

NÚMEROS 2

Antonio Carlos Brolezzi

www.ime.usp.br/~brolezzi
brolezzi@usp.br

Os símbolos numéricos

Com o nosso sistema de numeração, usando apenas dez símbolos diferentes, podemos escrever qualquer número, enquanto que, nas numerações egípcia e romana, para se escrever números muito grandes seria preciso criar novos símbolos: um para o dez mil, outro para o dez milhões, outro para o cem milhões etc.

Numerais egípcios



1



10



100



1000



10,000



100,000



1,000,000

Numerais egípcios

**Utilizavam
base 10
mas sem
valor
posicional**



1



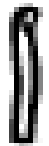
10



100



1000



10,000



100,000



1,000,000

Numerais romanos

Derivados dos numerais etruscos (antigo povo que habitava a Itália), são usados até hoje!

Utilizavam base 10.

A posição era importante mas em outro sentido (princípio subtrativo)

1	→	I	
10	→	V	← 5
		X	
100	→	L	← 50
		C	
		D	← 500
1000	→	M	

I	1
II	2
III	3
IV	4
V	5
VI	6
VII	7
VIII	8
IX	9
X	10
XI	11
XII	12
XIII	13
XIV	14
XV	15
XVI	16
XVII	17
XVIII	18
XIX	19
XX	20

XXI	21
XXII	22
XXIII	23
XXIV	24
XXV	25
XXVI	26
XXVII	27
XXVIII	28
XXIX	29
XXX	30
XXXI	31
XXXII	32
XXXIII	33
XXXIV	34
XXXV	35
XXXVI	36
XXXVII	37
XXXVIII	38
XXXIX	39
XL	40

XLI	41
XLII	42
XLIII	43
XLIV	44
XLV	45
XLVI	46
XLVII	47
XLVIII	48
XLIX	49
L	50
LI	51
LII	52
LIII	53
LIV	54
LV	55
LVI	56
LVII	57
LVIII	58
LIX	59
LX	60

LXI	61
LXII	62
LXIII	63
LXIV	64
LXV	65
LXVI	66
LXVII	67
LXVIII	68
LXIX	69
LXX	70
LXXI	71
LXXII	72
LXXIII	73
LXXIV	74
LXXV	75
LXXVI	76
LXXVII	77
LXXVIII	78
LXXIX	79
LXXX	80

LXXXI	81
LXXXII	82
LXXXIII	83
LXXXIV	84
LXXXV	85
LXXXVI	86
LXXXVII	87
LXXXVIII	88
LXXXIX	89
XC	90
XCI	91
XCII	92
XCIII	93
XCIV	94
XCV	95
XCVI	96
XCVII	97
XCVIII	98
XCIX	99
C	100
D	500
M	1000

Numerais
romanos:

observe que o "4"
no relógio não
segue o
princípio
subtrativo, para
tornar a leitura
mais clara.



Numerais babilônios

Os babilônios usavam base sexagesimal (base 60, como nos minutos e segundos)

Tinham valor posicional, pois sua escrita em tabletas de barro era muito complexa.



Os sistemas de numeração antigos
apresentavam uma dificuldade
especial:

era muito trabalhoso efetuar cálculos
usando esses números.

Essas dificuldades foram superadas pelos hindus, que foram os criadores do nosso sistema de numeração.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cod. Vigilus (976 C.E.)	I	7	3	4	5	6	7	8	9
Vatican MS. lat. 3101 (1077)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
British Mus. Add. 17808 (XII)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
General forms, c. XIII	1	2	3	4	5	6	7	8	9
General forms, c. XIV	1	2	3	4	5	6	7	8	9
General forms, c. XV	1	2	3	4	5	6	7	8	9
General forms, c. XVI	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Essas dificuldades foram superadas pelos hindus, que foram os criadores do nosso sistema de numeração.

Anciens Caractères Arithmétiques.

1. <i>Notes de Bocce.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2. <i>De Plume.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3. <i>Caractères d'Alsephadi.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4. <i>Chiffres de Saico Booco.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5. <i>De Roger Bacon.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6. <i>Des Indiens Modernes.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7. <i>Chiffres Modernes.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8. <i>Alphabet d'Alsephadi.</i>	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Essas dificuldades foram superadas pelos hindus, que foram os criadores do nosso sistema de numeração.



Os hindus souberam reunir três características que já apareciam em outros sistemas numéricos da Antiguidade:

o sistema de numeração hindu é decimal (o egípcio, o romano e o chinês também o eram);

o sistema de numeração hindu é posicional (o babilônio também era);

o sistema de numeração hindu tem o zero, isto é, um símbolo para o nada.

