

Logaritmos

Antonio Carlos Brolezzi

brolezzi@ime.usp.br

Existe uma operação matemática chamada potenciação ou exponenciação:

$$a^c = b$$

Existe uma operação matemática chamada
potenciação ou exponenciação:

$$3^2 = 9$$

Existe uma operação matemática chamada potenciação ou exponenciação:

$$a^c = b$$

Existe uma operação matemática chamada potenciação ou exponenciação:

$$a^c = b$$

Uma operação inversa da potenciação é a operação chamada radiciação, válida para c natural maior ou igual a 2:

$$a = \sqrt[c]{b}$$

Existe uma operação matemática chamada potenciação ou exponenciação:

$$3^2 = 9$$

Uma operação inversa da potenciação é a operação chamada radiciação, válida para c natural maior ou igual a 2:

$$3 = \sqrt[2]{9}$$

Existe uma operação matemática chamada potenciação ou exponenciação:

$$3^2 = 9$$

Uma operação inversa da potenciação é a operação chamada radiciação, válida para c natural maior ou igual a 2:

$$3 = \sqrt{9}$$

Potenciação: $a^c = b$

Radiciação: $a = \sqrt[c]{b}$.

Mas e se formos isolar o expoente c ?

Teremos outra operação inversa, chamada de logaritmo, válida para a e b positivos e $a \neq 1$.

$$c = \log_a b$$

(lê-se “log de b na base a ”).

Potenciação: $3^2 = 9$

Radiciação: $3 = \sqrt{9}$.

Mas e se formos isolar o expoente c ?

Teremos outra operação inversa, chamada de logaritmo, válida para a e b positivos e $a \neq 1$.

$$2 = \log_3 9$$

(lê-se “log de b na base a ”).

$$a^c = b$$

$$a = \sqrt[c]{b}$$

$$c = \log_a b$$

$$3^2 = 9$$

$$3 = \sqrt{9}$$

$$2 = \log_3 9$$

$$a^c = b$$

$$a = \sqrt[c]{b}$$

$$c = \log_a b$$

$$2^3 = 8$$

$$2 = \sqrt[3]{8}$$

$$3 = \log_2 8$$

$$a^c = b$$

$$a = \sqrt[c]{b}$$

$$c = \log_a b$$

$$10^3 = 1000$$

$$10 = \sqrt[3]{1000}$$

$$3 = \log_{10} 1000$$

$$10^3 = 1000$$

$$10 = \sqrt[3]{1000}$$

$$3 = \log 1000$$

(logaritmo decimal ou comum)

O logaritmo é uma operação inversa da potenciação (ou exponenciação), mas não como a radiciação, que permite expressar a base da potência.

Logaritmos invertem a potenciação, expressando o expoente da potência.

Veja como o logaritmo se relaciona com a potenciação e a radiciação (atendidas as restrições para a , b e c em cada caso):

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \Leftrightarrow a = \sqrt[c]{b}.$$

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Com números, temos

$$\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 3^2 = 9$$

Logaritmo de um número b o expoente a que outro número a deve ser elevado para obter b , sendo a e b reais positivos, e a diferente de 1.

Ou seja, se $a^c = b$, então c é o logaritmo de b na base a e se escreve $\log_a b = c$.

Logaritmo é isso:

O expoente de uma base positiva diferente de 1.

Por exemplo, para resolver a equação $2^x=8$, usamos logaritmos e encontramos $x = \log_2 8 = 3$.

Podemos encontrar logaritmos
facilmente com cálculo mental:

$$\log_2 8 =$$

Podemos encontrar logaritmos
facilmente com cálculo mental:

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_3 9 =$$

Podemos encontrar logaritmos
facilmente com cálculo mental:

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_3 9 = 2$$

$$\log_5 25 =$$

Podemos encontrar logaritmos
facilmente com cálculo mental:

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_3 9 = 2$$

$$\log_5 25 = 2$$

$$\log_5 125 =$$

Podemos encontrar logaritmos
facilmente com cálculo mental:

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_3 9 = 2$$

$$\log_5 25 = 2$$

$$\log_5 125 = 3$$

$$\log 100 =$$

Podemos encontrar logaritmos facilmente com cálculo mental:

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_3 9 = 2$$

$$\log_5 25 = 2$$

$$\log_5 125 = 3$$

$$\log 100 = 2$$

$$\log 0,1 =$$

Podemos encontrar logaritmos
facilmente com cálculo mental:

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_3 9 = 2$$

$$\log_5 25 = 2$$

$$\log_5 125 = 3$$

$$\log 100 = 2$$

$$\log 0,1 = -1$$

Logaritmo é isso.

Mas ele não nasceu assim, com
essa finalidade.

Em matemática, é comum que conceitos e ideias criadas para determinados fins acabem servindo a outras aplicações muito diferentes das originais, às vezes séculos ou milênios depois da invenção de uma noção.

A história dos logaritmos é bastante significativa para mostrar essa característica da matemática, de que ideias criadas para resolver problemas em um contexto podem ser utilizadas para resolver problemas em outros contextos.

Os logaritmos surgiram há 500 anos em um contexto bem diferente de hoje em dia.

A ideia surgiu a partir da observação de padrões.

0 1 2 3 4 5 6 ...

Que padrão você percebe?

As progressões aritméticas são aquelas em que cada termo é obtido do anterior por meio da operação de
adição.

0 1 2 3 4 5 6 ...

-5 -3 -1 1 3 5 7 ...

1 2 4 8 16 ...

Que padrão você percebe?

As progressões geométricas são aquelas em que cada termo é obtido do anterior por meio da operação de multiplicação.

1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$...

O que as PAs tem a ver com as PGs?

E onde os logaritmos entram nessa história?

Vamos lembrar a relação entre multiplicações e adições.

Na potenciação, existe uma propriedade fundamental:

Na multiplicação de potências de mesma base, conservam-se as bases e somam-se os expoentes.

Ou seja, para qualquer a , m e n reais, temos:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

As operações de adição e multiplicação estão interligadas nessa propriedade da operação de potenciação.

Foi observando uma PA e uma PG, escritas termo a termo uma acima da outra, que Michael Stifel (1487—1567) percebeu um padrão.



Monge agostiniano, ordenado sacerdote aos 24 anos de idade, Stifel foi espulso aos 35 anos e tornou-se pastor luterano e estudioso da matemática.

Primo subtraho 10 de 8, & non inuenio numerum aliquem supra 0, id est, supra nihil, quem ponere possim iusta subtractionis lege. Nam si ille à quo debet fieri subtractio, esset maior eo qui subtrahitur (ut si loco numeri 8 poneretur numerus 12) tum tandem haberem numerum ponendum uerum. Sic si ille numerus à quo fieri debet subtractio, esset æqualis ei qui subtrahitur (ut si loco 8 poneretur 10) tunc relinqueretur 0, id est, nihil, (quod mediatur inter numeros ueros & numeros absurdos) iam uero cum numerus subtrahendus maior sit eo à quo fit subtractio, restat ut numerus infra 0, id est, infra nihil, ponatur uidelicet 0 — 2. Sic simili ratione postea subtraho 0 — 5 de 0 — 1, & inuenio 0 — 3, id est, numerum supra nihil, seu numerum uerum.

Sic Cossa solet, pro immensa copia sua, res uti quæ sunt, & res quæ finguntur esse. Nam sicut supra unitatem ponuntur numeri integri, & infra unitatem finguntur minutæ unitatis, & sicut supra unam ponuntur integra, & infra unum ponuntur minuta seu fracta : sic supra 0 ponitur unitas cum numeris, & infra 0 fingitur unitas cum numeris. Id quod pulchre repetentari uidetur in progressionem numerorum naturalium, dum serua progressionem.

Sed ostendenda est ista speculatio per exemplum.

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	1	2	4	8	16	32	64

Possent hic fere nouus liber integer scribi de mirabilibus numerorum, sed oportet ut me hic subducã, & clausis oculis abeã. Repetam uero unum ex superioribus, ne frustra dicar fuisse in campo isto. Sed sententiã inuersã repetam quod mihi repetendum uidetur.

Qualiacumq; facit progressio Geometrica multiplicando & diuidendo, talia facit progressio Arithmetica addendo & subtrahendo. Exemplum.

Sicut $\frac{1}{2}$ multiplicata in 64, facit 32. Sic — 3 additam ad 6, fa-

Comparação entre PA e da PG no livro *Aritmética Integra*, de Stifel (1544).

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Comparação entre PA e
da PG no livro
Aritmética Integra, de
Stifel (1544).

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Stifel observou que somas na PA correspondem a produtos na PG.

Vamos vivenciar o que Stifel observou, encontrando na tabela as posições na PG correspondente a operação de multiplicação abaixo:

$$\frac{1}{8} \text{ vezes } 64$$

Os números $\frac{1}{8}$ e 64 na PG correspondem aos números -3 com 6 na PA.

É fácil fazer a soma $-3 + 6 = 3$.

Esse resultado na PA corresponde ao resultado da multiplicação de $\frac{1}{8}$ por 64 na PG.

Logo, localizando 3 na PA, encontramos o resultado da multiplicação na posição da PG correspondente, isto é, 8.

A explicação disso vem do fato de que

$$\left(\frac{1}{8}\right) = 2^{-3} \text{ e } 64=2^6.$$

Logo, temos

$$\frac{1}{8} \cdot 64 = 2^{-3} \cdot 2^6 = 2^{-3+6} = 2^3 = 8$$

É, em geral, mais fácil fazer a adição dos expoentes, do que fazer a multiplicação das potências de mesma base.

Vamos usar esse método genial?

4 vezes 8

64 dividido por 4

16 dividido por $\frac{1}{2}$



PA e PG de Stifel

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0,0625	0,125	0,250	0,5	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768

Responda usando a tabela e fazendo apenas subtrações ou adições:

$$32768 \div 1024$$

$$0,125 \times 512$$

$$32 \times 256$$

$$8192 \div 0,250$$

Stifel percebeu que uma adição na PA corresponde a um produto na PG, e que uma subtração na PA corresponde a uma divisão na PG.

Stifel não tinha um símbolo ou um nome para logaritmos, mas a ideia estava ali presente.

Pois com logaritmos, transformam *maravilhosamente* produtos em somas, divisões em subtrações.

Usando a notação moderna de logaritmos, temos:

$$\log_b ac = \log_b a + \log_b c$$

e

$$\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c.$$

Assim, ao fazermos $0,125 \times 512$ com a tabela, podemos encontrar a solução sem multiplicar usando a propriedade $\log_b ac = \log_b a + \log_b c$:

$$\log_2 0,125 \cdot 512 = \log_2 0,125 + \log_2 512 = -3 + 9 = 6$$

Assim, descobrimos que $\log_2 0,125 \cdot 512 = 6$.

Portanto, $0,125 \cdot 512 = 2^6 = 64$.



Para números grandes, transformar uma multiplicação em uma adição é algo muito valioso, na época em que não havia máquinas de calcular.

70 anos depois, a ideia original de Stifel foi colocada em termos práticos auxiliando em cálculo de números muito grandes pelo barão escocês John Napier (1550-1617), teólogo e astrônomo, que publicou em 1614, o livro *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descrição Maravilhosa da Regra dos Logaritmos).



Napier é o criador da palavra logaritmos que significa “números da razão”. Isso porque, em uma PG, a razão entre um termo e o sucessor é sempre a mesma (a razão da PG).

Napier usou PAs e PGs de razão muito pequena, da ordem de $1-10^{-7}$, ou seja, 0,99999999. E elaborou páginas e páginas com os termos de suas progressões.

Foram 20 anos de trabalho e ele escreveu cerca de 10 milhões de números.



Um suíço, construtor de relógios,
Jost Bürgi (1552-1632)
publicou também em 1620 suas
tábuas de logaritmos, sem
chamá-los assim. Ele usou
progressões com razão $1+10^{-4}$,
isto é, 1,0001.

Aparentemente, nem ele nem
Napier sabiam da existência um
do outro.





