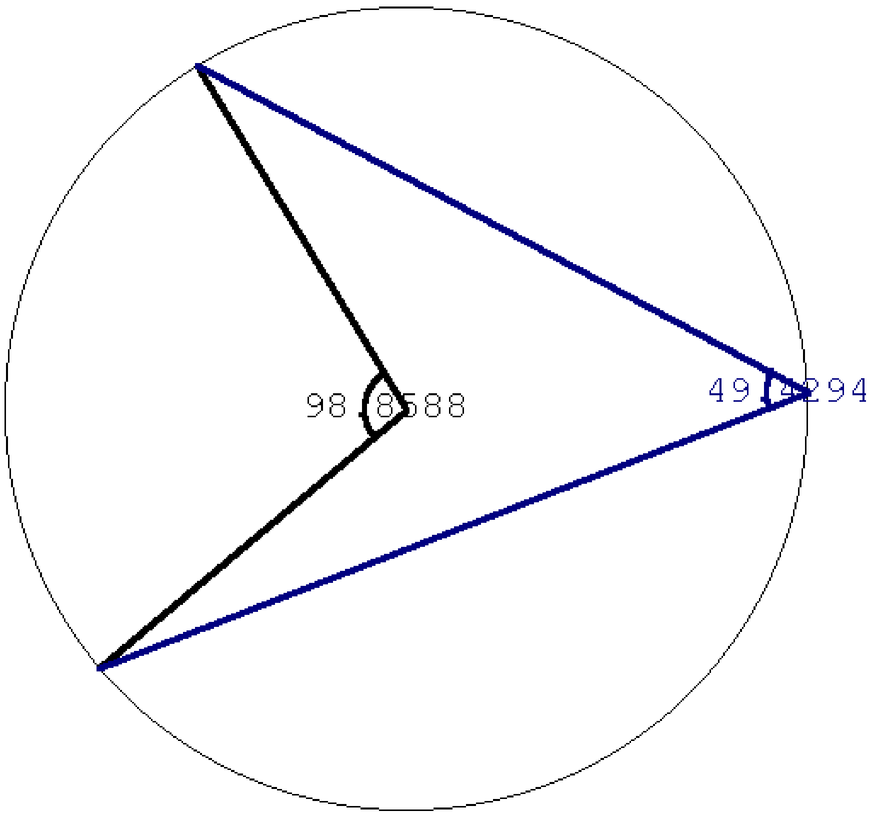


Mas não é necessário *contar* a história propriamente dita de um assunto.
Há professores de Matemática que gostam de História, outros não.

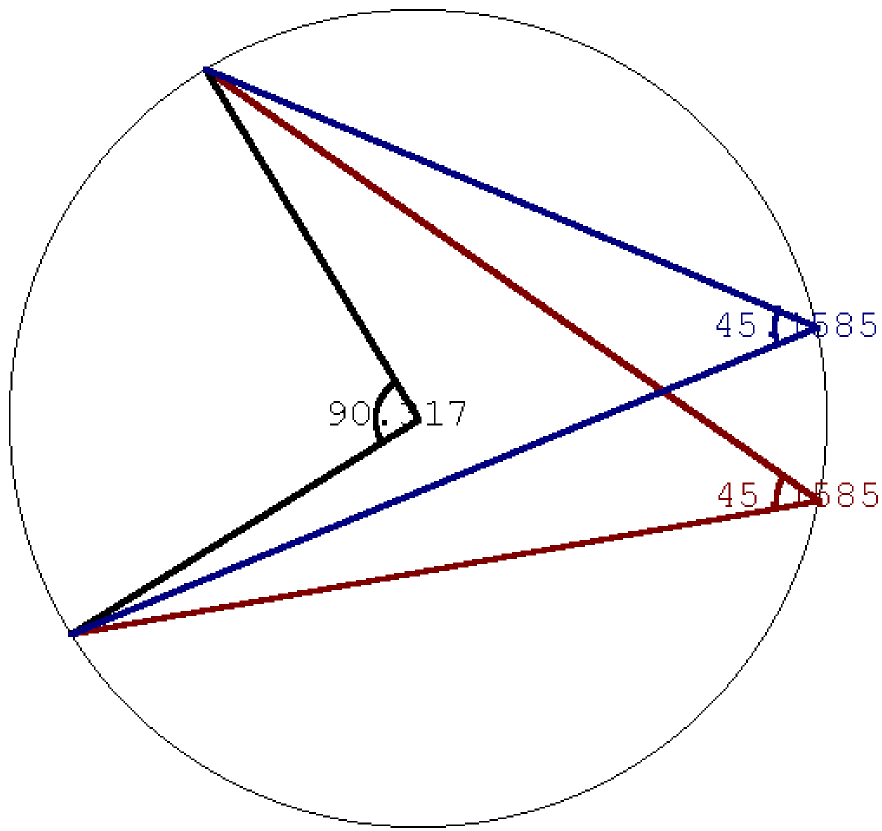
Ptolomeu de Alexandria (c. 85 - 165)

Condensou e estabeleceu os métodos da trigonometria

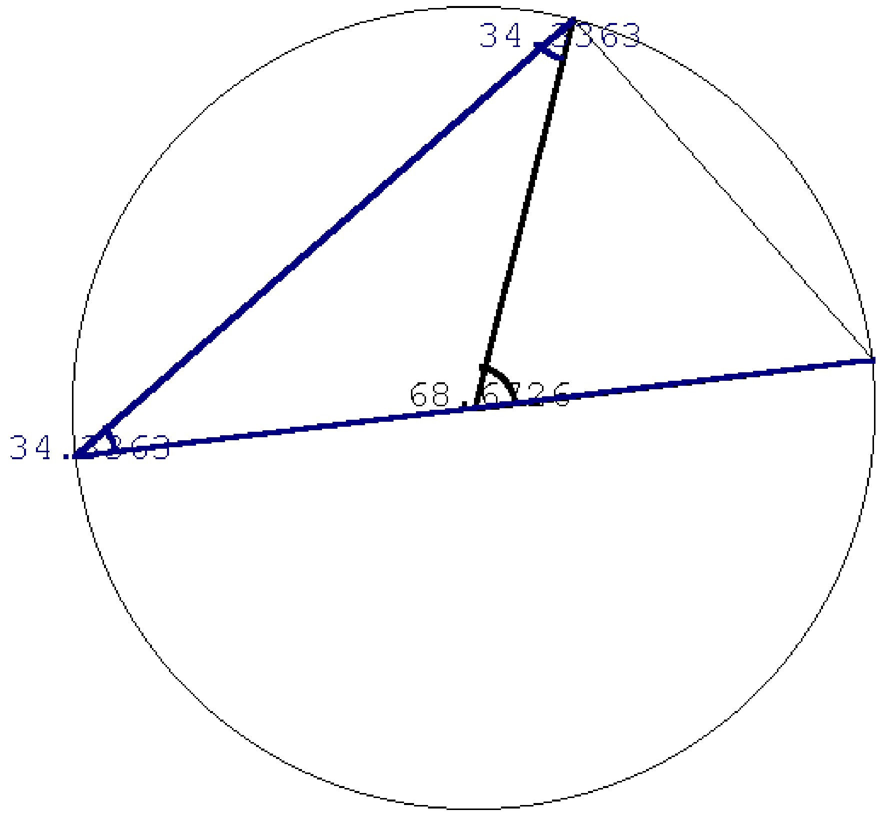
Ptolomeu consolidou o uso de diversas propriedades já descobertas pelos gregos relacionadas aos círculos