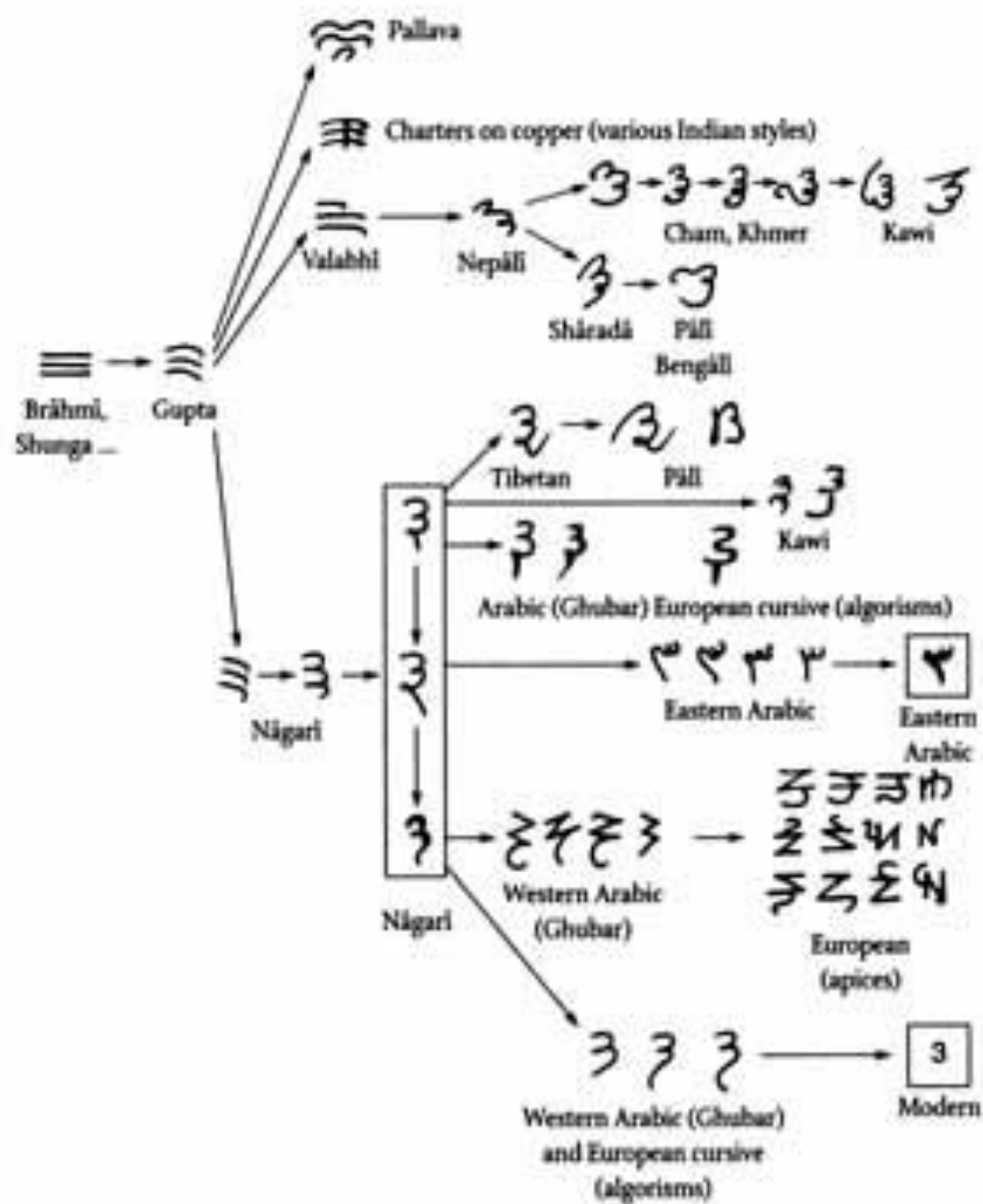


FIG. 24.63. Origin and evolution of the numeral 3. (For Arabic and European numerals, see Chapters 25 and 26.)

Estas três características, reunidas, tornaram o sistema de numeração hindu o mais prático de todos. Não é sem motivo que hoje ele é usado quase no mundo todo

Estamos tão acostumados com sistema de numeração decimal que ele nos parece incrivelmente simples. No entanto, desde os tempos em que os homens fizeram suas primeiras contagens, até o aparecimento do sistema de numeração hindu, decorreram milhares de anos.

É surpreendente que diversas civilizações da Antiguidade, como as dos egípcios, babilônios e gregos, capazes de realizações maravilhosas, não tenham chegado a um sistema de numeração tão funcional quanto o dos hindus.

Por que tanta dificuldade?

**Uma possível resposta a esta
pergunta nos leva ao
Zero,
isto é,
a um símbolo para o nada.**

Estamos tão familiarizados com o zero que não sentimos a menor dificuldade em raciocinar com ele.

As crianças o dominam com facilidade. Entretanto, nem sempre foi assim. Nossos antepassados custaram muito para inventar o zero e, mesmo depois de nascido, o símbolo para o nada demorou a ser aceito.

Depois do zero ter sido inventado para resolver um problema do sistema posicional de numeração, ocorreu uma coisa interessante:

o zero passou a ser tratado como qualquer um dos outros nove símbolos.

O zero passou a ser tão número quanto os outros. O **nada** tornou-se número também, sendo introduzido na seqüência:

0, 1, 2, 3, etc...

Agradecimento especial por essa primeira parte:

Prof. Henrique Guzzo

Na matemática, os números naturais são utilizados para contar.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

O conjunto dos números naturais é chamado de enumerável, pois seus elementos podem ser contado um a um Embora sejam infinitos.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

A infinitude dos números naturais é bastante contra-intuitiva. Uma forma bastante doida de pensar nisso é comparar o conjunto dos naturais com o conjunto dos números pares... Eles são equipotentes! Têm a mesma cardinalidade! Há uma bijeção entre os dois conjuntos! Eles são um a um!

0 1 2 3 4 5 6 7

0 2 4 6 8 10 12 14 ...

Para sentir o infinito natural, vamos olhar a brincadeira inventada por David Hilbert (1862-1943):



O Hotel de Hilbert

https://www.youtube.com/watch?v=pjOVHzy_DV

Também tem a mesma cardinalidade o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Basta fazer esta correspondência, por exemplos, entre pares e ímpares:

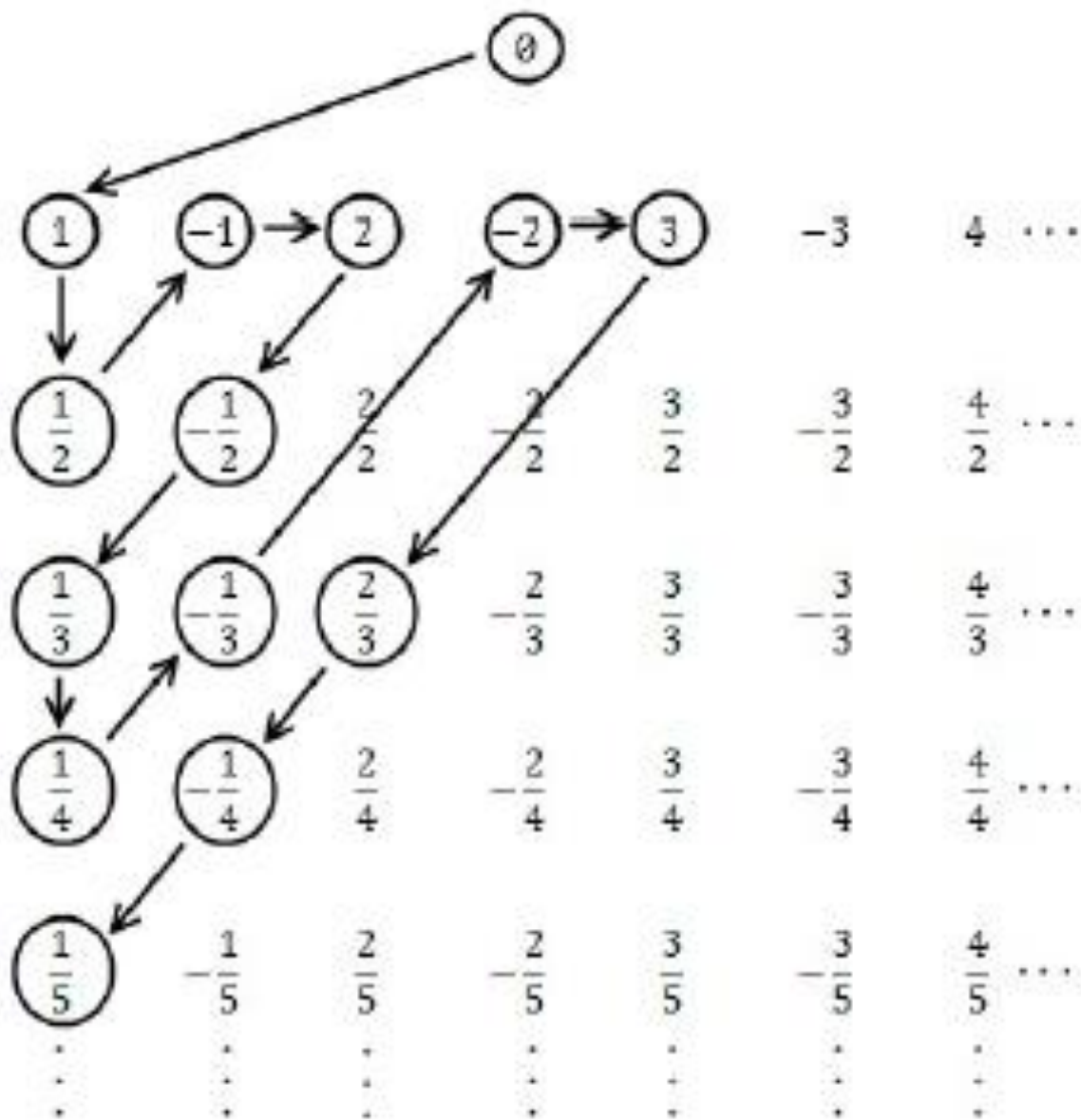
...	-3,	-2,	-1,	0,	1,	2,	3,	...
...	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	...
...	5,	3,	1,	0,	2,	4,	6,	...