Jobst Bürgi: Relógio de cristal de rocha, 1622/23

O astrônomo e matemático inglês Henry Briggs (1561–1630), em sua obra *Arithmetica Logarithmica*, de 1624, teve uma ideia prática interessante.



Briggs sugeriu uma simplificação importante no trabalho de Napier, que foi aceita por ele. Assim, foi introduzido o logaritmo muito usado hoje em dia, que é aquele que tem base 10. Logaritmos com base 10 são chamados logaritmos comuns ou decimais e não precisam ter a base explícita. Quando você encontrar um logaritmo escrito simplesmente assim $\log 2$, já sabe que ele é um logaritmo na base 10.

A partir daí, não era mais necessário produzir tábuas de PA e PG, mas sim tábuas de logaritmos para bases específicas.

Tabua de logaritmos de 1 a 60 na base 10 de Briggs, 1626

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1	00000000	16	12041199 263289	31	14913616 137882	46	16627578 93400
2	03010299 1760912	17	12304489 248235	32	15051499 133639	47	16720978 91433
3	04771212 1249387	18	12552725 234810	33	15185139 129649	48	16812412 89548
4	06020599 969100	19	12787536 222763	34	15314789 125891	49	16901960 87739
5	06989700 791812	20	13010299 211892	35	15440680 122344	50	16989700 86001
6	07781512 669467	21	13222192 202033	36	15563025 118992	51	17075701 84331
7	08450980 579919	22	13424226 193051	37	15682017 115818	52	17160033 82725
8	09030899 511525	23	13617278 184834	38	15797835 112810	53	17242758 81178
9	09542425 457574	24	13802112 177287	39	15910646 109953	54	17323937 79689
10	10000000 413926	25	13979400 170333	40	16020599 107238	55	17403626 78253
11	10413926 377885	26	14149733 163904	41	16127838 104654	56	17481880 76868
12	10791812 347621	27	14313637 157942	42	16232492 102191	57	17558748 75531
13	11139433 321846	28	14471580 152399	43	16334684 99842	58	17634279 74240
14	11461280 299632	29	14623979 147232	44	16434526 97598	59	17708520 72992
15	11760912 280287	30	14771212 142404	45	16532125 95453	60	17781512 71785

A ij

Confira na tabela as propriedades

$$\log ac = \log a + \log c \text{ e } \log \frac{a}{c} = \log a - \log c.$$

b	log(b)
1	0
2	0,301029996
3	0,477121255
4	0,602059991
5	0,698970004
6	0,77815125
7	0,84509804
8	0,903089987
9	0,954242509
10	1
11	1,041392685
12	1,079181246
13	1,113943352
14	1,146128036
15	1,176091259
16	1,204119983

Confira na tabela a propriedade

$$\log ac = \log a + \log c$$

b	log(b)		
1	0		
2	0,301029996		0,477121255
3	0,477121255	3x4=12	0,602059991 +
4	0,602059991		1,079181246
5	0,698970004		
6	0,77815125		
7	0,84509804		
8	0,903089987		
9	0,954242509	log(3x4)=log3+log4	
10	1		
11	1,041392685		
12	1,079181246		
13	1,113943352		
14	1,146128036		

Confira na tabela a propriedade

$$\log \frac{a}{c} = \log a - \log c$$

b	log(b)		
1	0		
2	0,301029996		1,146128036
3	0,477121255	14/7=2	0,84509804 -
4	0,602059991		0,301029996
5	0,698970004		
6	0,77815125		
7	0,84509804		
8	0,903089987		
9	0,954242509		
10	1		
11	1,041392685		
12	1,079181246	log(14/7)=log14+log7	
13	1,113943352		
14	1,146128036		

Confira na tabela a propriedade

$$\log a^y = y \cdot \log a$$

b	log(b)			
1	0			
2	0,301029996			0,301029996
3	0,477121255	$2^3=8$		$3 \times$
4	0,602059991			0,903089987
5	0,698970004			
6	0,77815125			
7	0,84509804			
8	0,903089987			
9	0,954242509			
10	1			
11	1,041392685			
12	1,079181246	$\log(2^3)=3\log 2$		
13	1,113943352			
14	1,146128036			

As propriedades dos logaritmos permitem sua utilização ampla como forma de facilitar as operações.

$$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b \rightarrow a \neq 1 \rightarrow b > 0$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a b = \log_a c \rightarrow b = c$$

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

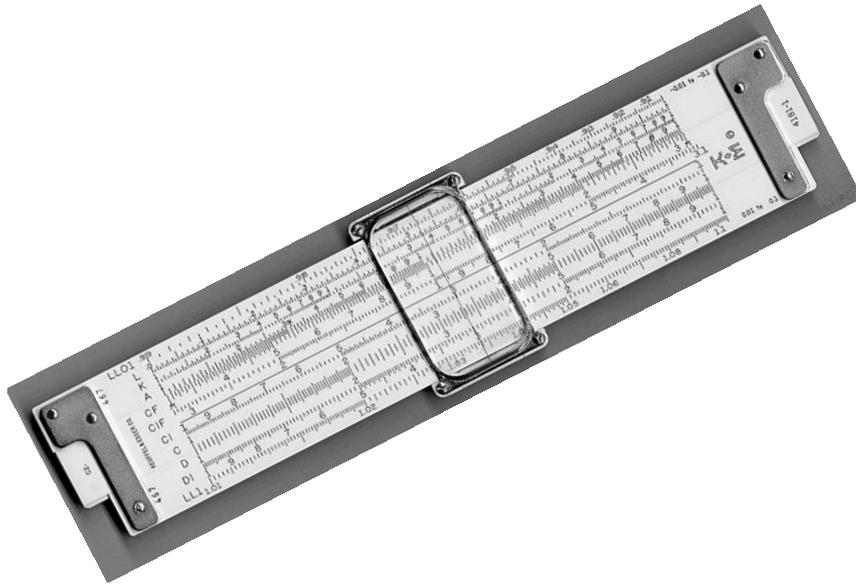
$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

Por 400 anos, as tábuas de logaritmos foram aperfeiçoadas por muitos outros astrônomos e matemáticos. Réguas de cálculo também foram criadas, baseadas nas relações entre operações viabilizadas pelo uso dos logaritmos.



Quando surgiram as calculadoras eletrônicas portáteis, na década de 1970, o uso de logaritmos para simplificar cálculos não fez mais sentido.



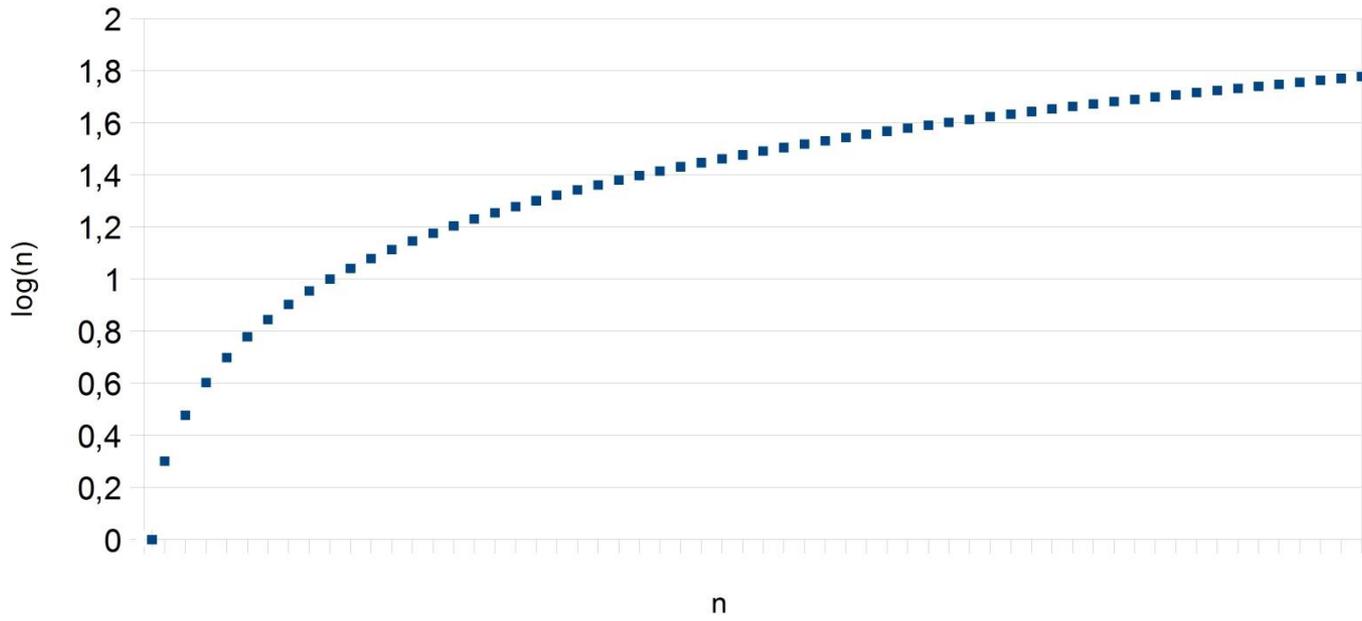
O desenvolvimento científico e tecnológico, entretanto, deu aos logaritmos outras funções sequer imaginadas pelos seus criadores. Muitas dessas aplicações dos logaritmos supõem o conhecimento da função logarítmica.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1	00000000	16	12041199 263289	31	14913616 137882	46	16627578 93400
2	03010299 1760912	17	12304489 248235	32	15051499 133639	47	16720978 91433
3	04771212 1249387	18	12552725 234810	33	15185139 129649	48	16812412 89548
4	06020599 969100	19	12787536 222763	34	15314789 125891	49	16901960 87739
5	06989700 791812	20	13010299 211892	35	15440680 122344	50	16989700 86001
6	07781512 669467	21	13222192 202033	36	15563025 118992	51	17075701 84331
7	08450980 579919	22	13424226 193051	37	15682017 115818	52	17160033 82725
8	09030899 511525	23	13617278 184814	38	15797835 112810	53	17242758 81178
9	09542425 457574	24	13802112 177287	39	15910646 109953	54	17323937 79689
10	10000000 413926	25	13979400 170333	40	16020599 107238	55	17403626 78253
11	10413926 377885	26	14149733 163904	41	16127838 104654	56	17481880 76868
12	10791812 347621	27	14313637 157942	42	16232492 102191	57	17558748 75531
13	11139433 321846	28	14471580 152399	43	16334684 99842	58	17634279 74240
14	11461280 299632	29	14623979 147232	44	16434526 97598	59	17708520 72992
15	11760912 280287	30	14771212 142404	45	16532125 95453	60	17781512 71785