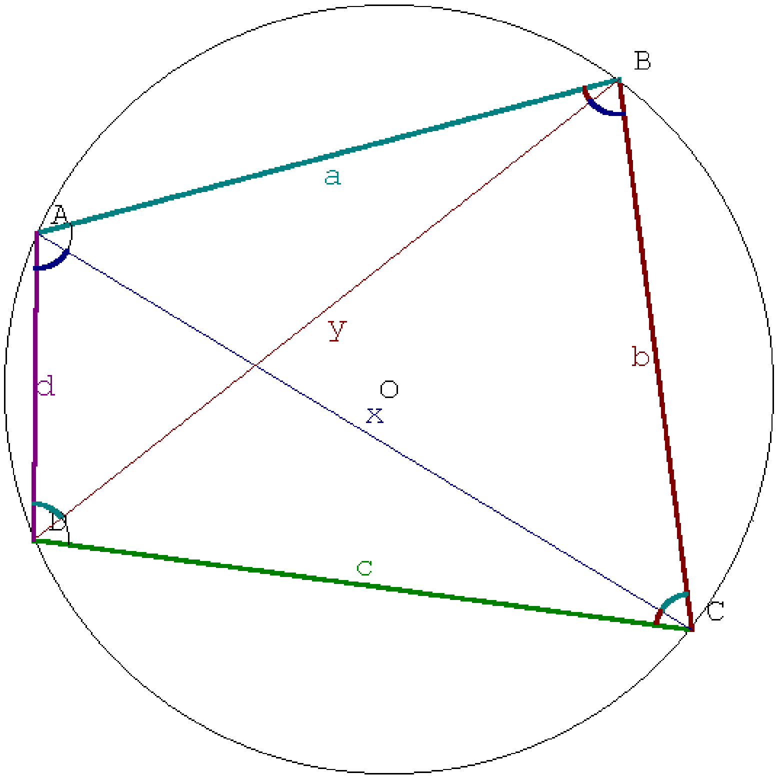
O ângulo central é o dobro dos ângulos inscritos na circunferência que contenham o mesmo arco.



A demonstração vem de colocar um dos lados do ângulo inscrito sobre o diâmetro da circunferência.