Agora vem o passo mais estranho. Os racionais também formam um conjunto enumerável.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} ; p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

O argumento de Cantor é fácil de seguir...

Cantor propõe uma ordenação pela diagonal:



Portanto há uma associação um a um entre o conjunto dos naturais e o conjunto dos racionais.

E o conjunto dos reais?

Vamos supor que seja possível enumerar os números reais entre 0 e 1.

Vamos supor que seja possível associar um a um os números reais entre 0 e 1 com o conjunto dos naturais (não precisam estar em ordem).

1 ↔	0.397204817...
2 ↔	0.526613809...
3 ↔	0.498310123...
4 ↔	0.275418831...
5 ↔	0.002200025...
6 ↔	0.999904681...
.	
.	
.	

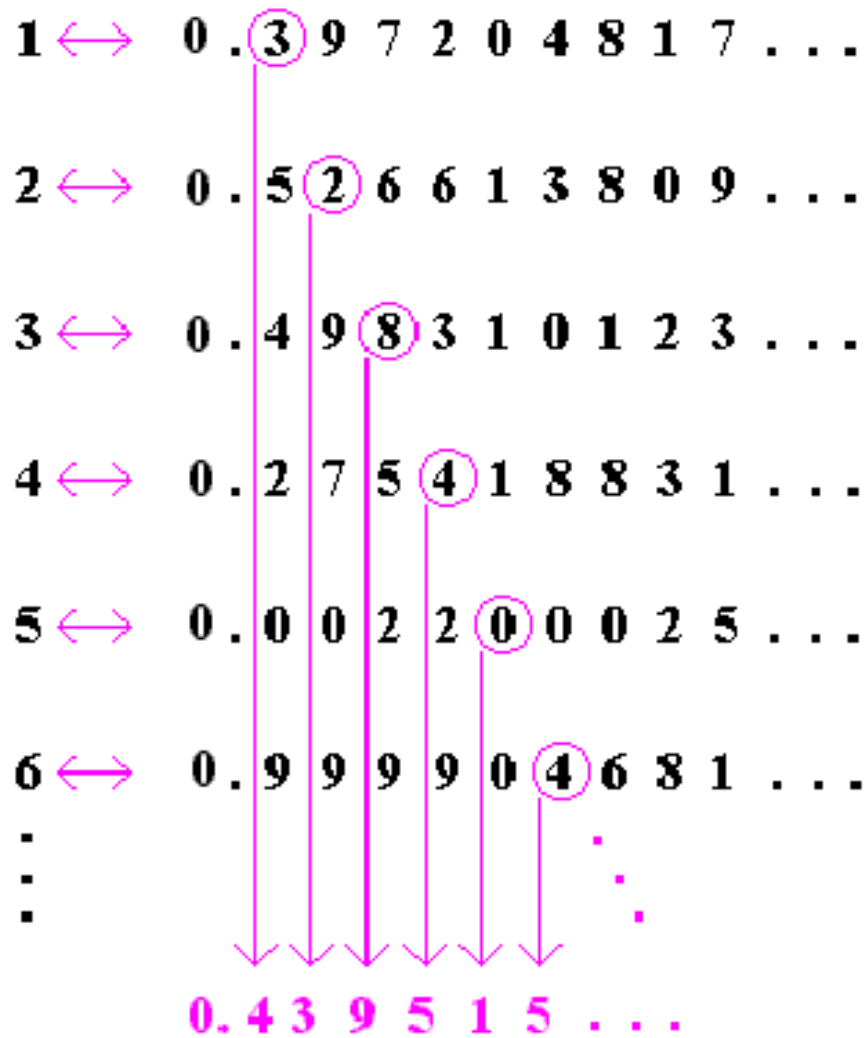
Podemos tomar o primeiro algarismo decimal do primeiro número, o segundo do segundo e assim por diante, e tomar um algarismo diferente para cada um

1	↔	0.	3	9	7	2	0	4	8	1	7	...
2	↔	0.	5	2	6	6	1	3	8	0	9	...
3	↔	0.	4	9	8	3	1	0	1	2	3	...
4	↔	0.	2	7	5	4	1	8	8	3	1	...
5	↔	0.	0	0	2	2	0	0	0	2	5	...
6	↔	0.	9	9	9	9	0	4	6	8	1	...
:												
:												

1	↔	0.	3	9	7	2	0	4	8	1	7	...
2	↔	0.	5	2	6	6	1	3	8	0	9	...
3	↔	0.	4	9	8	3	1	0	1	2	3	...
4	↔	0.	2	7	5	4	1	8	8	3	1	...
5	↔	0.	0	0	2	2	0	0	0	2	5	...
6	↔	0.	9	9	9	9	0	4	6	8	1	...
:												
:												

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

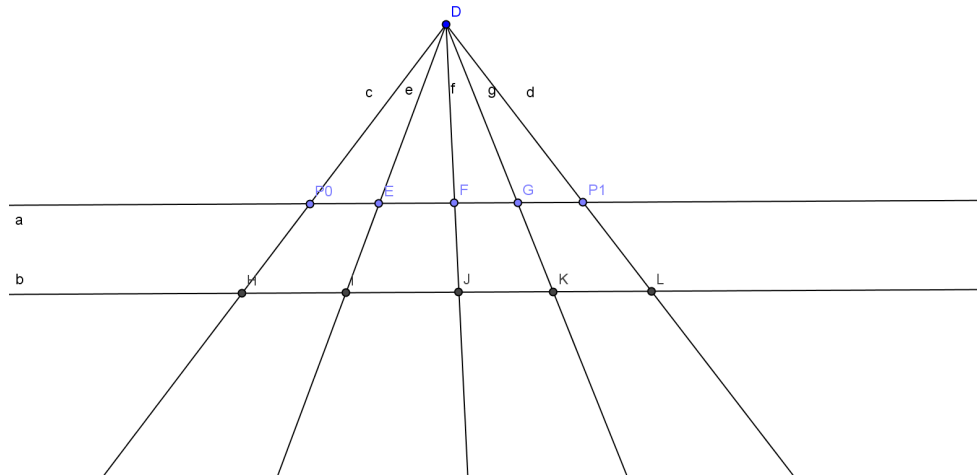
0.439515...