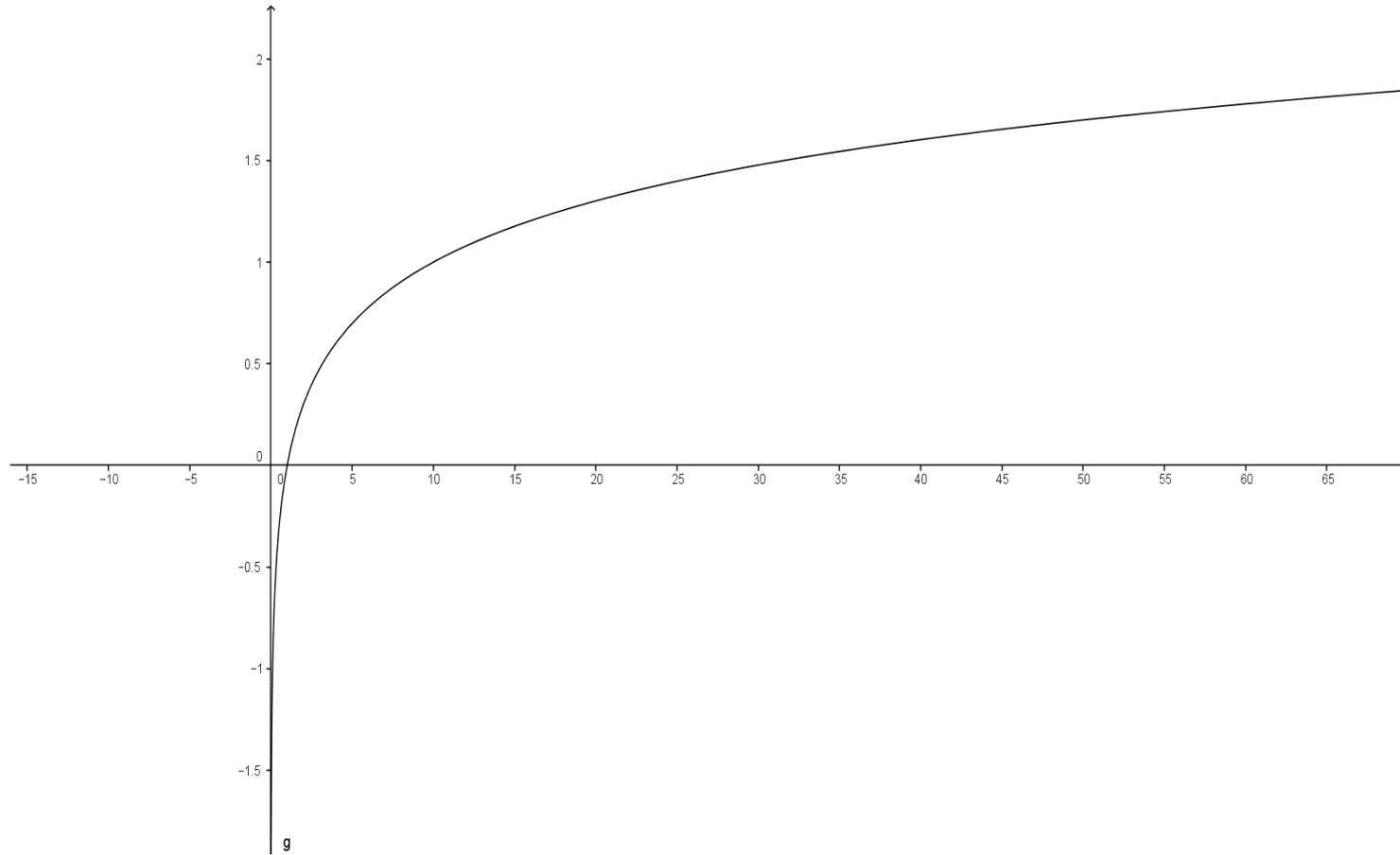
A ij

O desenvolvimento científico e tecnológico, entretanto, deu aos logaritmos outras funções sequer imaginadas pelos seus criadores. Muitas dessas aplicações dos logaritmos supõem o conhecimento da função logarítmica.

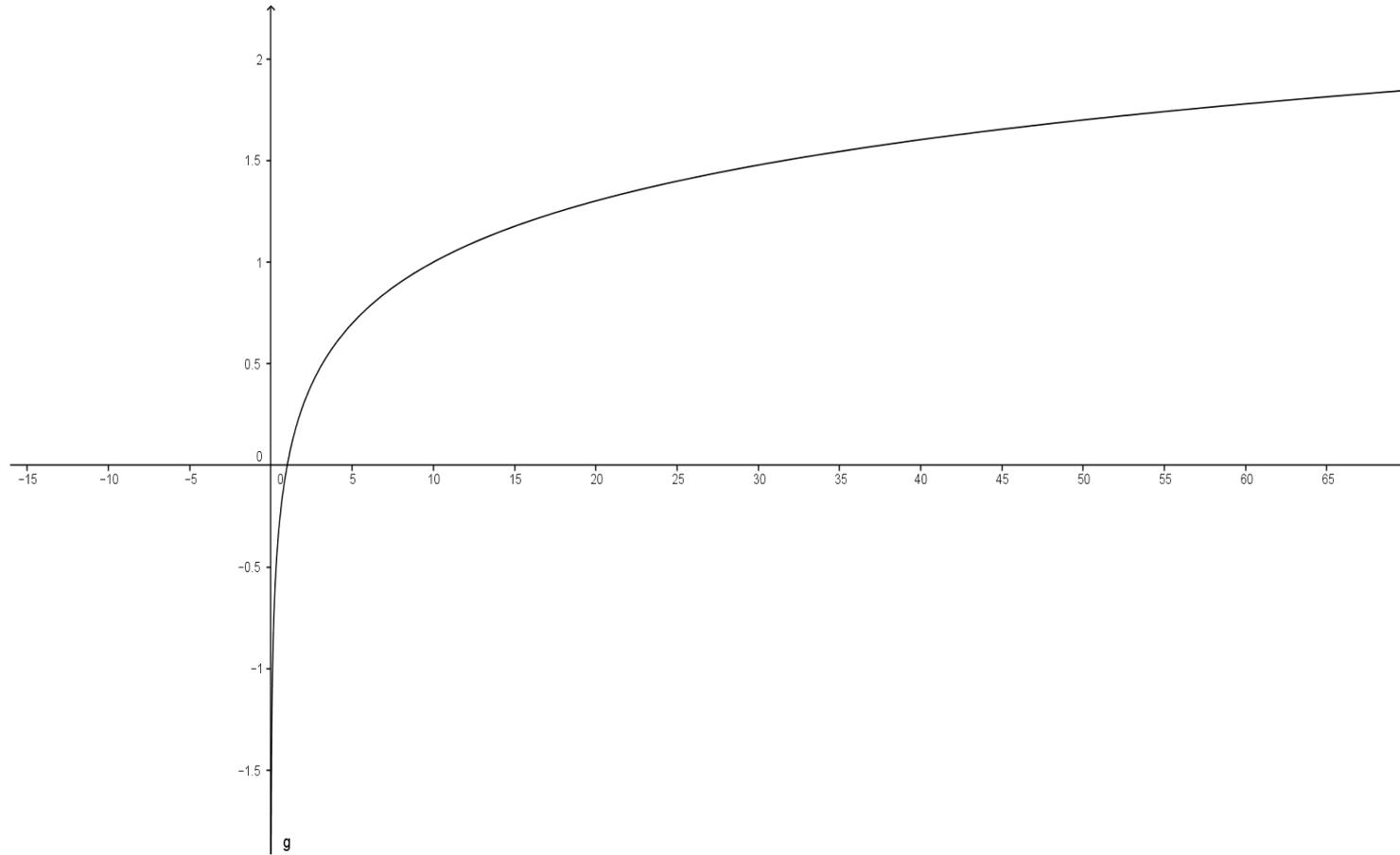
Tábua de Logaritmos Decimais de 1 a 60



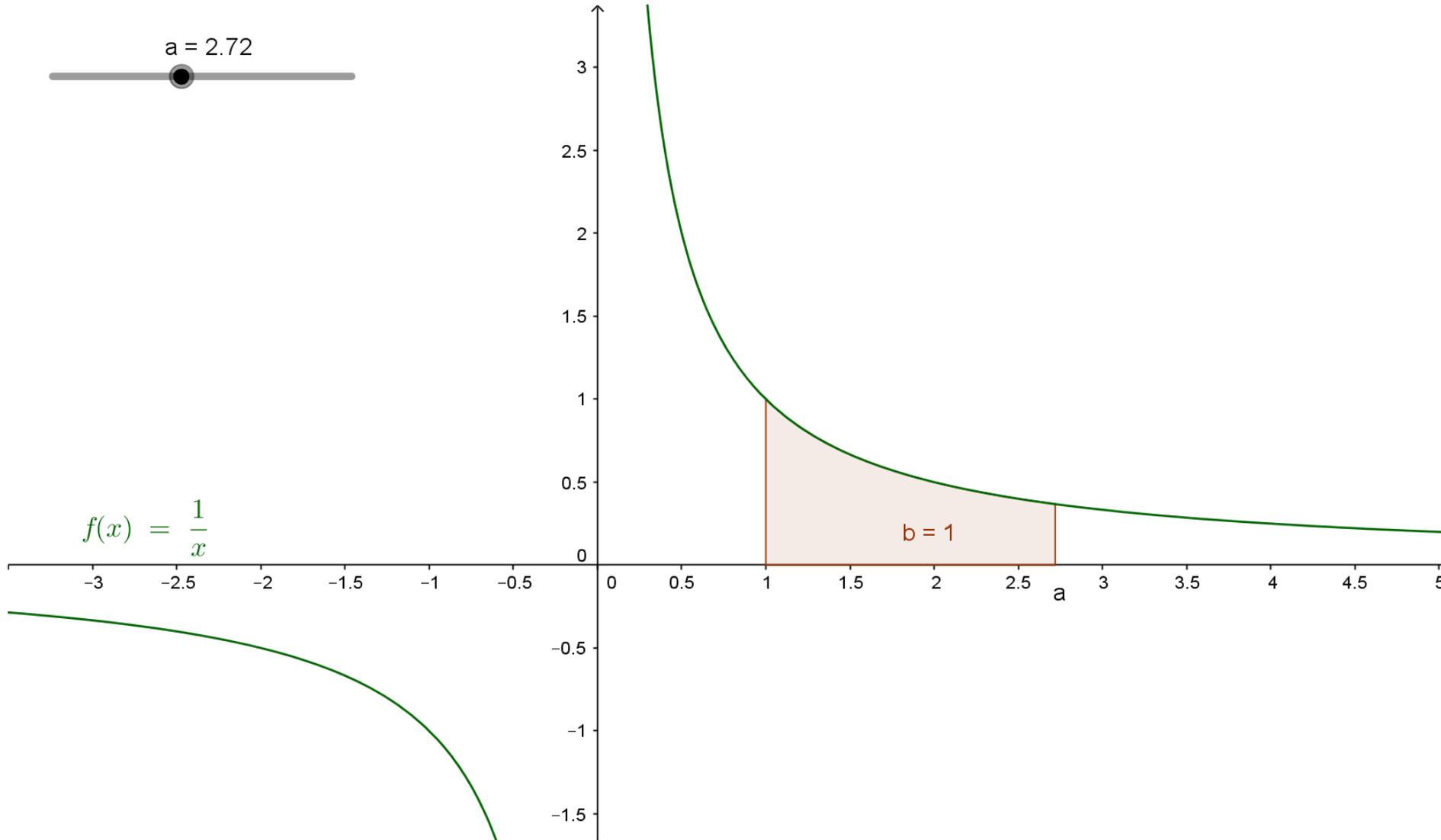
A função $y=\log(x)$ é definida para x real positivo.



Como foi criada a função logarítmica?



A função logarítmica foi definida como a medida da área sob o gráfico de uma função chamada hipérbole.



Área sob o gráfico de uma função?

Mas isso não é uma integral?



O cálculo diferencial e integral surgiu do estudo da variação.



Como aumenta a área de um quadrado quando seu lado aumenta?



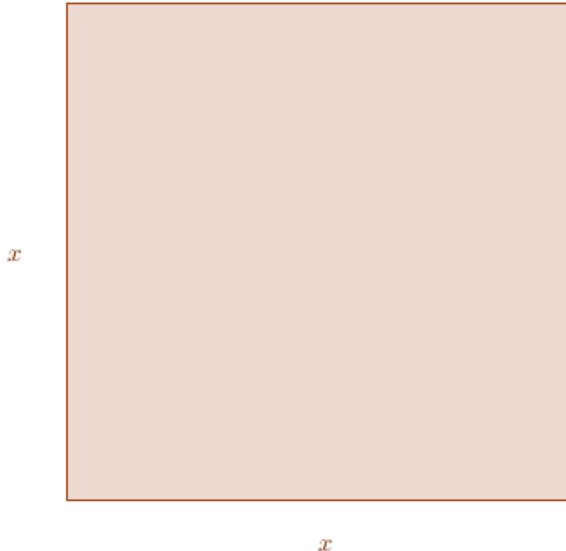
O aumento instantâneo da área do quadrado corresponde a duas vezes o lado.