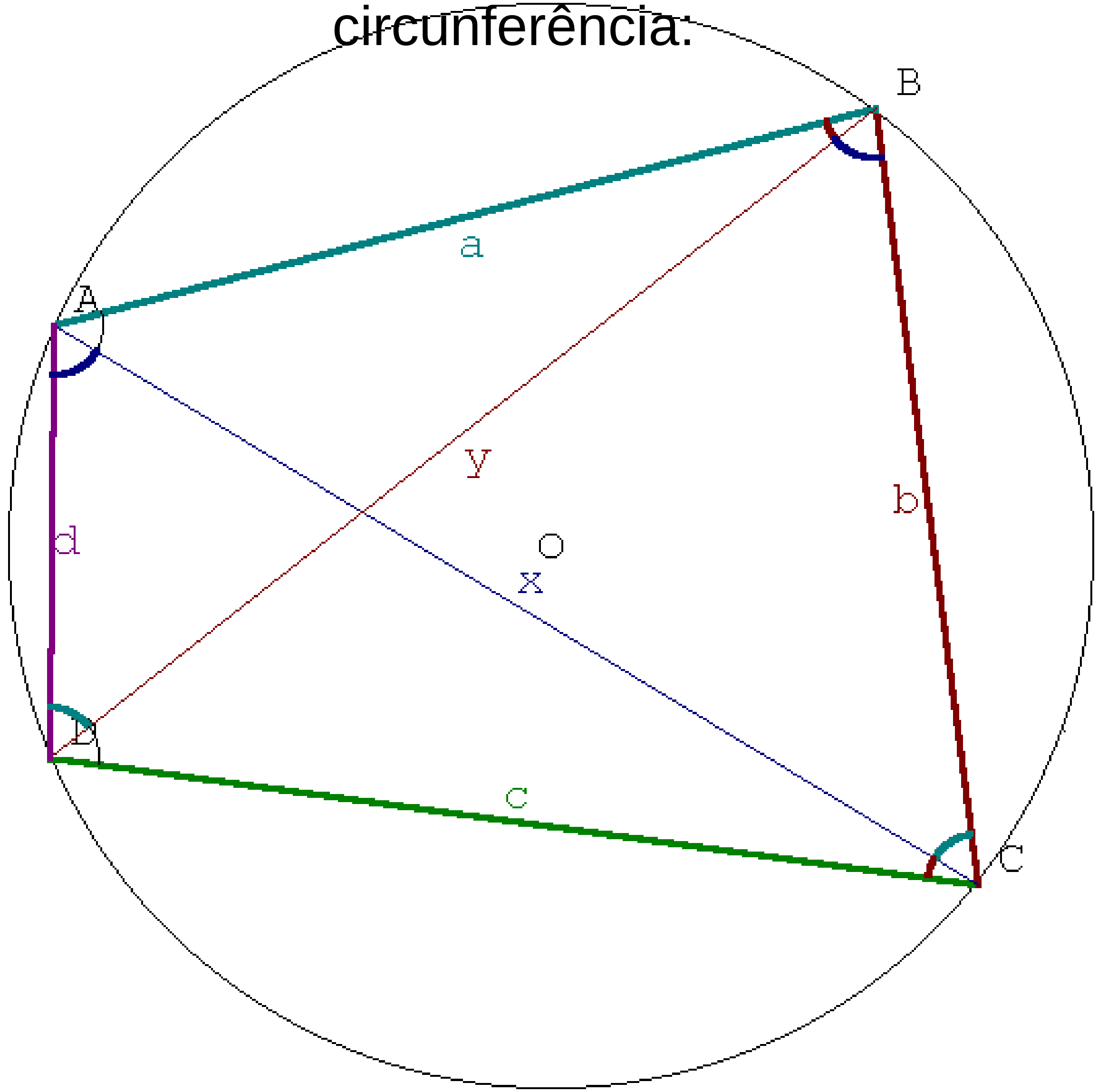


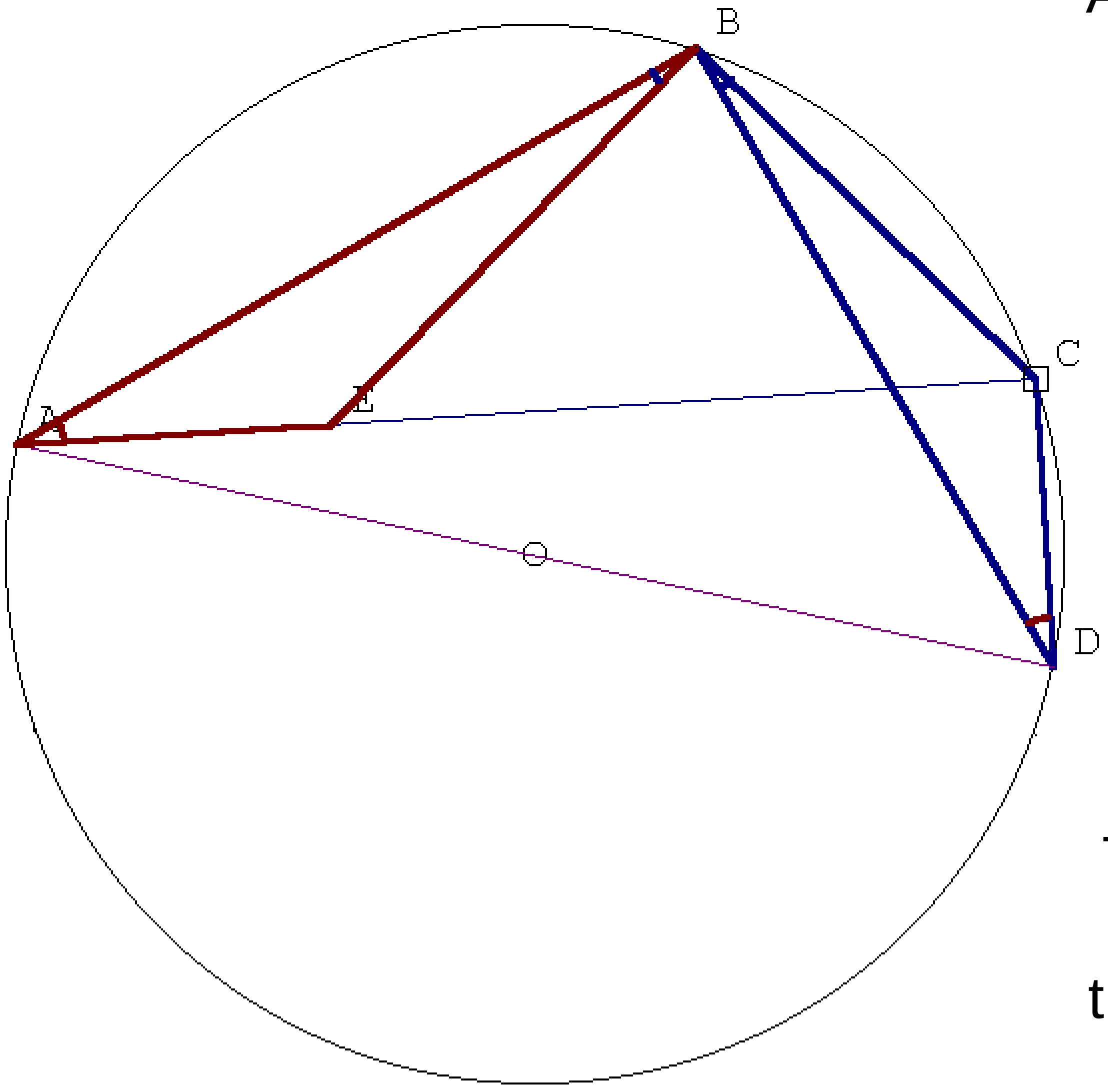
Ptolomeu utilizou esses fatos simples para desenvolver e consolidar a trigonometria. Em sua obra Almagesto (do árabe *Al-majisti*, “O Grande”). O nome original da obra era “Coleção Matemática” e possuia 13 volumes. Os comentadores distinguiram a obra de Ptolomeu em “Pequena Astronomia”, e os livro do Almagesto foram chamados de “A Grande Coleção”). Nessa obra encontramos o famoso Teorema de Ptolomeu:



Em um quadrilátero inscrito em um círculo, de lados a, b, c e d e diagonais x e y, vale a fórmula ac + bd = xy.

Para demonstrar esse fato Ptolomeu considera que existem diversos ângulos congruentes por conterem o mesmo arco da circunferência:

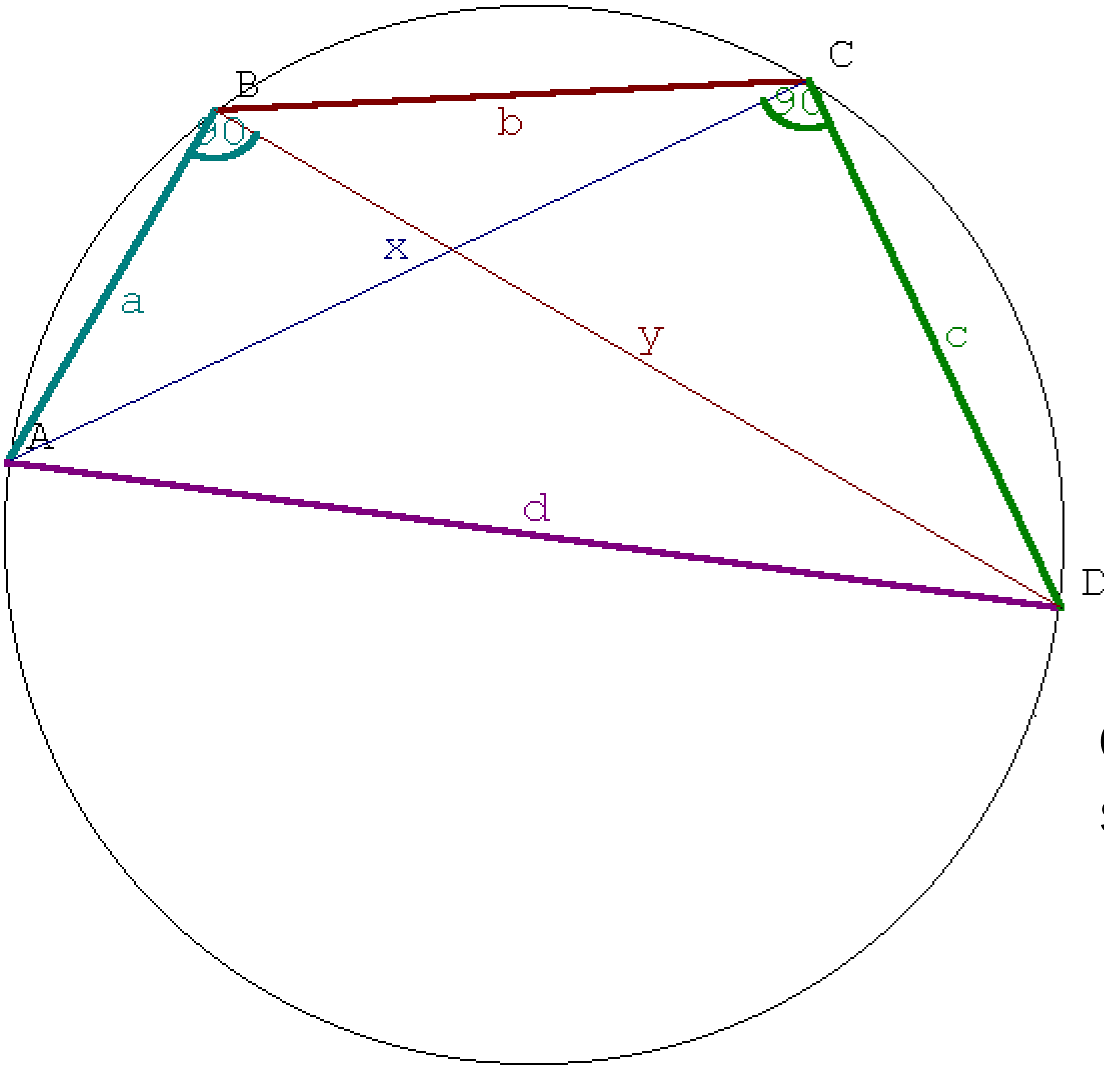




Agora tomamos o ponto E na diagonal AC de modo que os ângulos ABE e DBC sejam congruentes.

Temos então que são semelhantes os triângulos ABE e CDB.

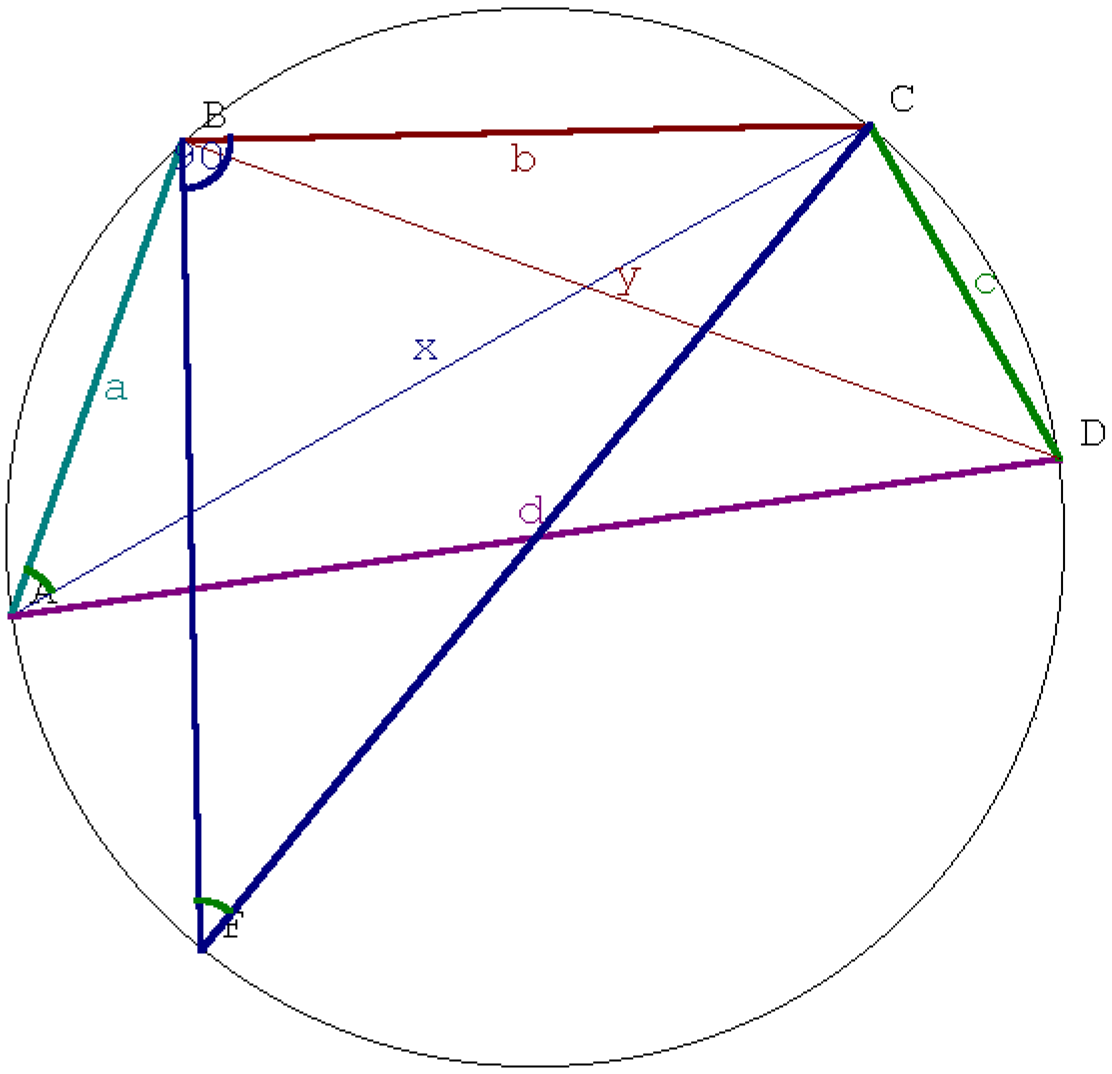
Ptolomeu utilizou seu Teorema para construir sua Tábua de Cordas, que podem ser lidas como Tábuas de Senos



Ptolomeu colocou o lado d do quadrilátero sobre o diâmetro da circunferência.

Os triângulos ABD e ACD são retângulos em B e C.