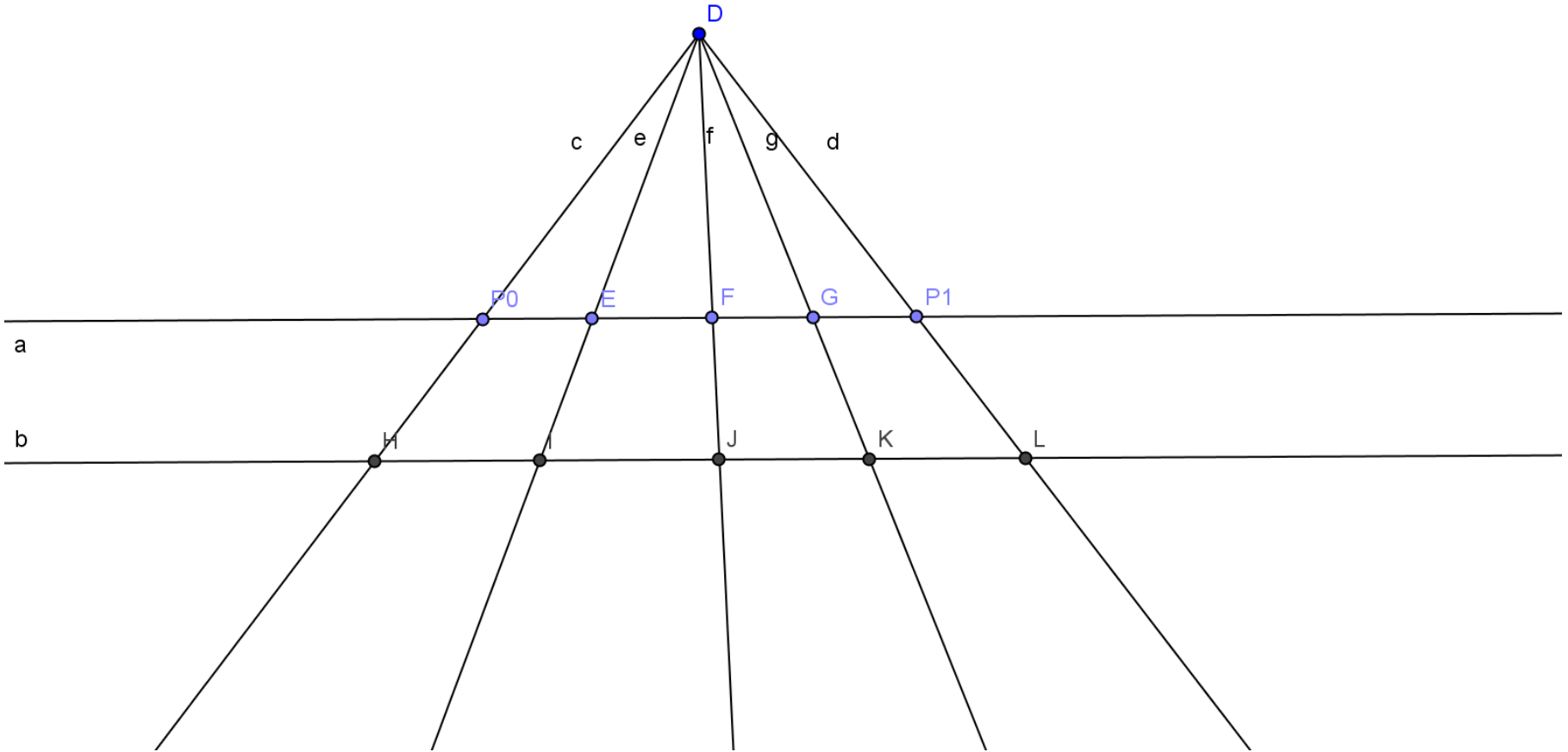
O número resultante não estava no conjunto original, pois tem pelo menos um algarismo diferente de todos os demais!

Assim, o conjunto dos reais entre 0 e 1 é não-enumerável. O infinito real é “maior” que o infinito natural, é de outra natureza!

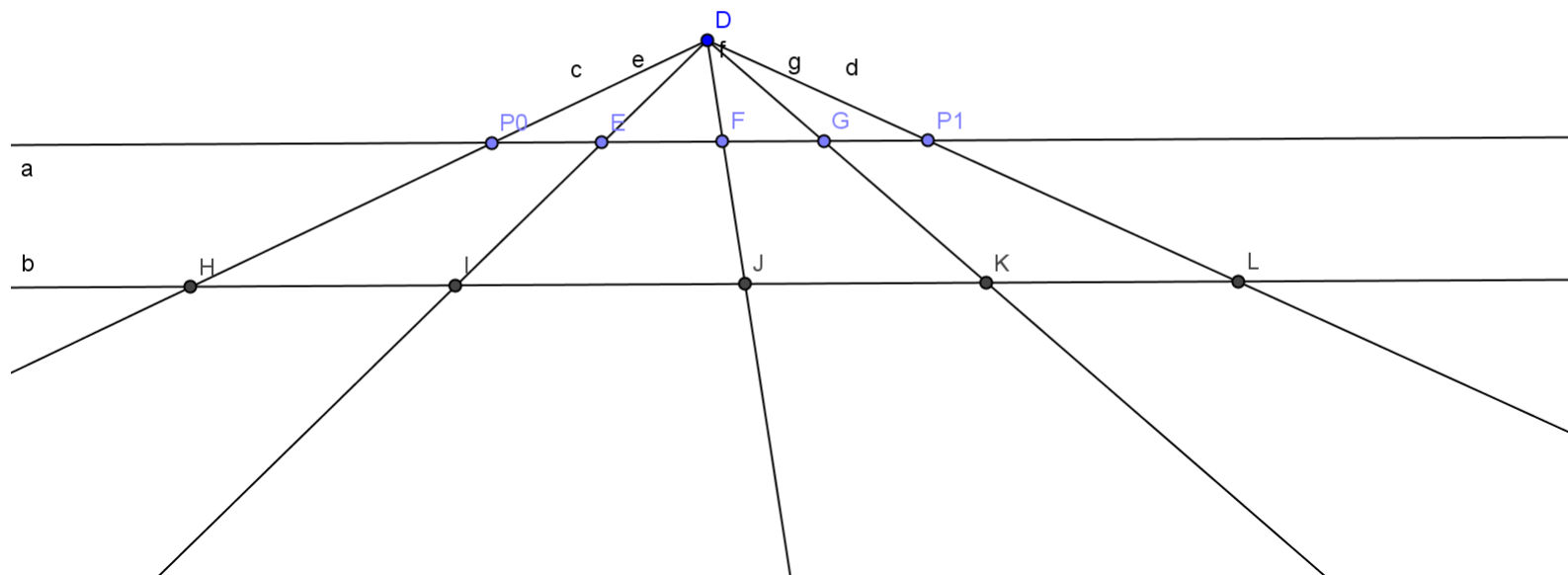
O pior é que qualquer segmento da reta real tem a mesma cardinalidade da reta real inteira...



Um ponto projeta os pontos do intervalo na reta real inteira.