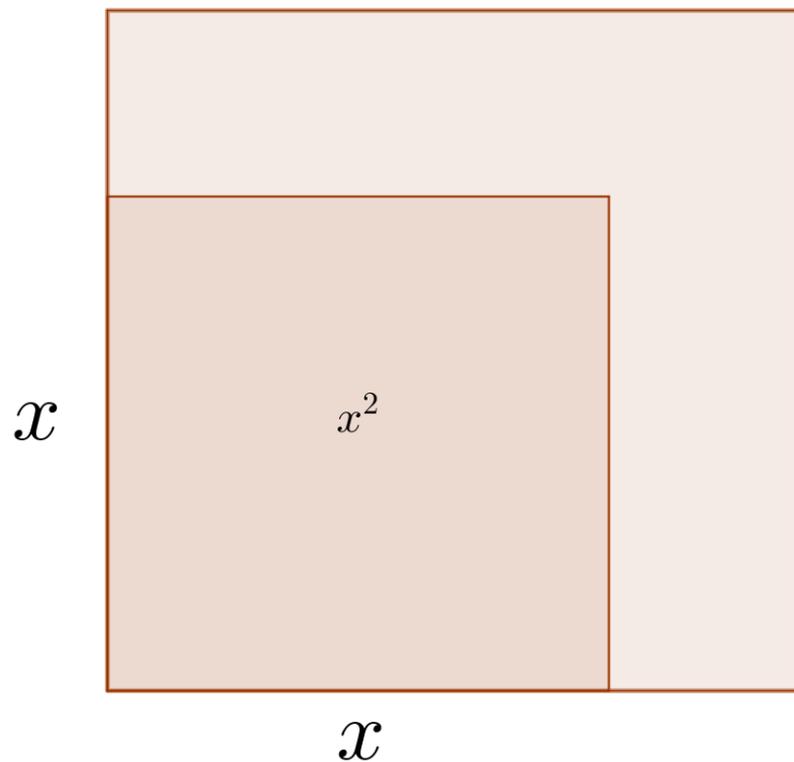
A taxa de variação instantânea da área é $2x$.

$$A(x) = x^2$$

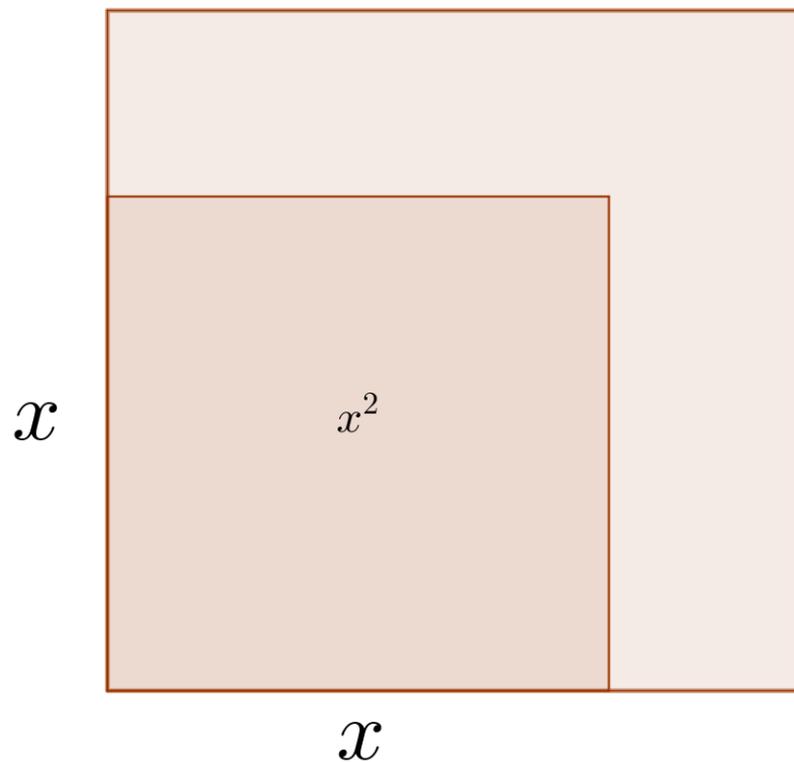
$$A'(x) = \frac{dA}{dx} = 2x$$



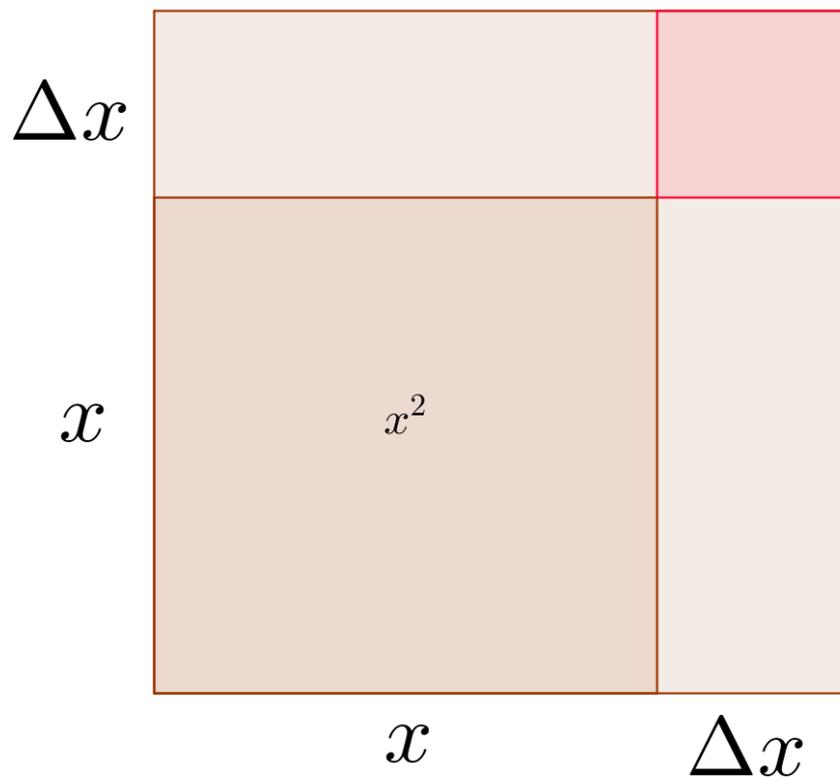
O aumento da área é a área da figura em forma de “L”.



O aumento da área é a área da figura em forma de “L”.