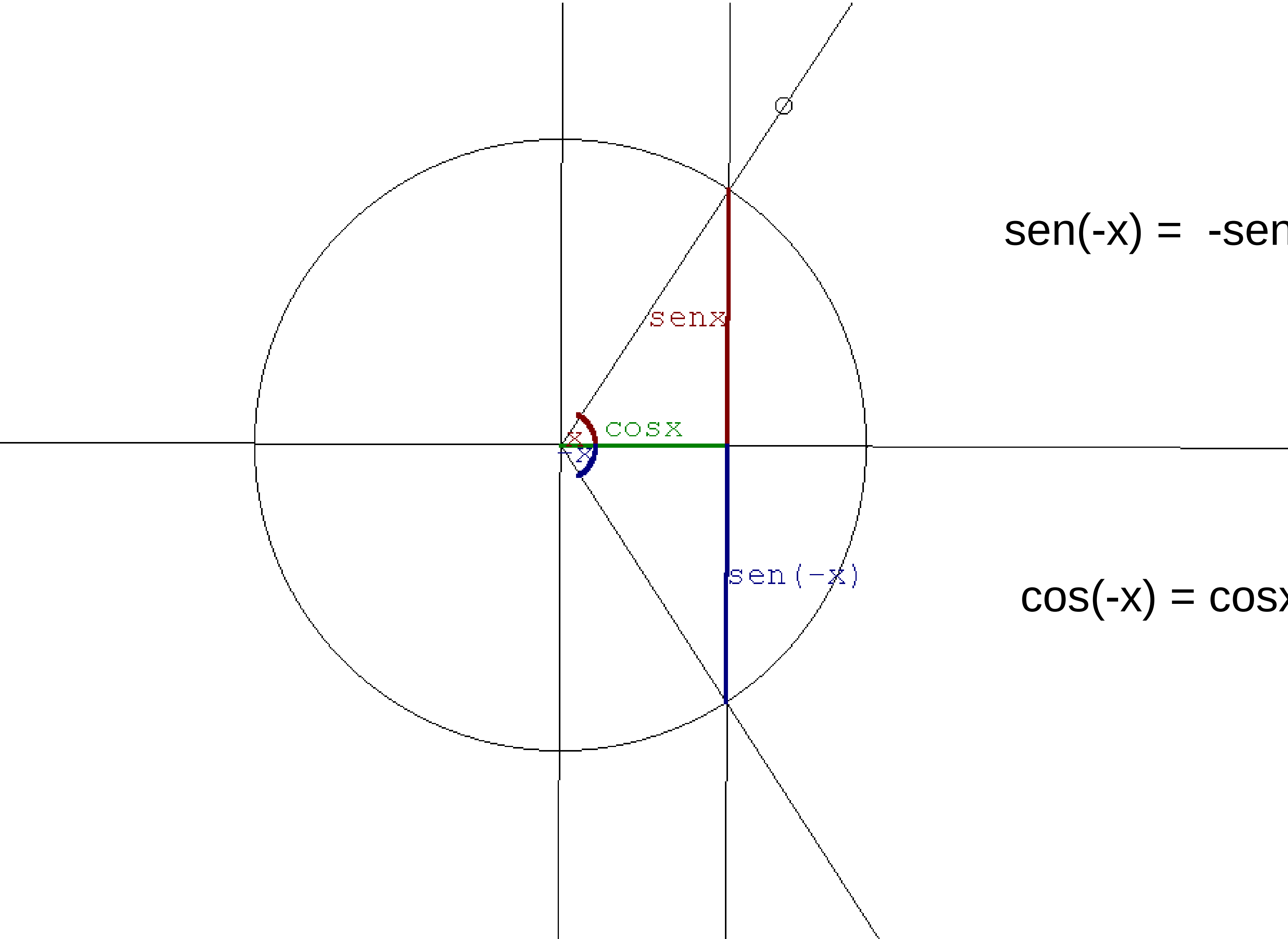
Ptolomeu utilizou seu Teorema para construir sua Tábua de Cordas, que podem ser lidas como Tábuas de Senos



Observe também que o triângulo BCF é retângulo em B.

O Angulo F é congruente ao ângulo BAC que vale BAD-CAD

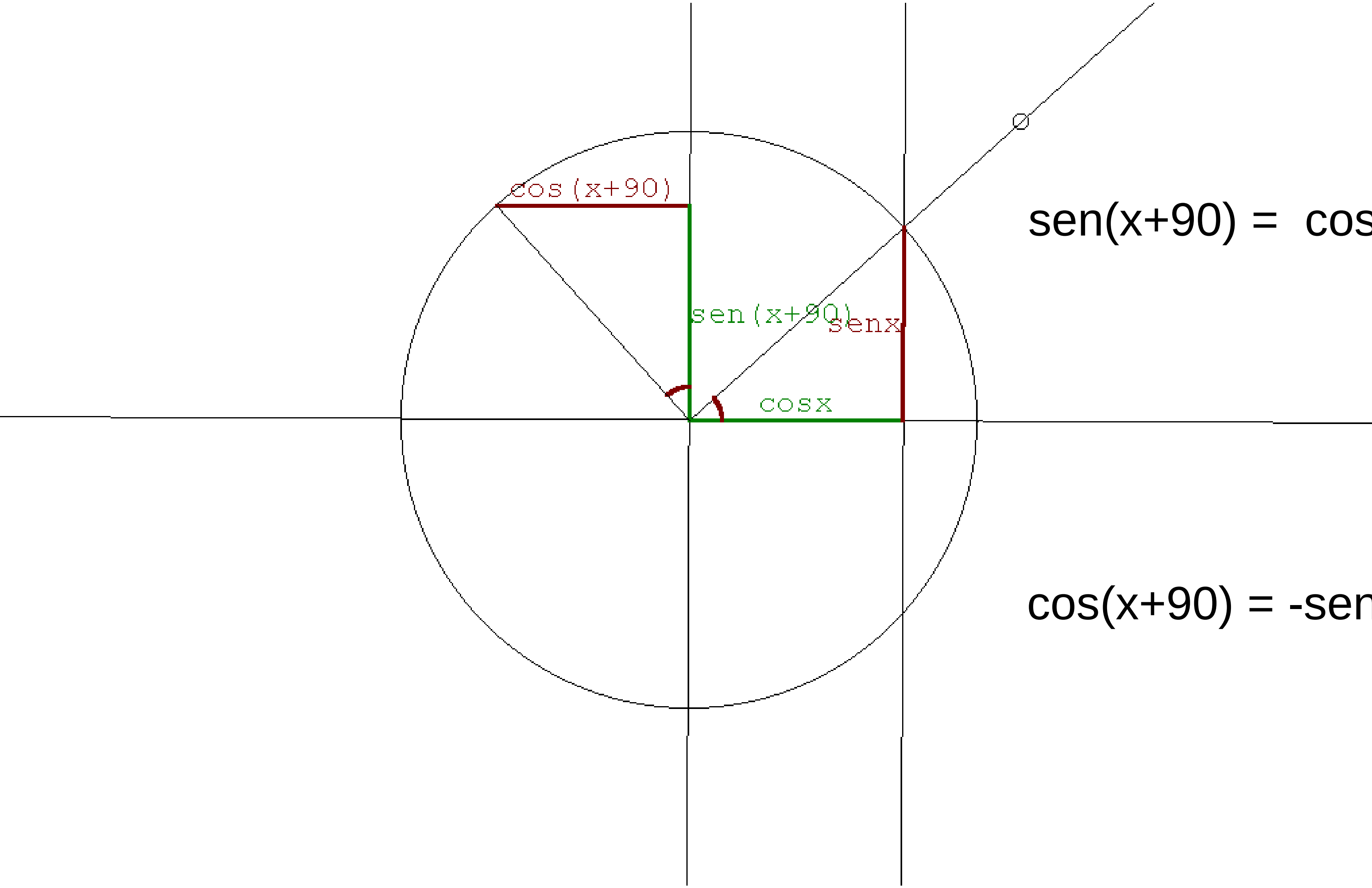
Outras propriedades simples dos ângulos podem ser utilizadas para construir as demais Fórmulas de Ptolomeu