Um ponto projeta os pontos do intervalo na reta real inteira.



A Hipótese do Contínuo de Cantor, que ainda não foi provada e talvez não possa ser provada, tem como implicação que a reta real é contínua. Não faltam pontos.

Ou seja, os números reais preenchem todo o espaço!

Vamos ver como isso faz sentido.

Tomemos um número real, não racional, bem conhecido. Por exemplo, o número π já foi expresso em até 10 trilhões de dígitos.

3.141592653589793238462643
3832795028841971693993751
0582097494459230781640628
6208998628034825342117067
9821480865132823066470938
4460955058223172535940812
8481117450284102701938521
1055596446229489549303819
6442881097566593344612847

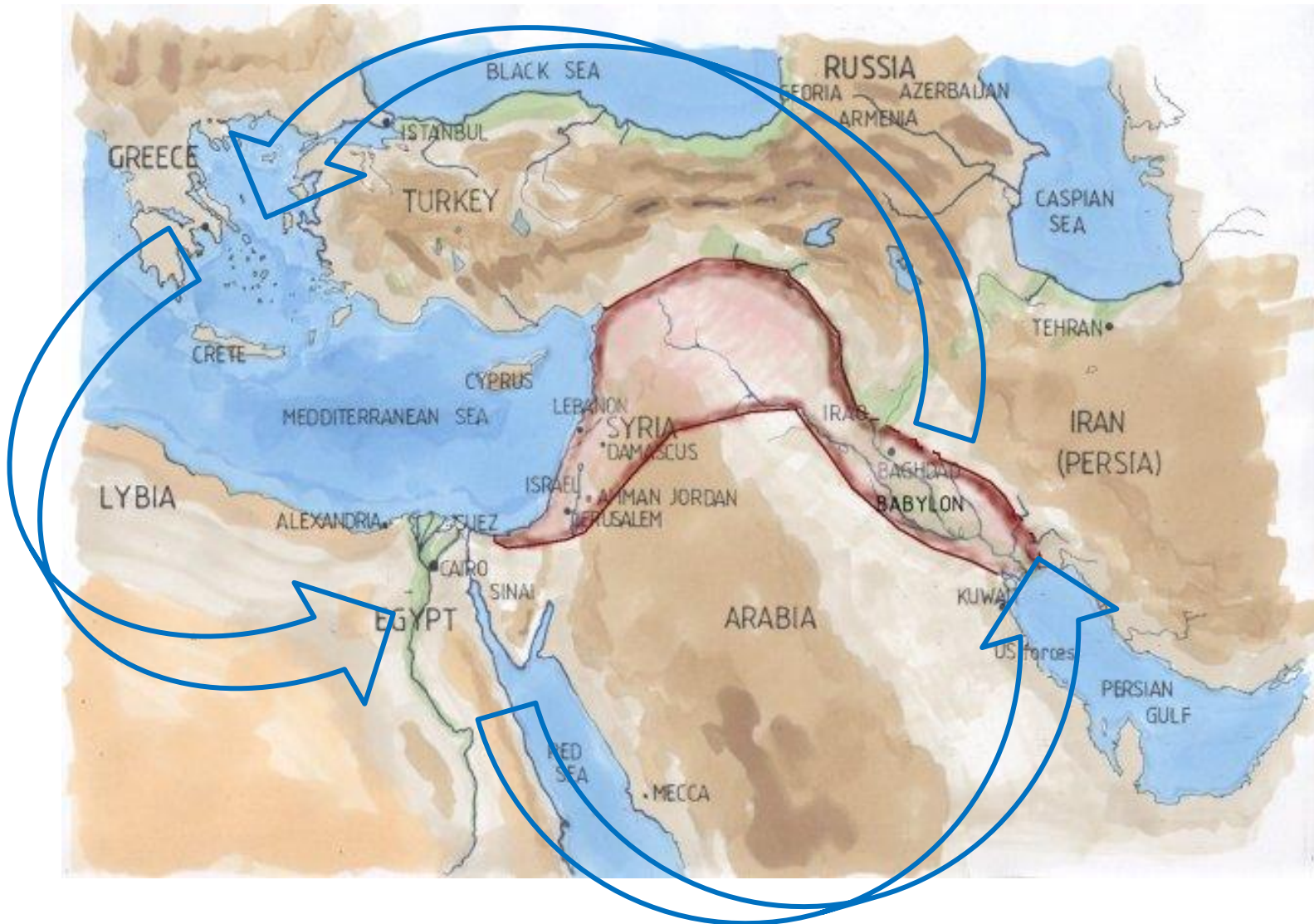
E como isso vale para qualquer número real...