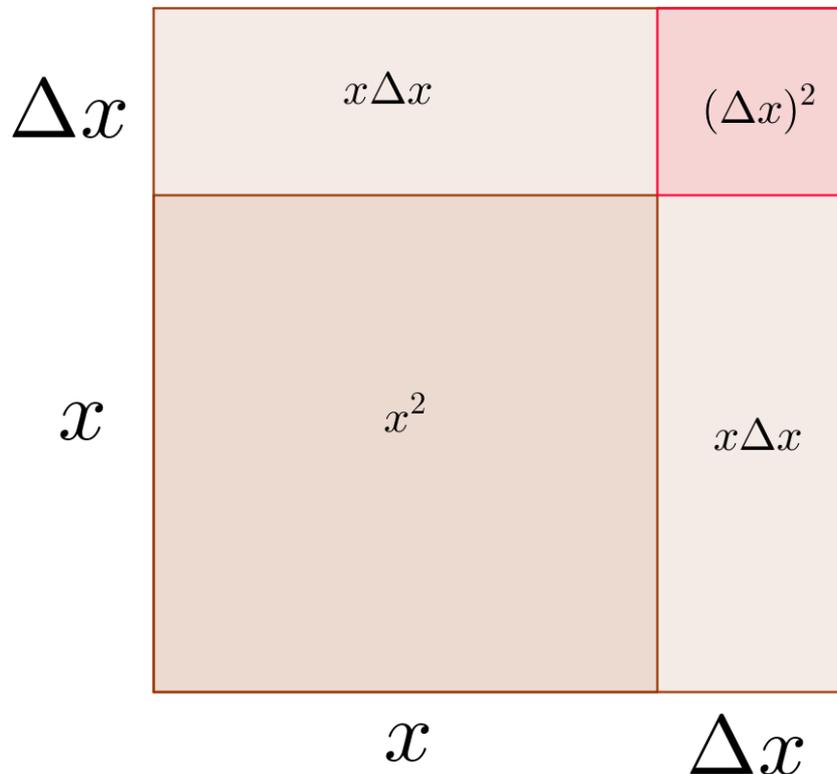


Essa área, ΔA , é dada por



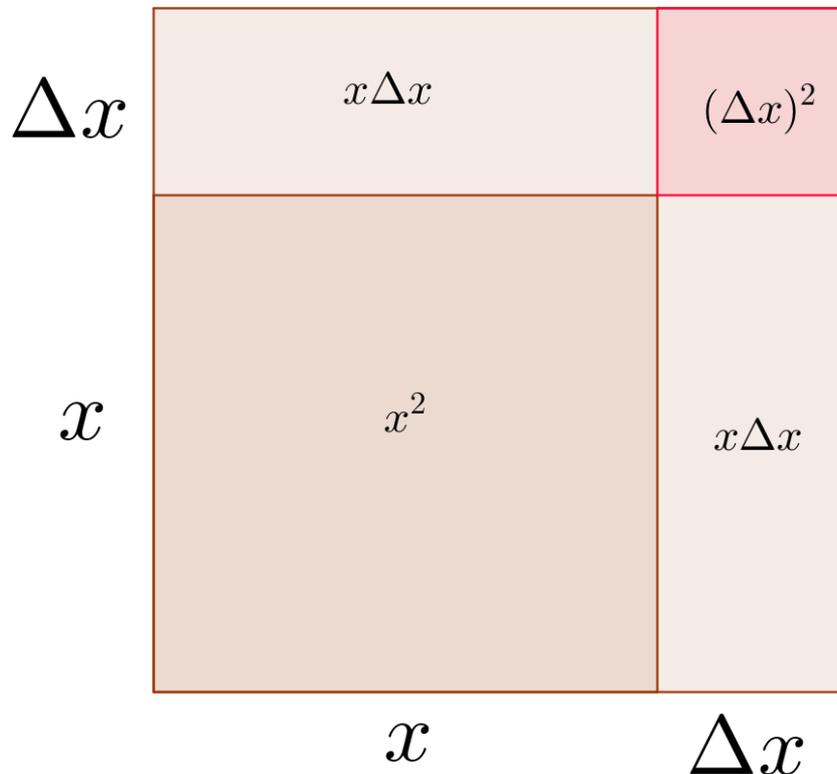
Essa área, ΔA , é dada por

$$\Delta A = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$



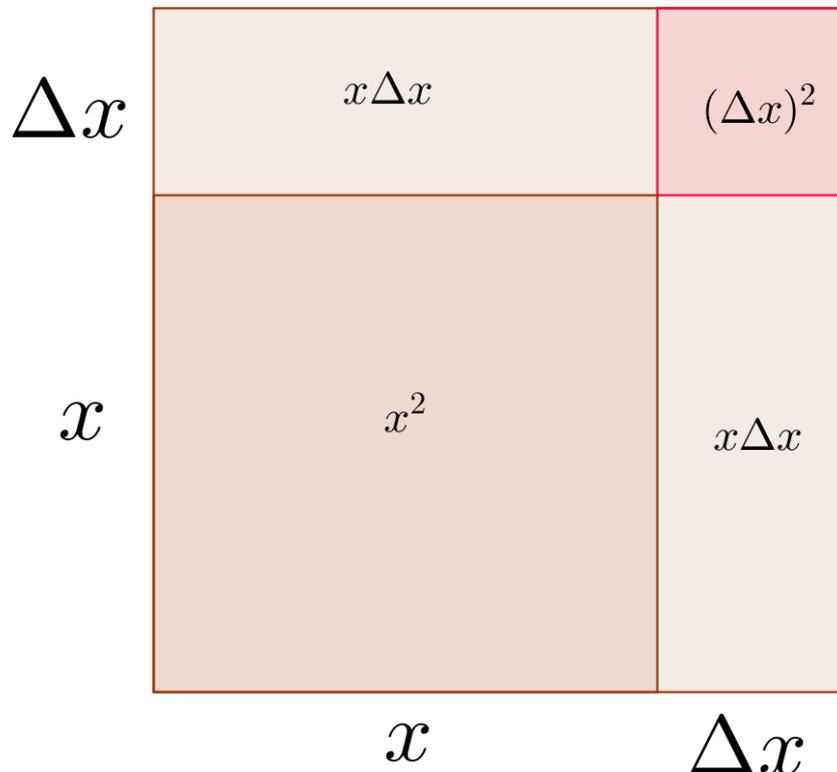
A taxa de aumento da área é

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$



A taxa de aumento da área é

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$



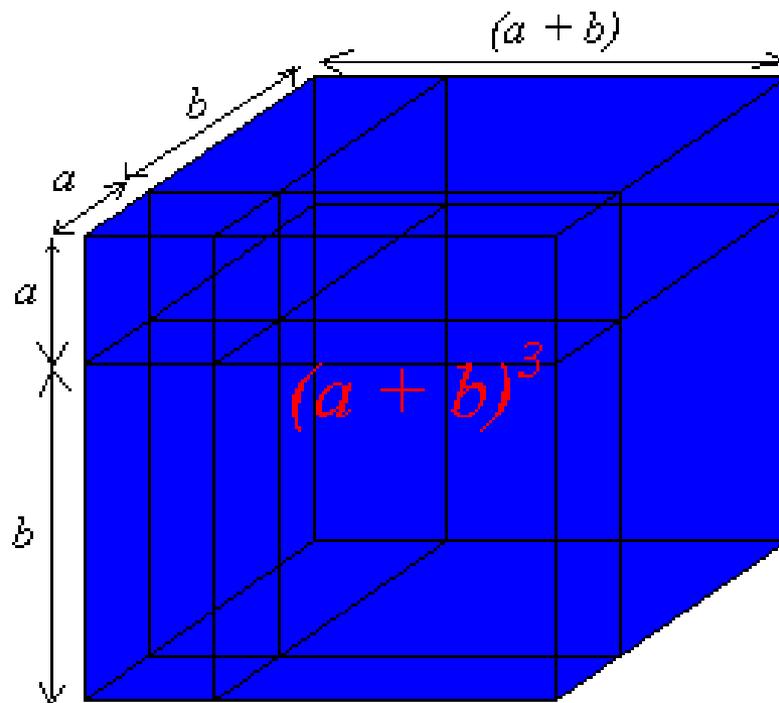
Fazendo $\Delta x \rightarrow 0$,

temos $\frac{\Delta A}{\Delta x} \rightarrow 2x$.

Portanto,

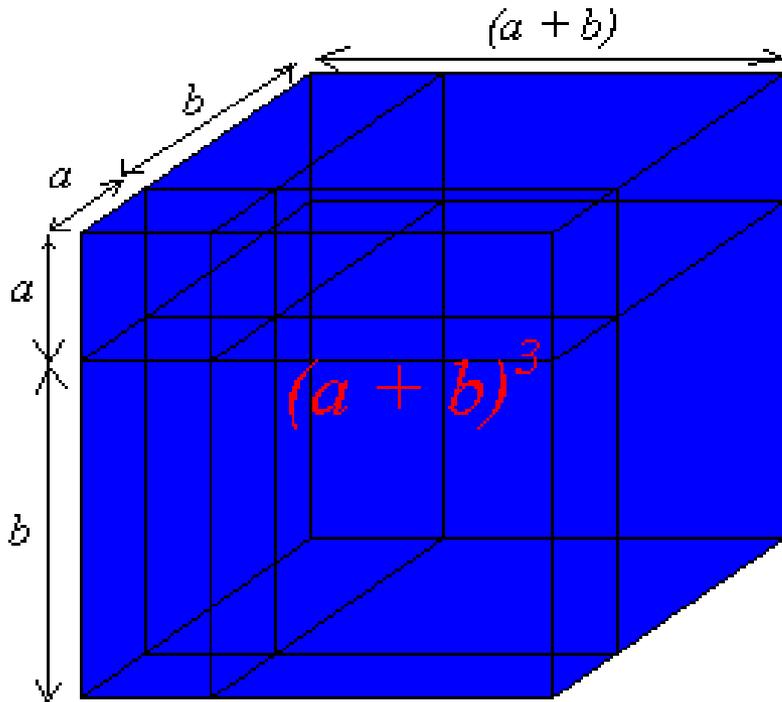
$$\frac{dA}{dx} = 2x.$$

No caso do volume do cubo de aresta x , cujo volume é $V(x) = x^3$, a taxa de variação instantânea é $3x^2$.



A taxa de variação do volume do cubo é

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - (x)^3}{\Delta x} = \frac{3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$



Fazendo $\Delta x \rightarrow 0$,

temos $\frac{\Delta V}{\Delta x} \rightarrow 3x^2$.

Portanto,

$$\frac{dV}{dx} = 3x^2.$$

Como aumenta a área de um círculo quando seu raio r aumenta?



A taxa de aumento da área do círculo é

$$\frac{\Delta A}{\Delta r} = \frac{\pi(r + \Delta r)^2 - \pi(r)^2}{\Delta r} = \frac{2\pi r \Delta r + (\Delta r)^2}{\Delta r}$$

Fazendo $\Delta r \rightarrow 0$,

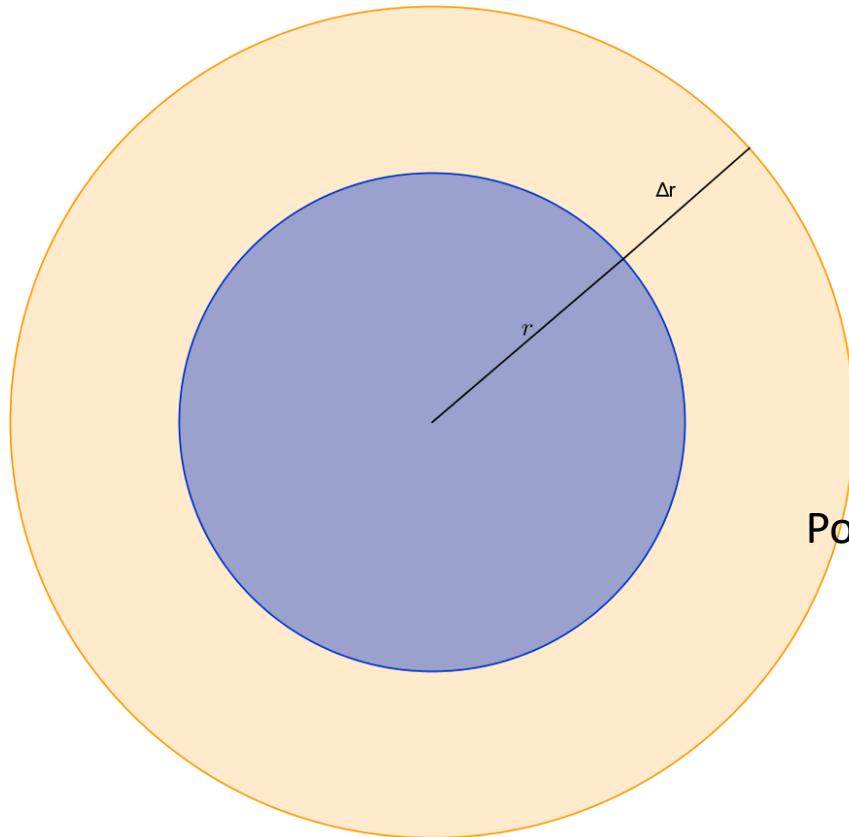
temos $\frac{\Delta A}{\Delta r} \rightarrow 2\pi r$.

Portanto,

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r.$$

A taxa de aumento da área do círculo é

$$\frac{\Delta A}{\Delta r} = \frac{\pi(r + \Delta r)^2 - \pi(r)^2}{\Delta r} = \frac{2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2}{\Delta r}$$



Fazendo $\Delta r \rightarrow 0$,

temos $\frac{\Delta A}{\Delta r} \rightarrow 2\pi r$.

Portanto,

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r.$$

Para uma esfera de raio r , cujo volume é dado por $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, a taxa de variação é

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{\frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi(r)^3}{\Delta r} = \frac{4\pi(r^2\Delta r + r(\Delta r)^2 + \frac{1}{3}(\Delta r)^3)}{\Delta r}$$