sen(-x) = -senx

cos(-x) = cosx

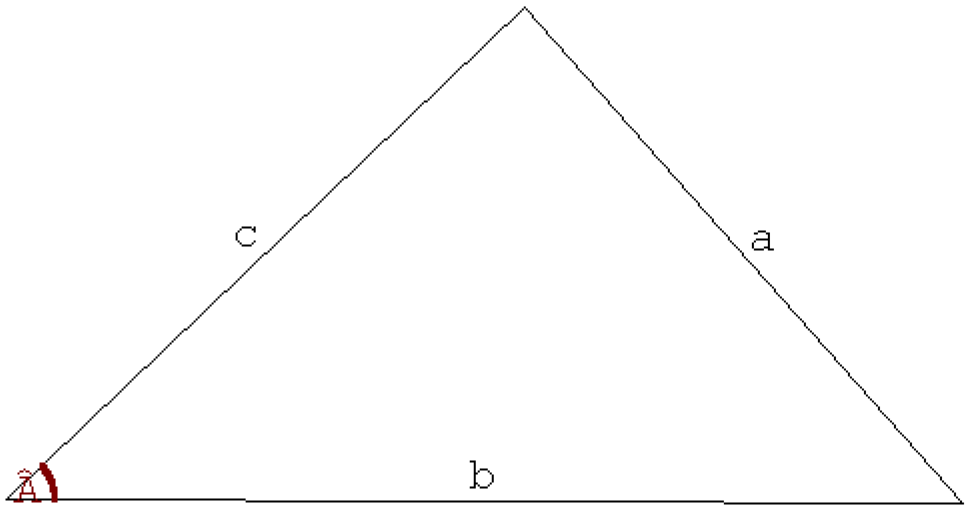
Outras propriedades simples dos ângulos podem ser utilizadas para construir as demais Fórmulas de Ptolomeu