3.415 9265 35 979323 4626433 32795 02 41971693 99375105 209744445 92307 164061 620 99 62 034 25 342110679 24 0 65132 2306647093 4460955 05 2231725 35940 12 4 11745 02 410270193 5210
555 964462294 95 49303 196442 10975 665 9334462 475 64 233 7 67 3165 2712 0190945 64 6692346034 8045 432664 21339360 726024941 737245 7006606355 174 15 20920962 2925 409175 364367 925 9
0360013305 305 4 204665 213 44695 1945 160943305 7270365 75 95 9195 302 6 8173 19326119305 1 5 074462379962 7495 6735 75 72724 9122793 30119492 9 3367336244065 66430 6021394946395 22473719
0702179 609437027705 3921717629317675 23 4674 4676694051320005 6 12745 2635 60 277 5 77134275 77 960917363717 7246 44090122495 3430465 495 5 37105 07922796 925 9235 4201995 61229021960 64
0344 15 9 136297747713099605 7072134999999 37297 04995105 9731732 160963 5 95 02445 945 53469 0 3026425 2230 25 33446 5 035 26931 171010003137 3 75 2 65 75 3320 3 120617176691473035 9
9 25 349042 75 546 7315 95 62 63 235 3 7 75 93 75 195 77 6 5 77 05 32171226 0663001927 7661195 90921642019 93 0 95 25 7201065 4 5 632 7 65 9365 33 3 2796 23030195 2035 30 25 296 995 7736225 99413 91
249721775 2 347913515 74 5 724245 415 0695 95 0 295 316 6727 5 5 90 75 09 3 175 46374649393925 5 06040092770167113900 9 4 2402 5 386035 63 707660104710 194295 5 969 946767 3744944 25 5 37
977472 471040475 346462 0466 42 9069492 933367702 9 9 75 210475 216205 676602405 03 8 01935125 33 24300355 7 764024749647326394192726042699227967 235 47 16360093417264219245 635 0302
6 6 29745 5 706749 3 5 054945 6 6 692695 6909272107975 0930295 532165 3449 7120275 59602364 0665 49919 3479775 35 66369 074265 425 27 625 5 4 4175 74672 90977772793 000 647106001645 24
1921732172477235 0414497735 6 5 4 183615 735 25 5 2133475 74 4 4946 43 5 2332390 7394433345 47762416 62 5 8 9 35 694 5 62099219222 42725 5 025 425 6 76717904946065 3466 049 6272327917 60 5 7 43 3
3 279679766 145 410095 3 3 7 636095 06 0064225125205 173929 4 960 412 4 626945 604241965 2 5 022210661 630674427 622039194945 047123713 7 696095 63643719172 7467716465 75 73962413 90 65 3264
5 995 1339047 2 75 90099465 7640 7 95 126946 3 9 3 265 95 109 25 226205 224 9 24077267947 2 6 4 26047699070264013639443745 5 305 06 20349625 245174939965 14342 9 0919065 925 0937226964695 709 5
6 3 7405 97 8 5 959972975 49 9306175 392 4 46 13 2 6 6 942 7745 5 99 1 5 245 95 395 94310499725 246 0 8 45 9 7273644695 4 6 65 3 367362226260992460 051243 8 43904512441365 497627 0 977715 6914
35 99770029660 944694 6 5 5 4 0635 3422072225 2 4 4 6 84 5 6 2 8 5 08016 4273945 226746767 9 5 25 23 5 225 4995 466627 2 23 9 645 65 168635 4 6 62305 7745 649 035 5 936345 6 17432412515 076097
4794510965 96094025 22 8 79710 9345 669136 6722 7 4 9405 60105 0330 8 6792 6 0920 74760917 2493 5 900974909675 9 5 26365 5 497 9 32 97 4 216 299 9 4 72265 8 04 5 75 64042 704775 5 1323 7994
4515 23746233465 42 5 444795 265 6 7 210514135 4735 7395 231342716602135 9695 362344295 24 493 7 11045 765 4035 902799344037420073105 7 5 3906219 3 7447 0 47 4 96 332445 713 6 7519435 0643
02 45 39104 4 1005 3710646 06749927 8 1919793995 20649166342 75 4440643745 12 37 1921799 3910 9195 6 4675 426923974 940907 6494239165 67945 2 0 95 465 0222 231603 8 193042 09376213 7 5 95 663 9
377 7 10 3030969792077346722 25 625 99665 042 5 0306 03 8 4477345 49202605 44665 925 210497442 5 0732 5 6660021324340 8 1910704 633173464965 145 3905 79626 5 6005 5 0 10665 79699 1635 747363 40
525 7145 902 9706440109712062 043903975 95 75 67715 7710042033 7 6 6993600 72305 5 76317635 942 73215 471205 3292 19 26 62 5 673215 7919 44 4 2 291644706095 75 270695 72209175 671167229109 1690915 2 0
735 0671274 5 3 222 7 35 20935 3965 725 120 35 7915 369 2 091444210675 103346710342671136910 65 5 1639 35 01970165 176 5 1743765 76 35 5 65 0 49099 9 5 99 23 7345 5 2 331635 5 076479 8 5 35 932
26 5 4 96321329330 9 5 7064204675 25 9070915 4 1465 49 5 94663 7 02709 19943099244 9 5 75 712 2 905 923233260972997120 44335 73265 4 93 23911325 97463667305 6360412 13 6 303203 24903 75 6
9 5 2437444710291327165 6 0 93772344403070746721201913020330 8 5 0197621010044929325 160 42444 5 9637669 3 8 95 22 6 47 3 3235 265 2134495 76 5 726243344 930396 642624541077322697 0 2 0 73 8 95
441010446 2325 271621015 265 272113660396665 5730925 47105 8 5 3763466 2065 3109 965 269 6205 64769325 705 635 6620 5 5 10072936065 9 764 61791045 334 5 03461365 76 675 324944166 0396265 797 771
5 5 5 60 45 25 965 44665 205 3064344434 5 676975 145 664066 0070023 7 7165 3344017194974205 622305 3 4 6195 63440 112700040 5 47332699390 145 4664645 5 0797270 266 3064332 5 7 5 69 305 23
5 8 9 33065 7706795 45 7163 775 25 4021495 5 785 4 10025 0262 25 941302184715 079795 309910 7965 4737625 57165 675135 7571 2966845 47197719 021994 9 300463994713296210734043 75 7 5 735 9645 0 90139
9713117904297 2 8 5 6475 0320319 6915 1402 7 0 8 0 5 9904 010942472213179476477726224442 5 4 5 4033215 7 5 306422 8 1375 5 043063321715 2979 66223711725 9160 77166925 474 73 8 9 665 494945 01465 4062
43366393790039789265 672463 5 3067360965 71209 8 0763 3276646274 5 00 7 6925 6029022 4721040 03172 60 2049100042296617963779213375 751495 5 05 6604963 62947265 4736425 230 17703675 15706
735 0235 072 35405 670403 8 6743513622247715 8 95 0495 309 444 9333096340 7 8 0769235 99397 05 4934444737744 426329 60 099 8 6 74132604725 6951623965 645 73021635 9 1939516735 3 8 129741677
2947 67242292465 4366 00 9 067692 23 2 0 6 9964004 2435 40370161664965 97940924323 7 6 969070697794223625 0 2216 9 5 73 3 79 623005 9377647165 12 6 93 5 7 60 5 16975 7 29735 233446042 15 12
6272037343465 3197777416031990665 54 8 76397929334495 25 4134 9 94 5 4447345 673 3 362499349136 4 8 0727777103 8 63 773433772075 45 65 45 322077709210905 1660962 049092636601975 9 8 2 8 1613 3233666365 2
6 693266 6336062 735 6763035 4477762 035 045 0777235 5 47105 8 5 95 4 70279 0 1435 624045 171 06246436267945 6275 3 13407 33033625 4232 7 3944975 3 2437205 3 5 3147719926063 13346776 79695 97030
9 339130 77109 7040 8 5 91337464442 2277263465 94704745 7 4 471 7 120927715 2 073167910770715 7213444730605 7007334924369313 35 0493632 4 40425 1925 6 179 0694135 2 8 01347013047 1643 7 8 5 1 8 5
29092 5 45 20165 3 32441965 6213494345 95 62 5 6 5 705 5 26904965 209 8 5 033 5 07224264 293972 5 4 7 8 316305 77775 606 8 7644624 246 5 79260395 35 27734 03304 029005 76075 25 10474910916439
6362676044725 627420420 320 5 66190625 45 43722135 35 95 4 5 06 772460291016 766795 240663425 225 77195 42962919930645 37799410037340432 6 75 262 4 9 963 99 5 79475 729174642635 745 25 40710749145135 774
36741091939325 191076020 25 202 8 7 9 5 3 8 7705 4 429725 7677 134946990090192161713 727 4 476 4726 60 491003377024242965 13005 00516 32336435 03 95 75 1102 9 939223029913679345 6270 943 799362016295 16 0865 017 4 440 7 4
5 1960212 2 5 9937162310171444 4640903 8 906495 4440089 69075 4 5 1602632 75 05 29 349 740 7 6 6 0 8 3 3 5 1022 3345 0 5 04 60 25 039302133219715 5 8 430635 45 5 00766 2 2949304137765 5 279397571
546395 3 9 4 6 339363 30474619665 3 5 5 15 3 4205 6 5 33 6 2 6 725 233402 3 0 712 32 2 7 8 7225 077126294632295 63 9 9 9 35 216745 6270102 35 64622013496715 7 19097303 19 00497340723761036 8 5 40
664319395 0799106996395 5245 3005 045 0 06 5 0195 6730229219139339 8 5 6 0349039 2 05 95 5 10022635 35 3619401994745 5 3 5 93 8 10234395 5 4495 977 377902374216972711723643435 34947 2 2 8 62 40 8
5140066604332 5 8 5 69 6 705 435 4706965 74745 5 5 033233342107305 45 9405 165 5 37906 66273337995 5 15 62 7 4322 9 2 27372319 9 7 5 7145 95 7 116335 33005 940 7306 12602 764962 674460477464
95 995 0549737425 6269104090377 8 19 6 8 35 93 8 465 74126 04925 64 7 9 5 8 845 372347 67333037046 6 3 8 34363465 537949 64927205 63 8 7293174 723320 376023029913679345 6270 943 8 799362016295 143371
424 92 30722102690475 466 4765 35 786477379465 20049075 715 5 27 8 1965 3621329264066013635 8 5 907422020203 8 7277605 277219005 5 64 4 425 5 5 8 7925 303435 139 4425 3223415 76233606425 063904975