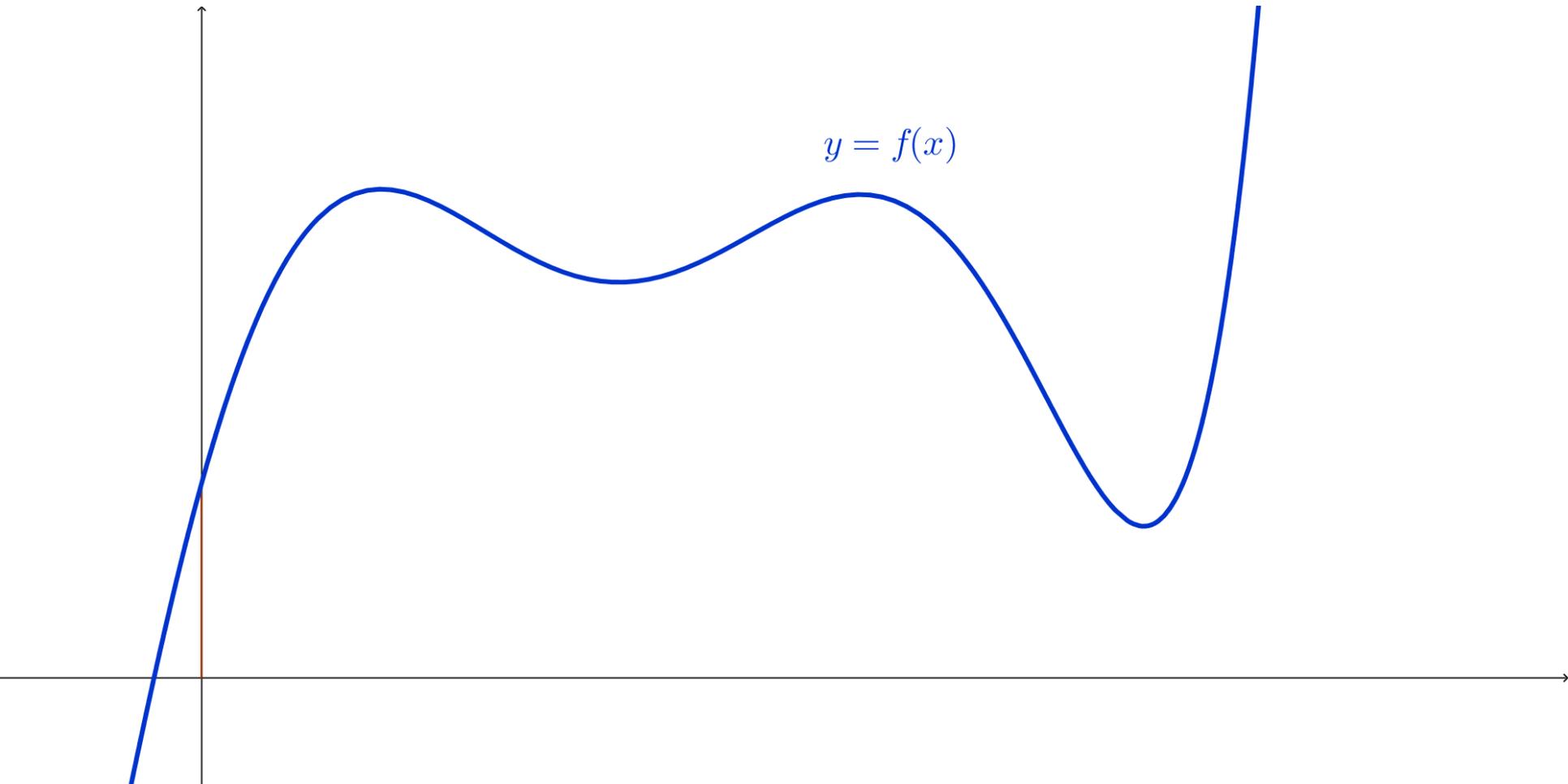


Fazendo $\Delta r \rightarrow 0$,

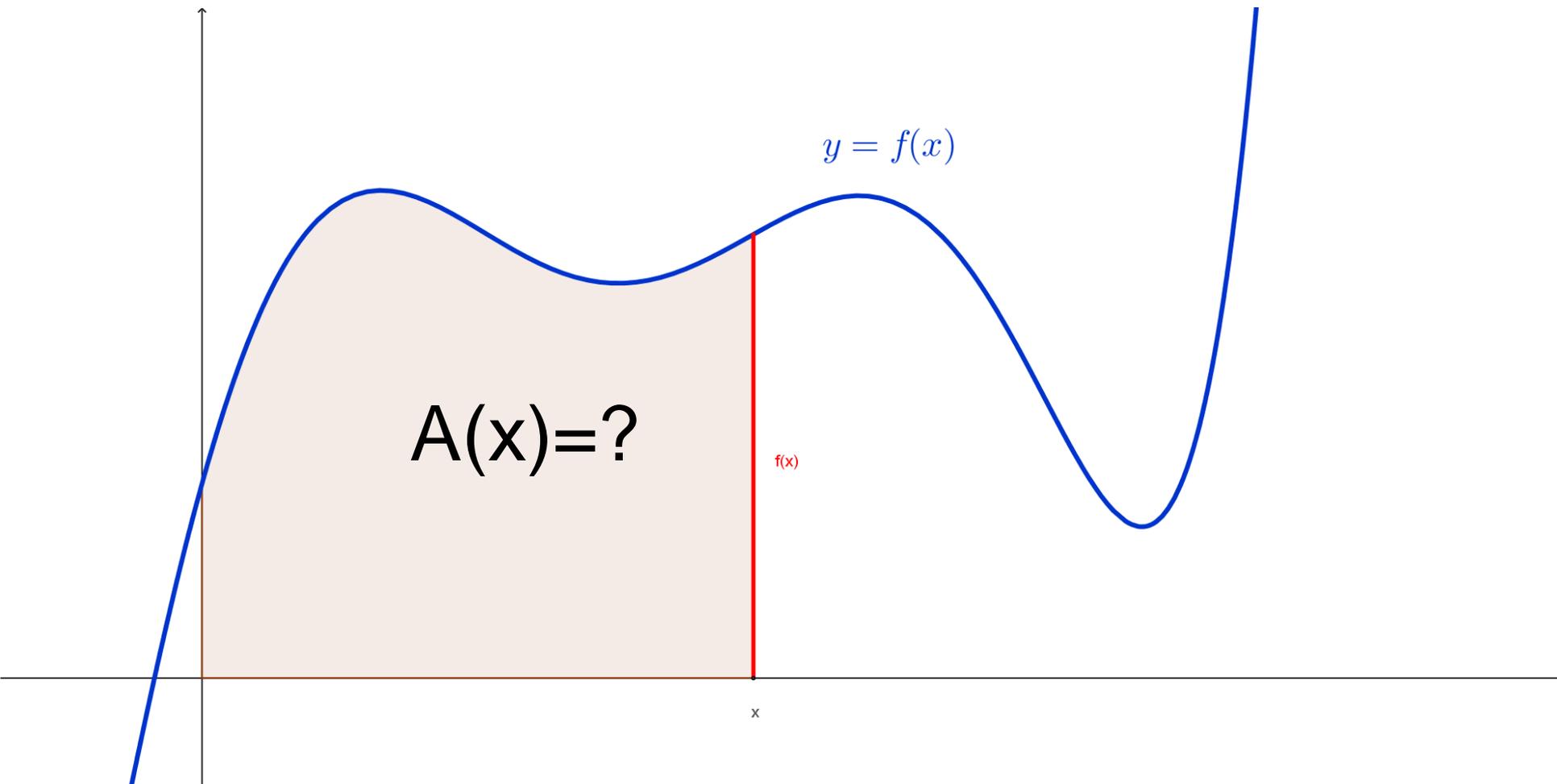
$$\text{temos } \frac{\Delta V}{\Delta r} \rightarrow 4\pi r^2.$$

$$\text{Portanto, } \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2.$$

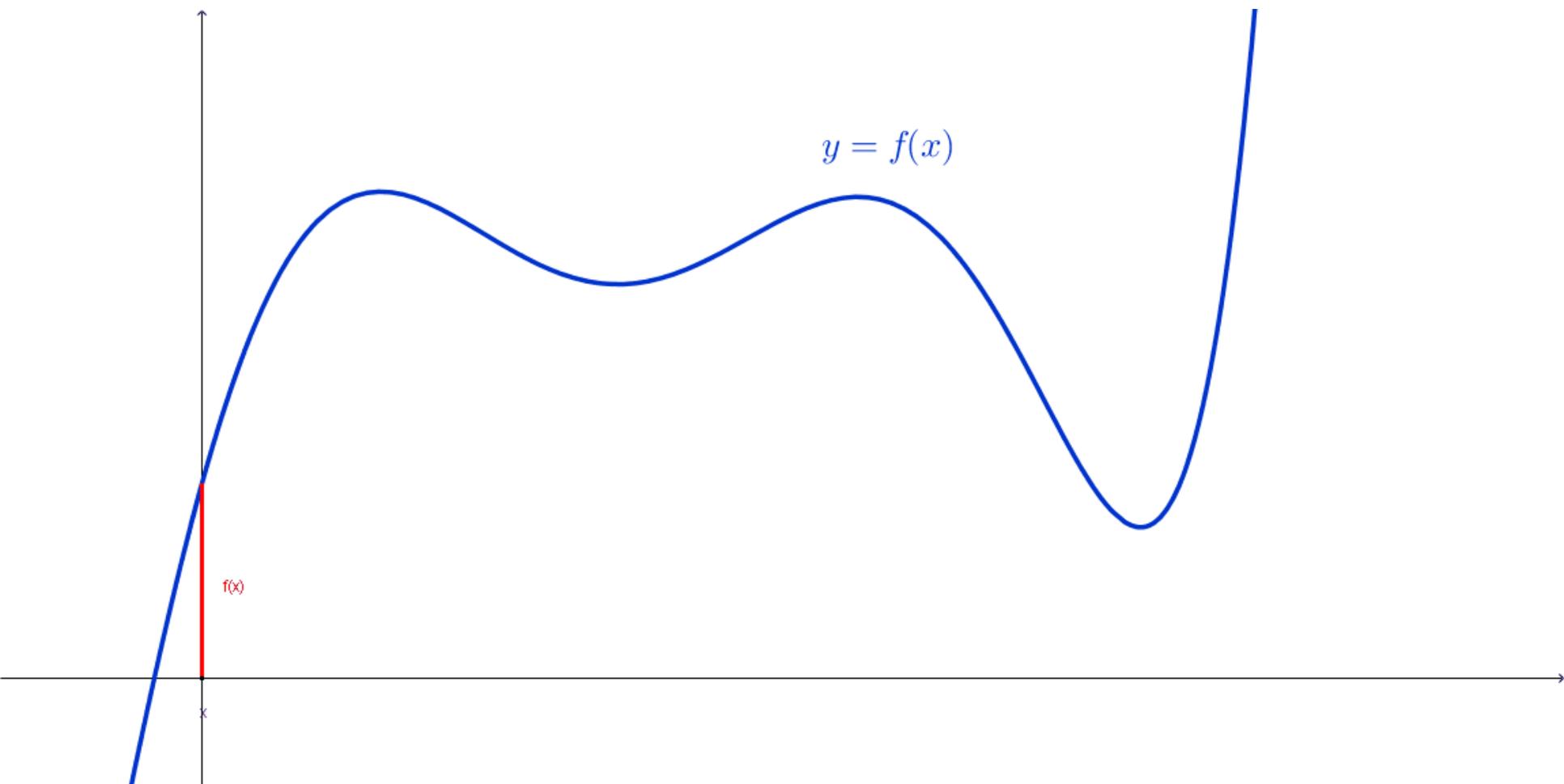
Como varia a área definida sob o gráfico de uma função?



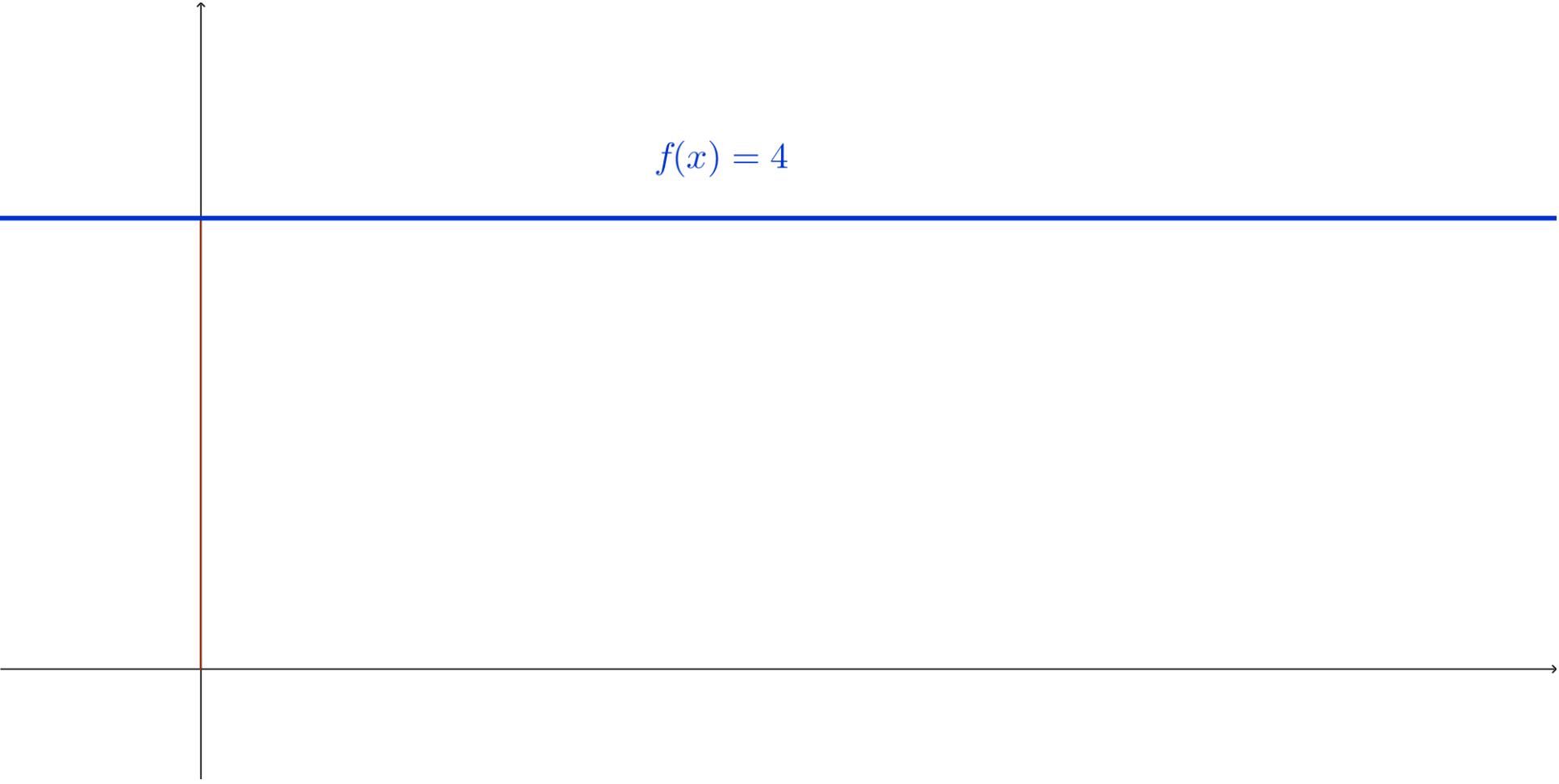
Como varia a área de definida sob o gráfico de uma função?