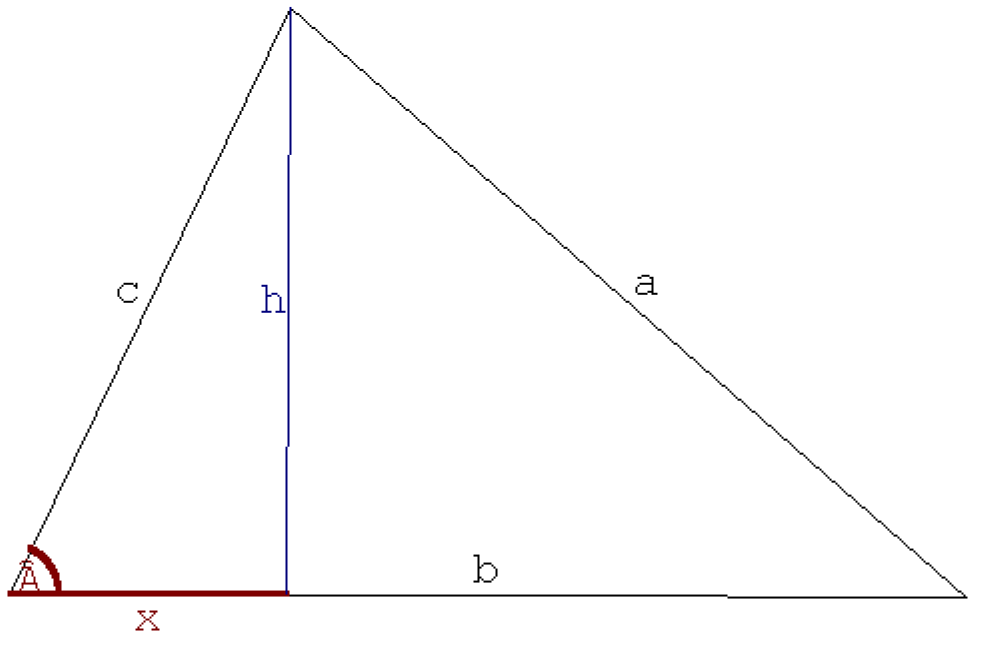
$\text{sen}(x+90) = \cos x$

$\cos(x+90) = -\text{sen}x$

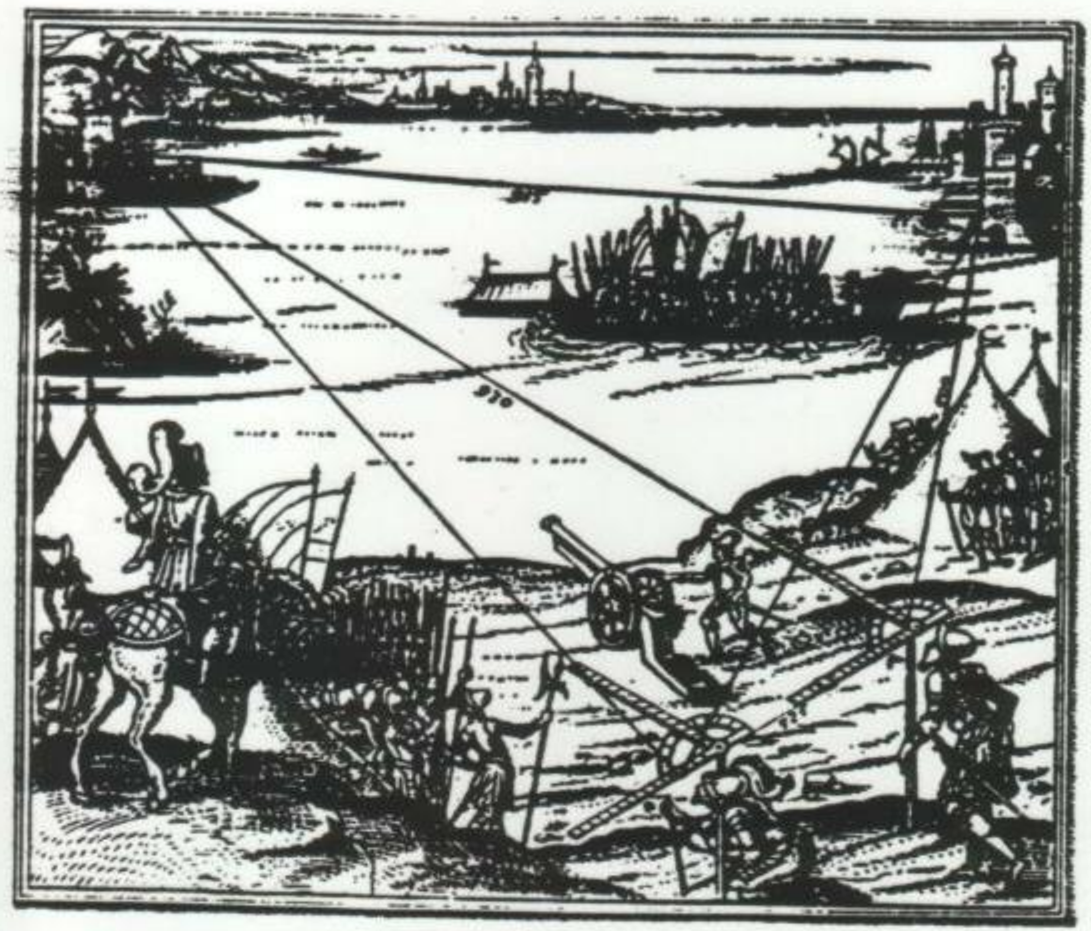
O Teorema do Cosseno também é importante resultado trigonométrico



O Teorema do Cosseno também é importante resultado trigonométrico



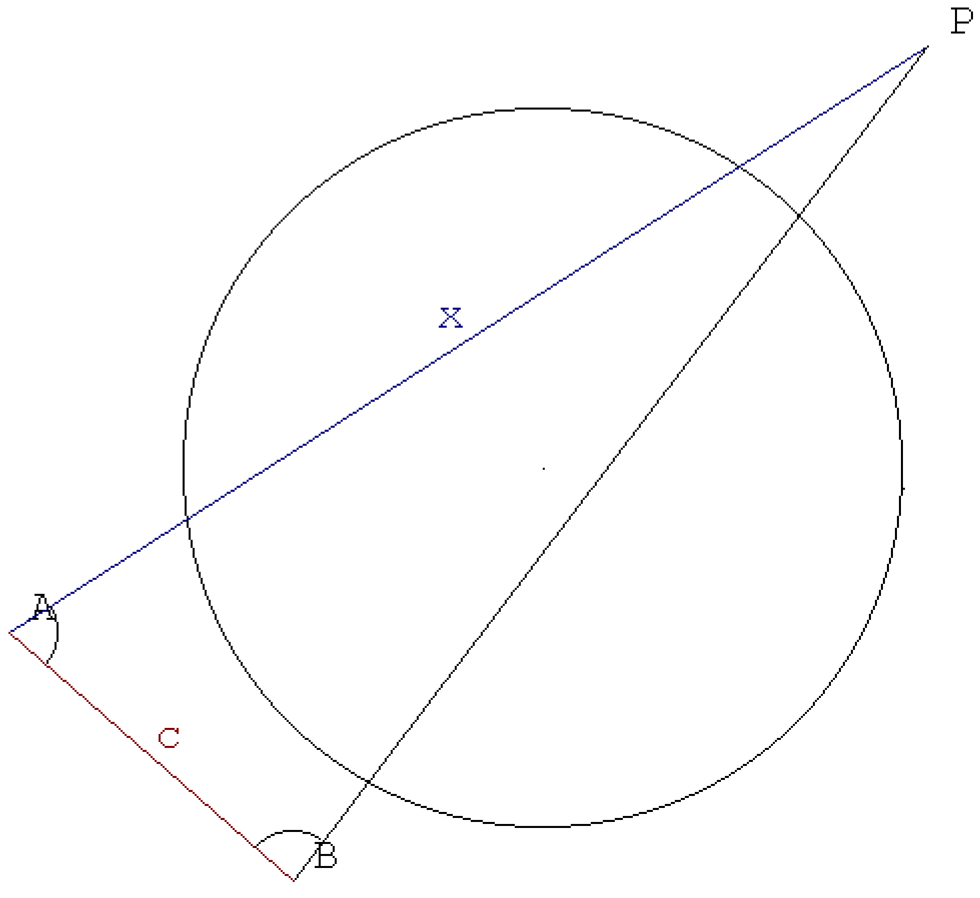
Esses resultados possuem uma grande aplicação prática, principalmente para o cálculo de distâncias