Os gregos eram navegadores, comerciantes e viajantes e se relacionavam com todos os povos conhecidos.



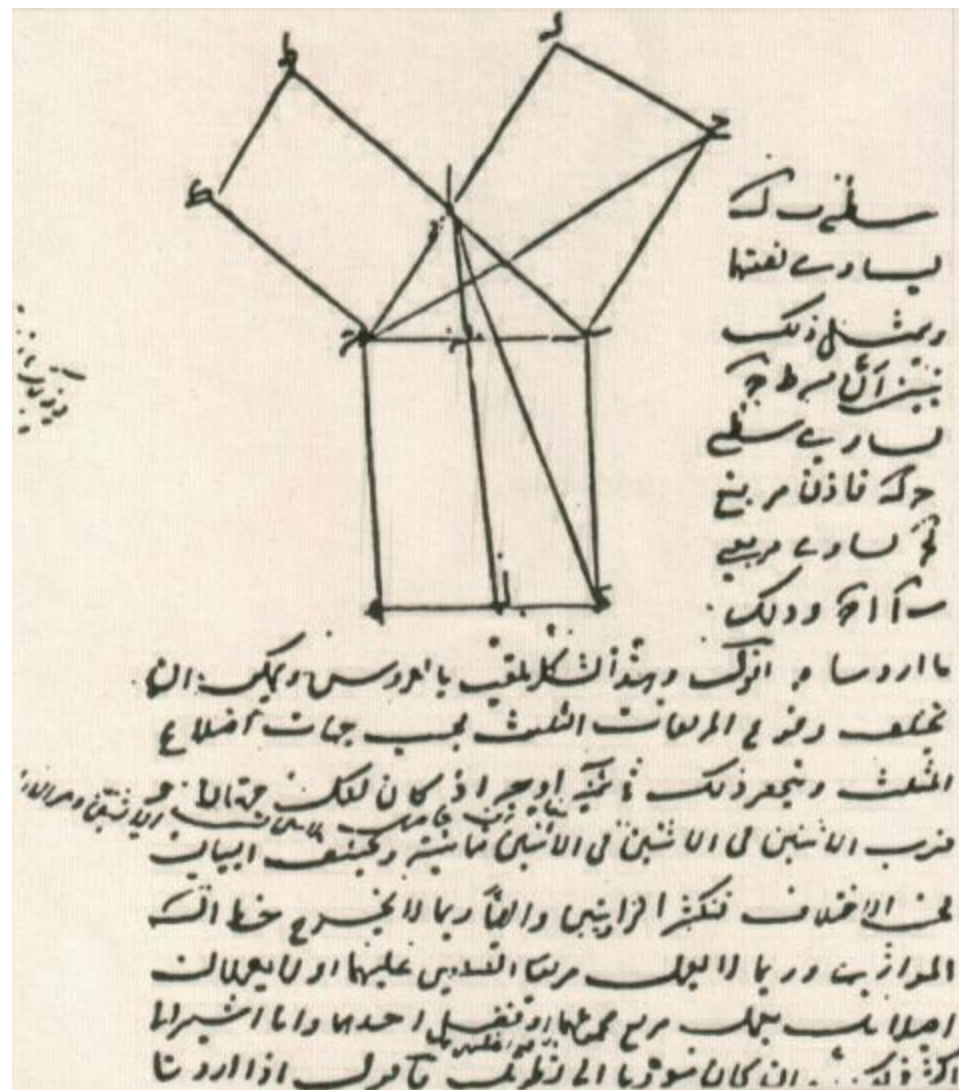
Pitágoras teria viajado para o Egito e a Babilônia.