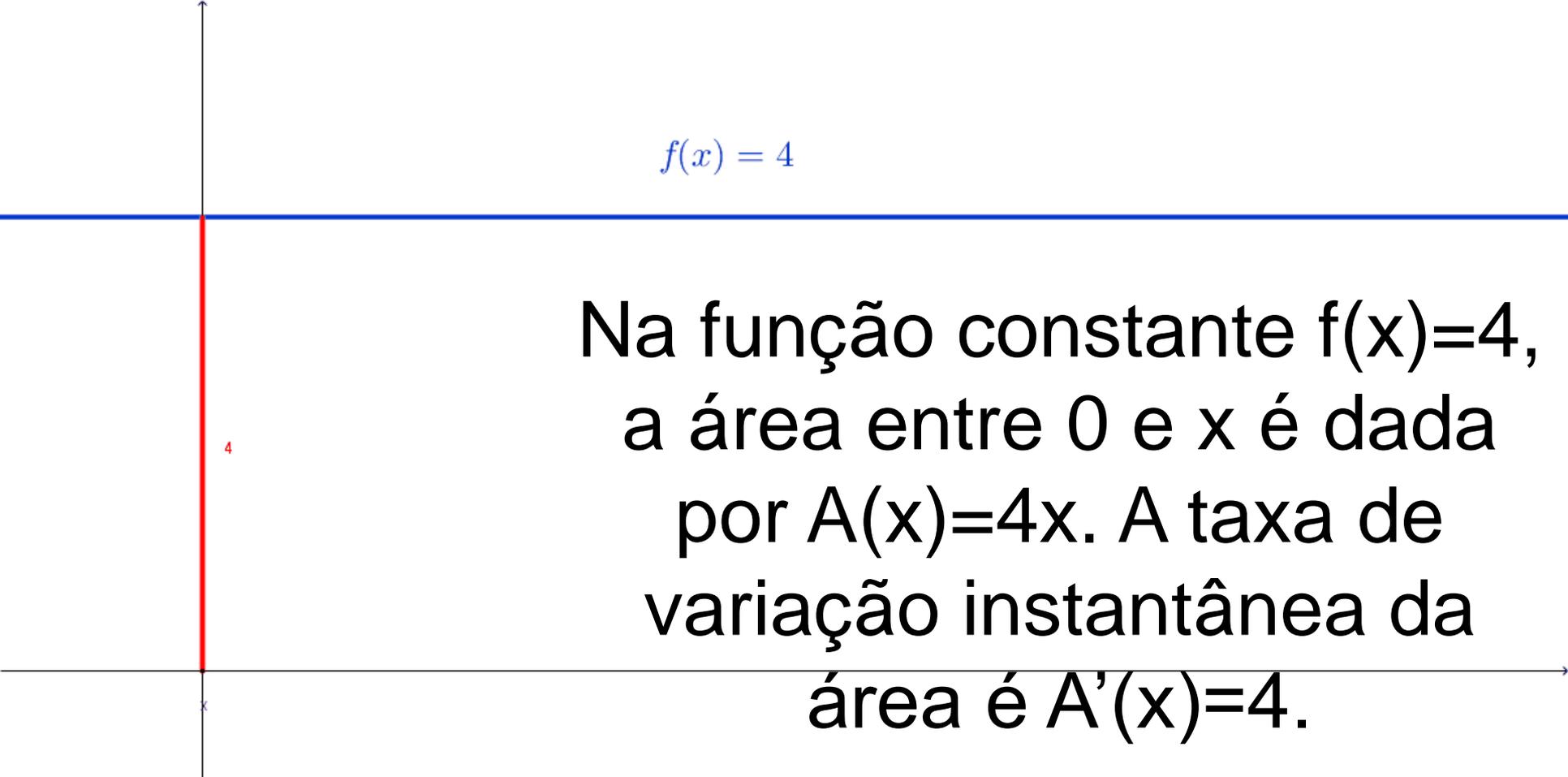
A variação instantânea da área $A(x)$ é
 $A'(x)=f(x)$.



Como varia a área de definida sob o gráfico de uma função?


$$f(x) = 4$$

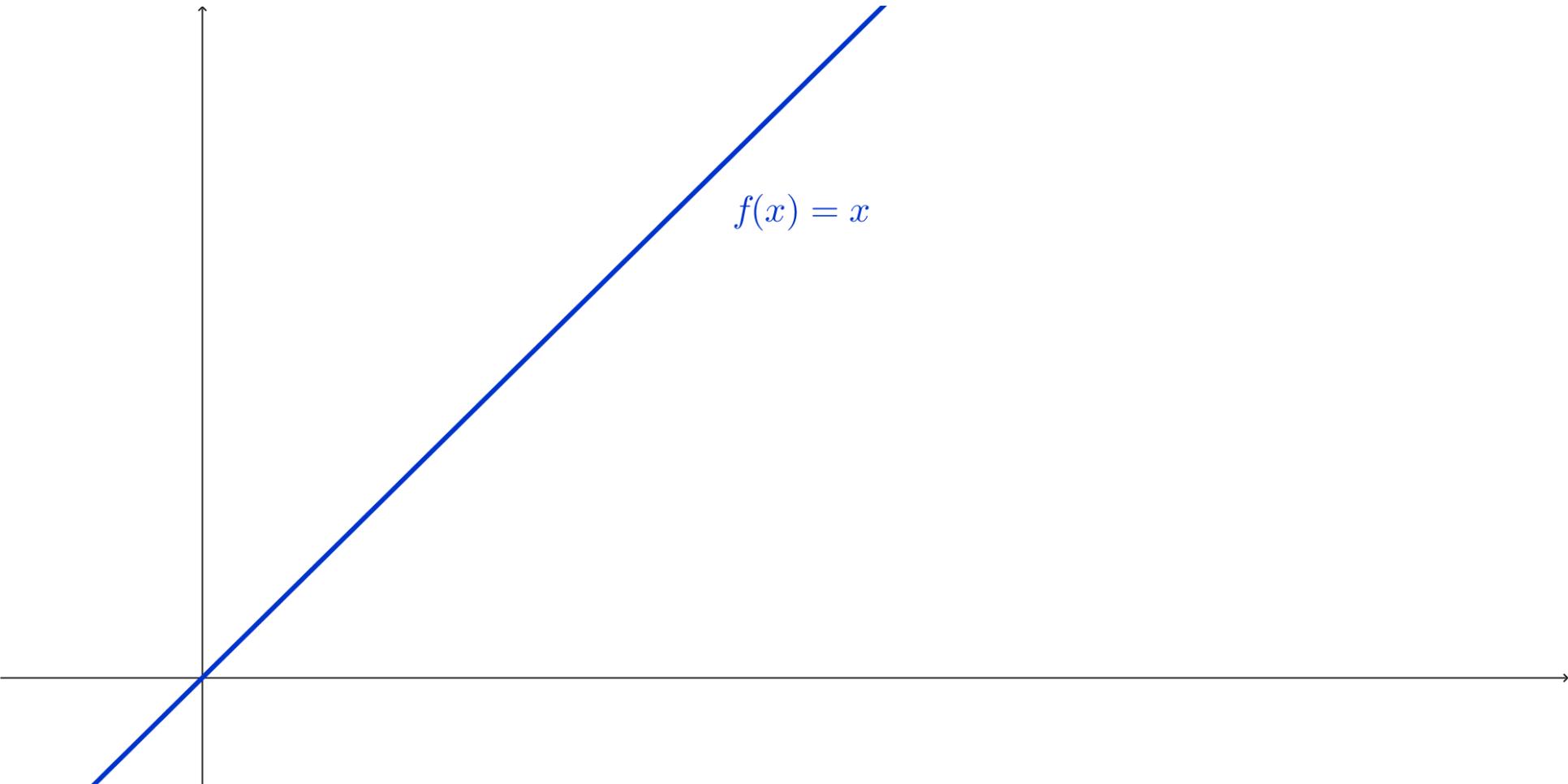
Como varia a área de definida sob o gráfico de uma função?


$$f(x) = 4$$

Na função constante $f(x)=4$, a área entre 0 e x é dada por $A(x)=4x$. A taxa de variação instantânea da área é $A'(x)=4$.

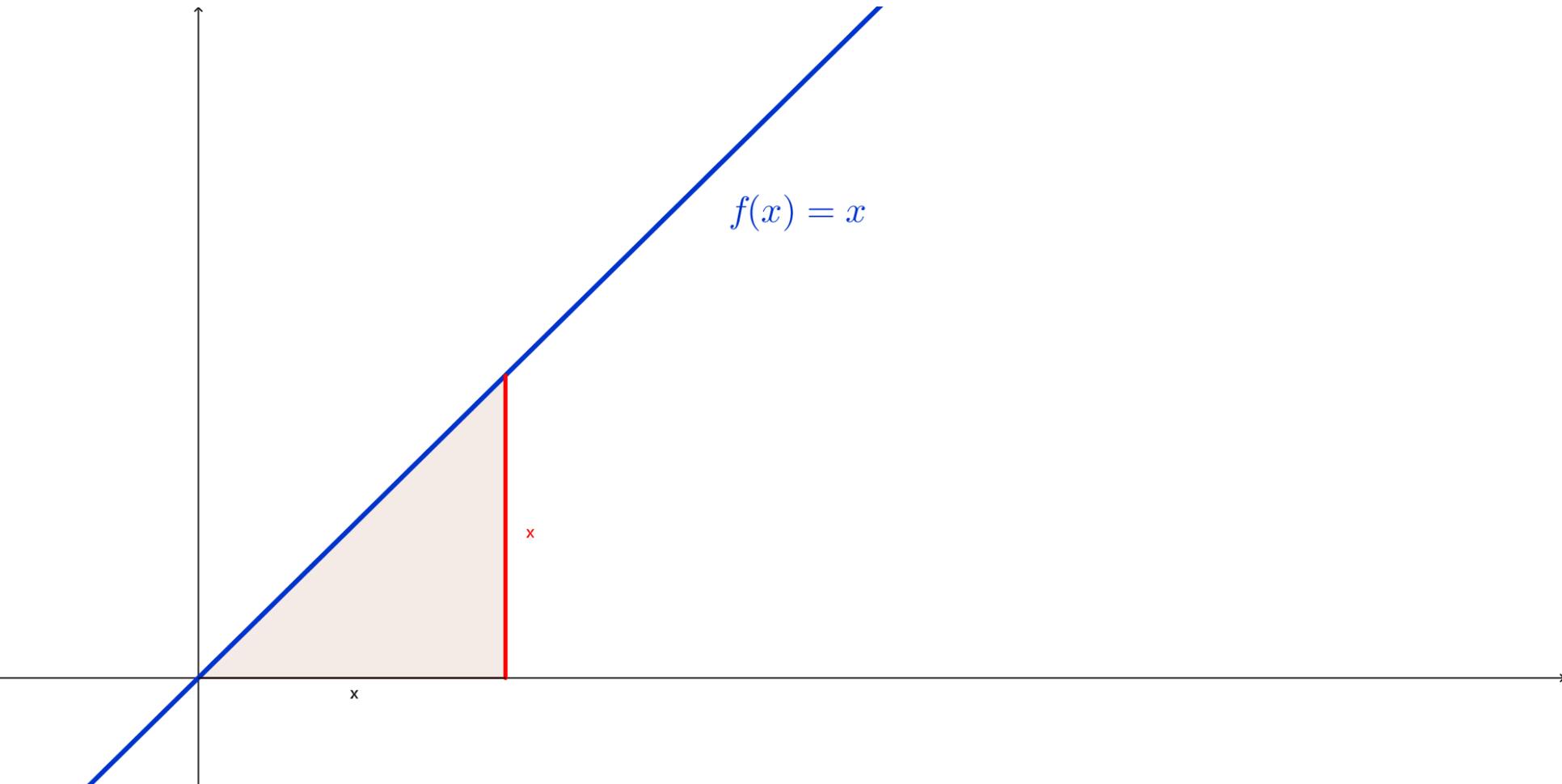
Na função linear $f(x)=x$, a área entre 0 e x