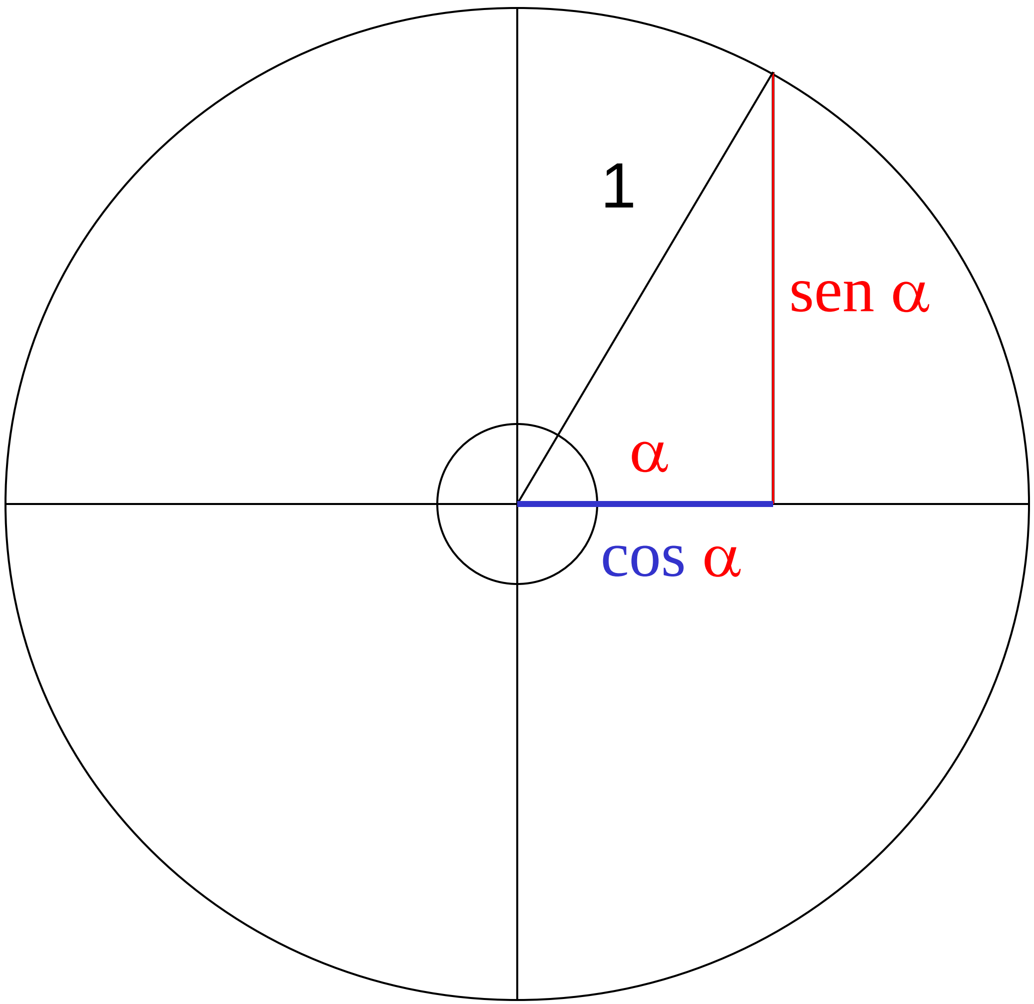
MATHEMATICS IN MILITARY AFFAIRS

From Leonhard Zubler's work on geometric instruments, Zürich, 1607

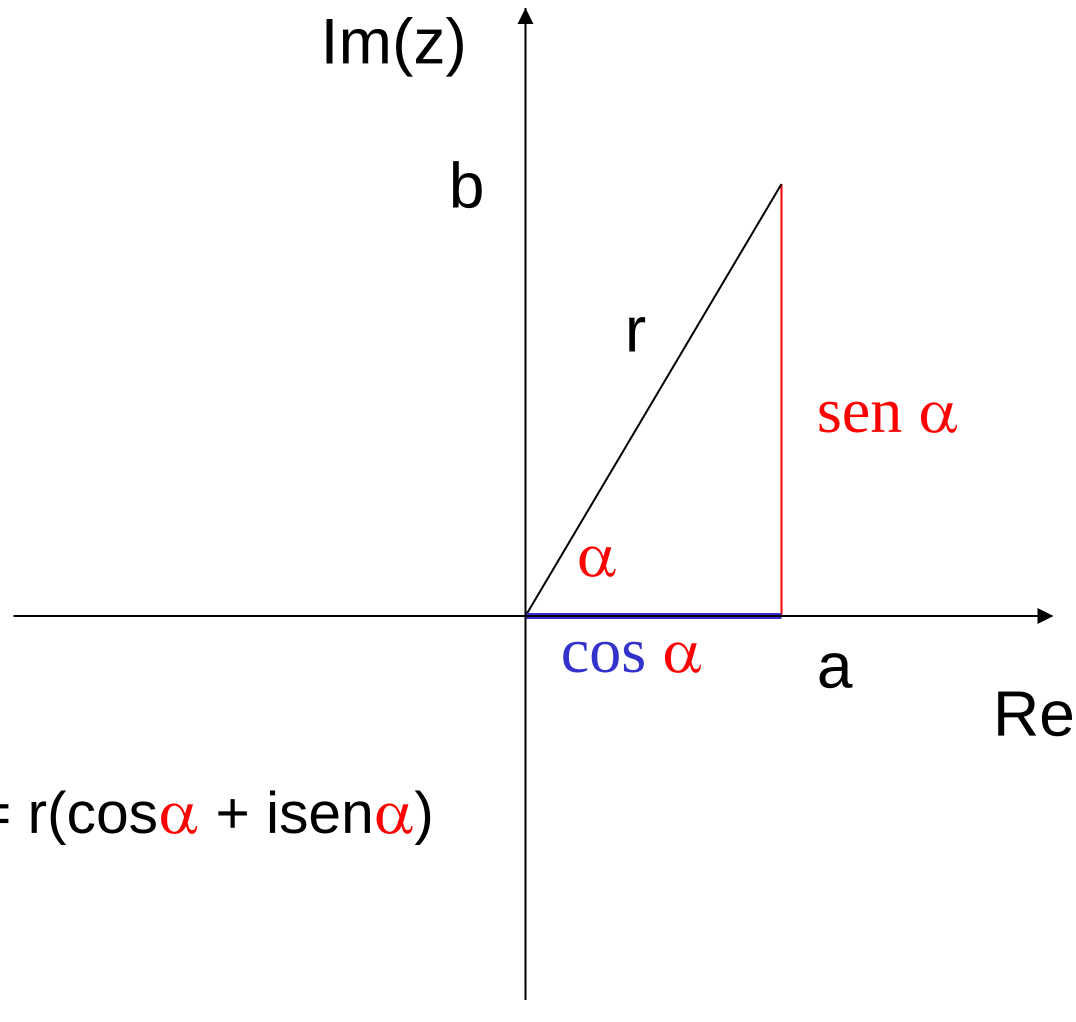
Um aplicação do Teorema dos Senos para o Cálculo de Distâncias inacessíveis



A Trigonometria adquirirá posteriormente uma dimensão jamais sonhada pelos gregos. Servirá para dar forma e vida aos números mais estranhos e úteis do planeta: os Números Complexos.



Os Números Complexos passarão a ser representados no plano que virá a ser conhecido como Plano de Argand-Gauss.



$Z = a + bi = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$

O alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi o primeiro a utilizar seriamente a notação do plano trigonométrico para representar os Números Complexos, divulgando a representação criada pelo suiço Jean-Robert Argand (1768-1822).

A representação geométrica dos complexos foi chamada por Gauss de “a verdadeira metafísica das quantidades imaginárias”.

Carl Friedrich Gauss, O retrato de corpo inteiro, de R. Wimmer no Deutsches Museum, Munich, RFA (1925).