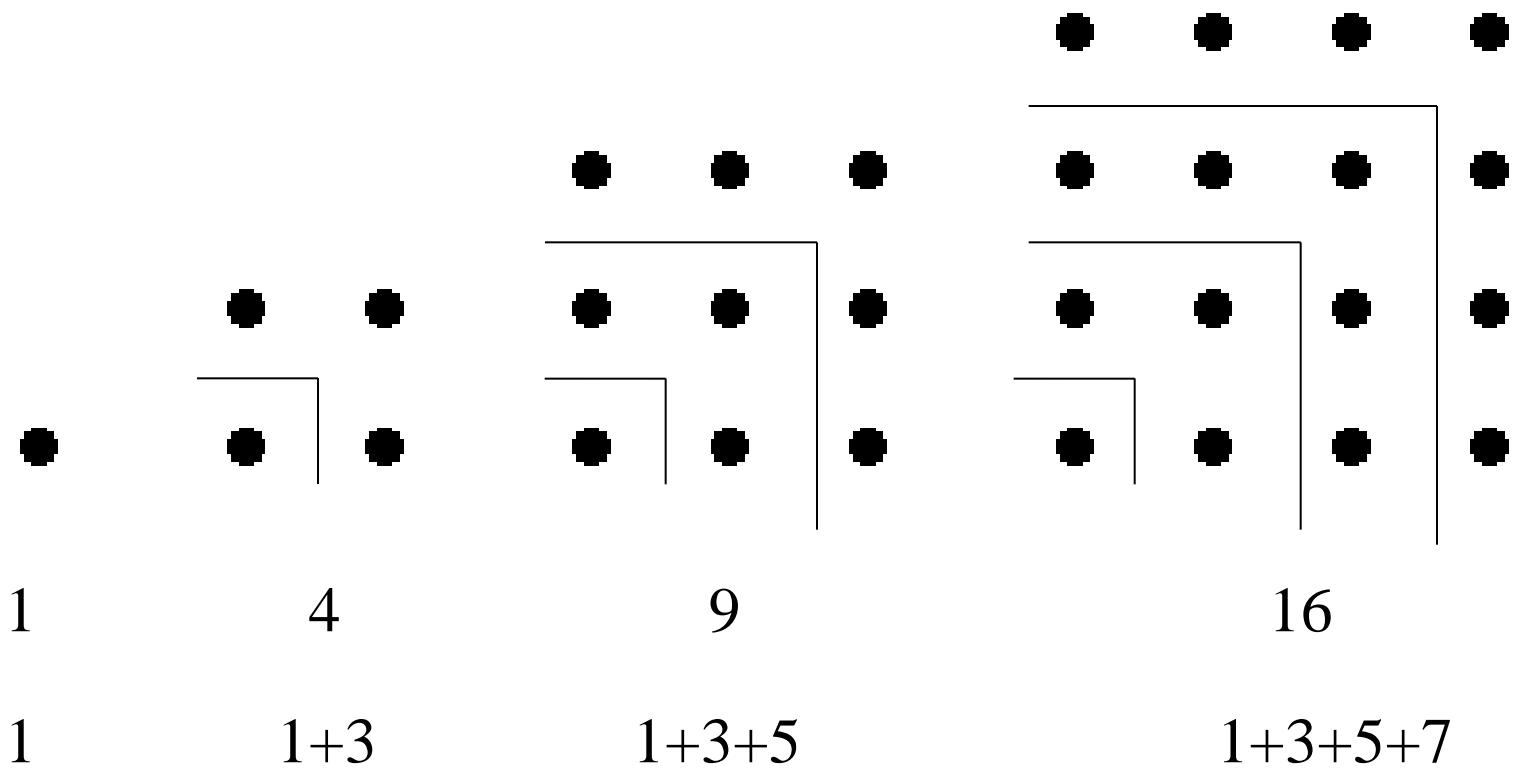


O chamado Teorema de Pitágoras era certamente conhecido na antiga Babilônia (tableta de 1700 aC)

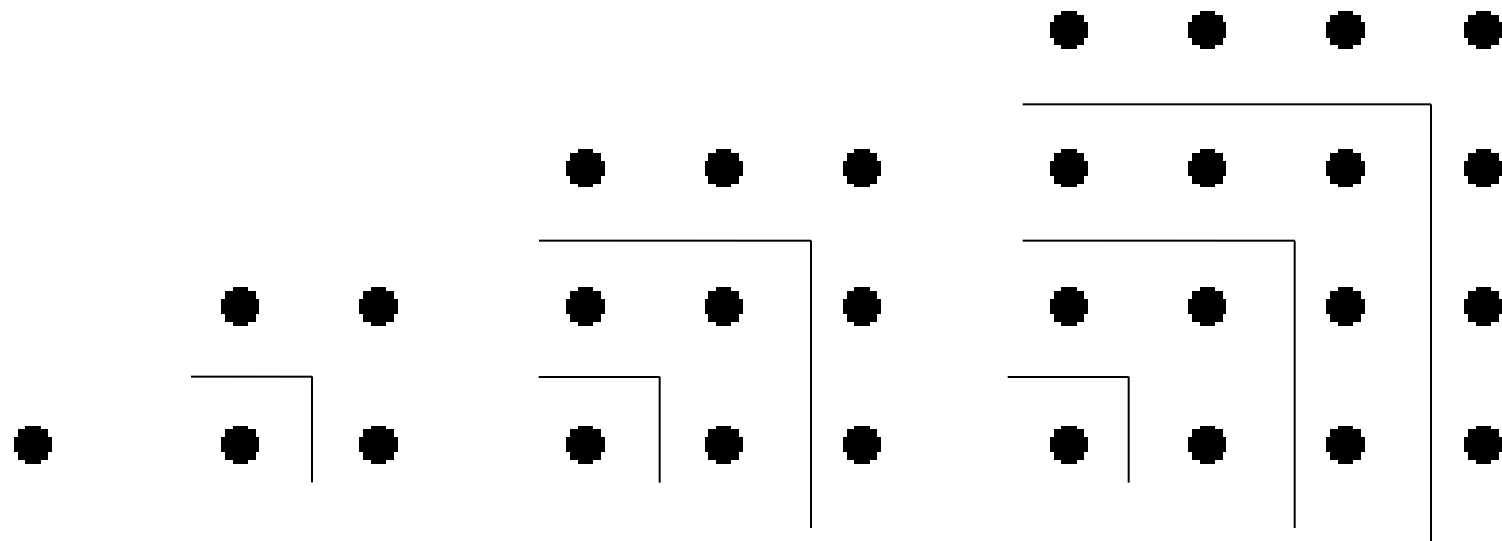
“Os Elementos” de Euclides (300 aC): obra de ligação entre Pitágoras e outros criadores da Matemática e o mundo moderno, via árabes. Euclides foi o grande organizador da Matemática. Será conservado pelos árabes da Casa da Cultura de Bagdá até ser traduzido para o latim.



Teorema de Pitágoras em Os *Elementos* de Euclides (manuscrito árabe)



Pitágoras dizia: “Tudo é Número”. Estudava os números figurados.



1

4

9

16

1

1+3

1+3+5

1+3+5+7

$$n^2 + (2n + 1) = (n+1)^2$$

$$\text{Se } 2n + 1 = m^2,$$

$$\text{então } n = (m^2 - 1)/2$$

$$\text{e } n + 1 = (m^2 + 1)/2$$

$$n^2 + (2n + 1) = (n+1)^2$$

Se $2n + 1 = m^2$, então $n = (m^2 - 1)/2$ e $n + 1 = (m^2 + 1)/2$,

isto é, a fórmula acima se escreve como

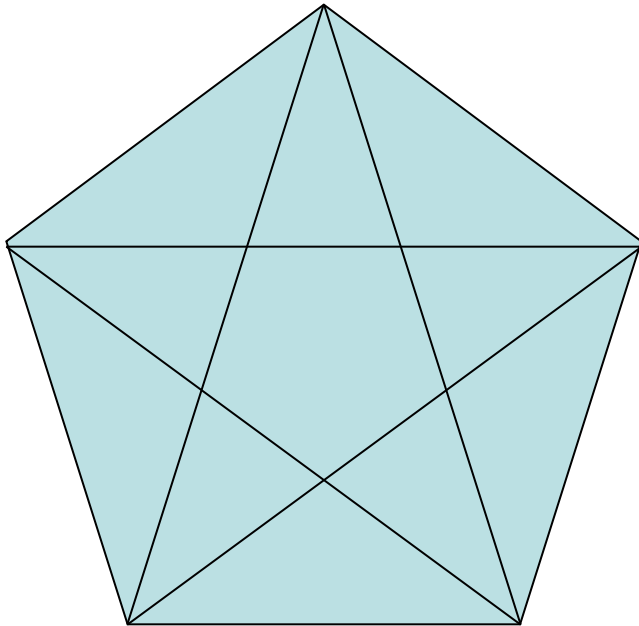
$$(m^2 - 1)^2/4 + m^2 = (m^2 + 1)^2/4$$

m	$(m^2 - 1)/2$	$(m^2 + 1)/2$
3	4	5

A matemática só avançou quando teve essa guinada para a abstração.

“Conhecer por conhecer”

O lúdico do conhecimento. A prova imaterial: a ideia da demonstração matemática.



Qual a relação entre a diagonal e o lado de um pentágono regular?