$$\text{é } A(x) = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}.$$



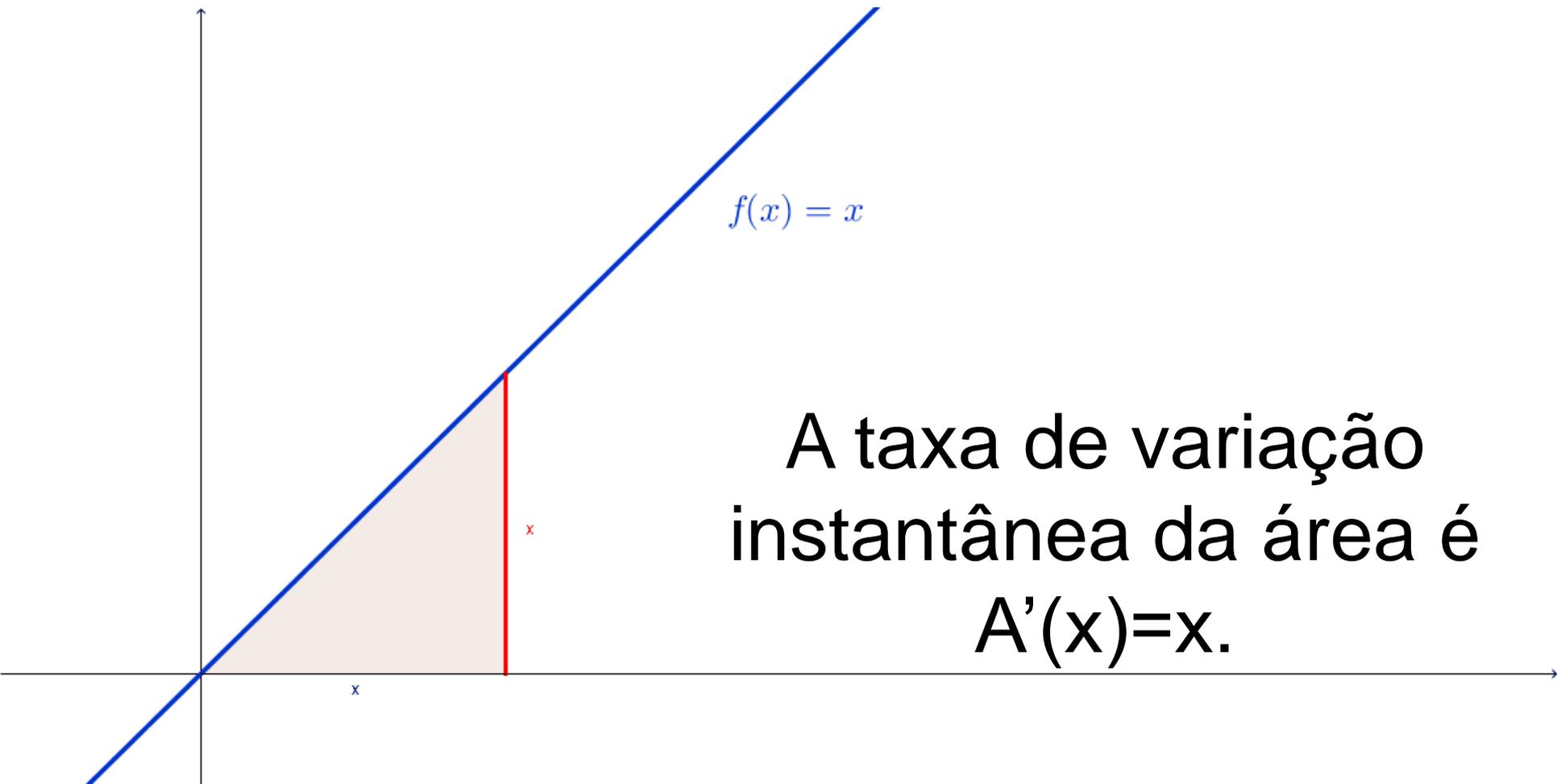
Na função linear $f(x)=x$, a área entre 0 e x

$$\text{é } A(x) = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}.$$



Na função linear $f(x)=x$, a área entre 0 e x

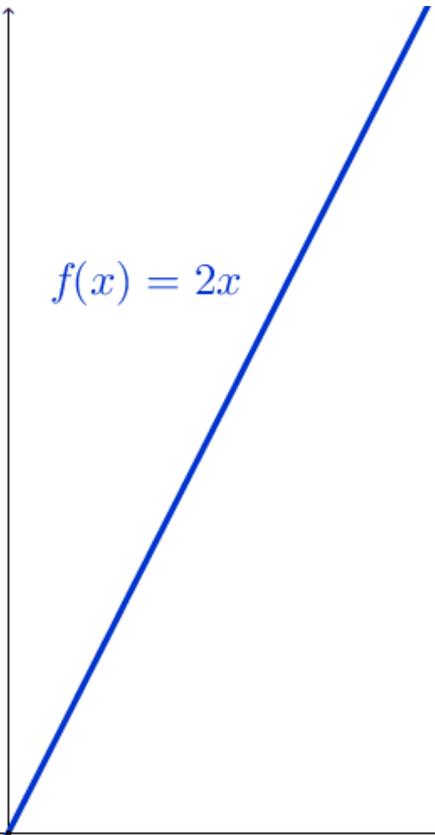
$$\text{é } A(x) = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}.$$



A taxa de variação instantânea da área é $A'(x)=x$.

Na função $f(x)=2x$, a área entre 0 e x é

$$A(x) = \frac{x \cdot 2x}{2} = x^2.$$



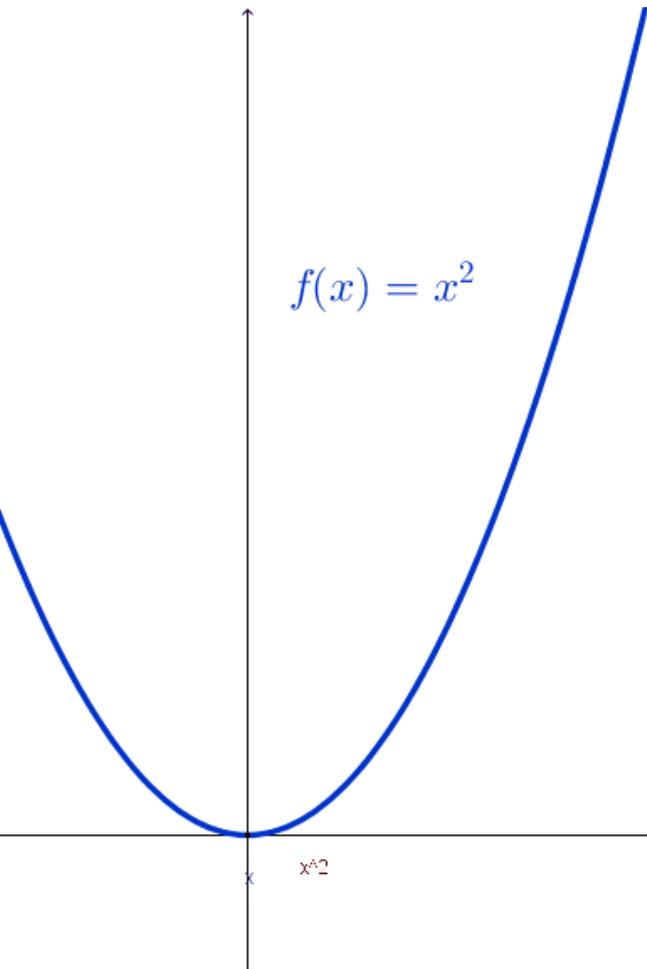
A Cartesian coordinate system with a vertical y-axis and a horizontal x-axis. A blue straight line passes through the origin (0,0) and extends into the first quadrant. The line is labeled with the equation $f(x) = 2x$ in blue text. The x-axis has a tick mark labeled x and the y-axis has a tick mark labeled $2x$.

$$f(x) = 2x$$

A taxa de variação instantânea da área é

$$A'(x)=2x.$$

Na função $f(x) = x^2$, não conhecemos a área entre 0 e x .



Mas conhecemos a taxa de variação instantânea dessa área:

$$A'(x) = x^2.$$

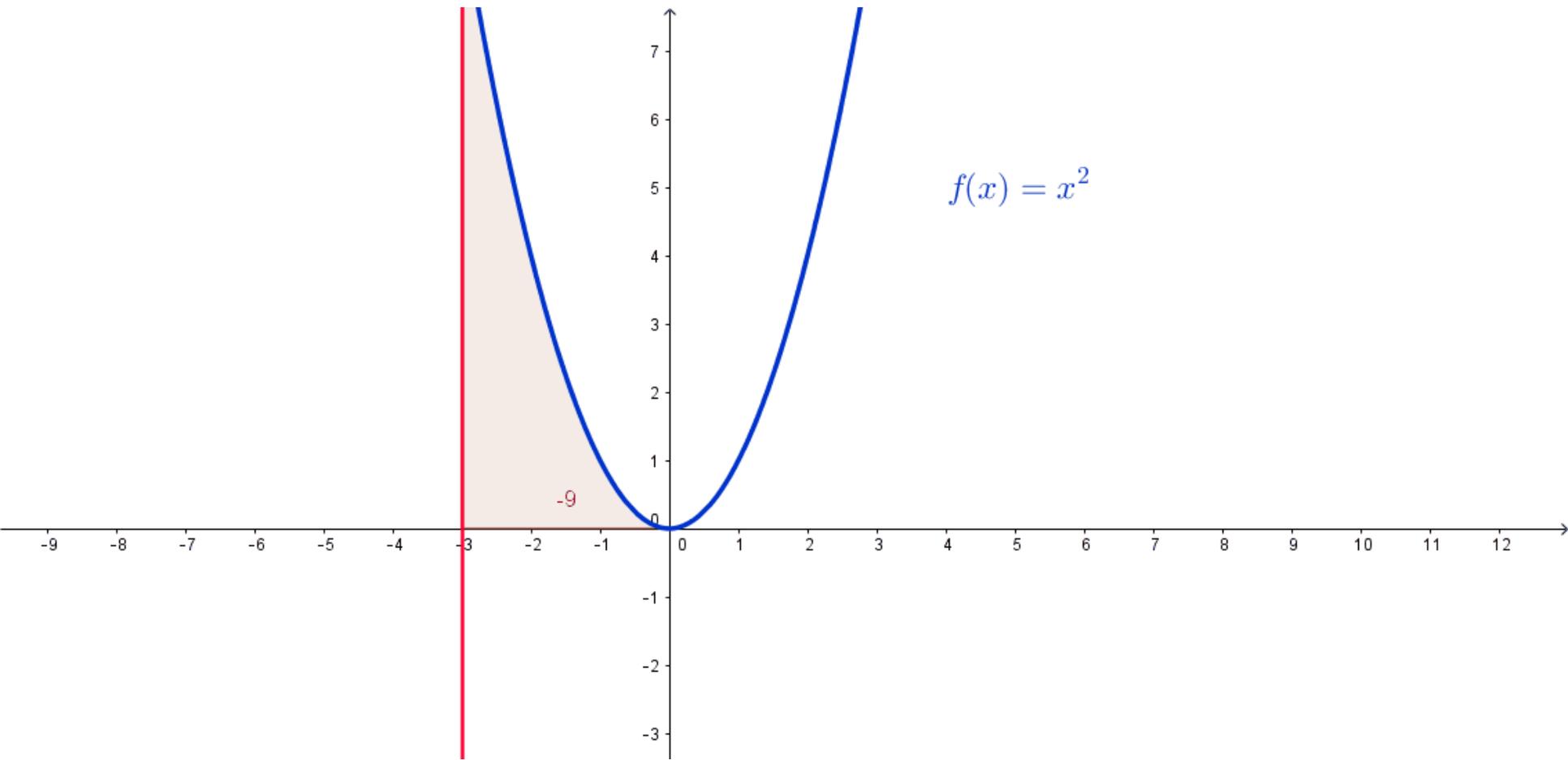
Por volta de 1640, Pierre de Fermat (1601-1665) estabeleceu que a área sob a curva $y = x^n$, entre $x = 0$ e $x = a$, é dada por

$$A = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

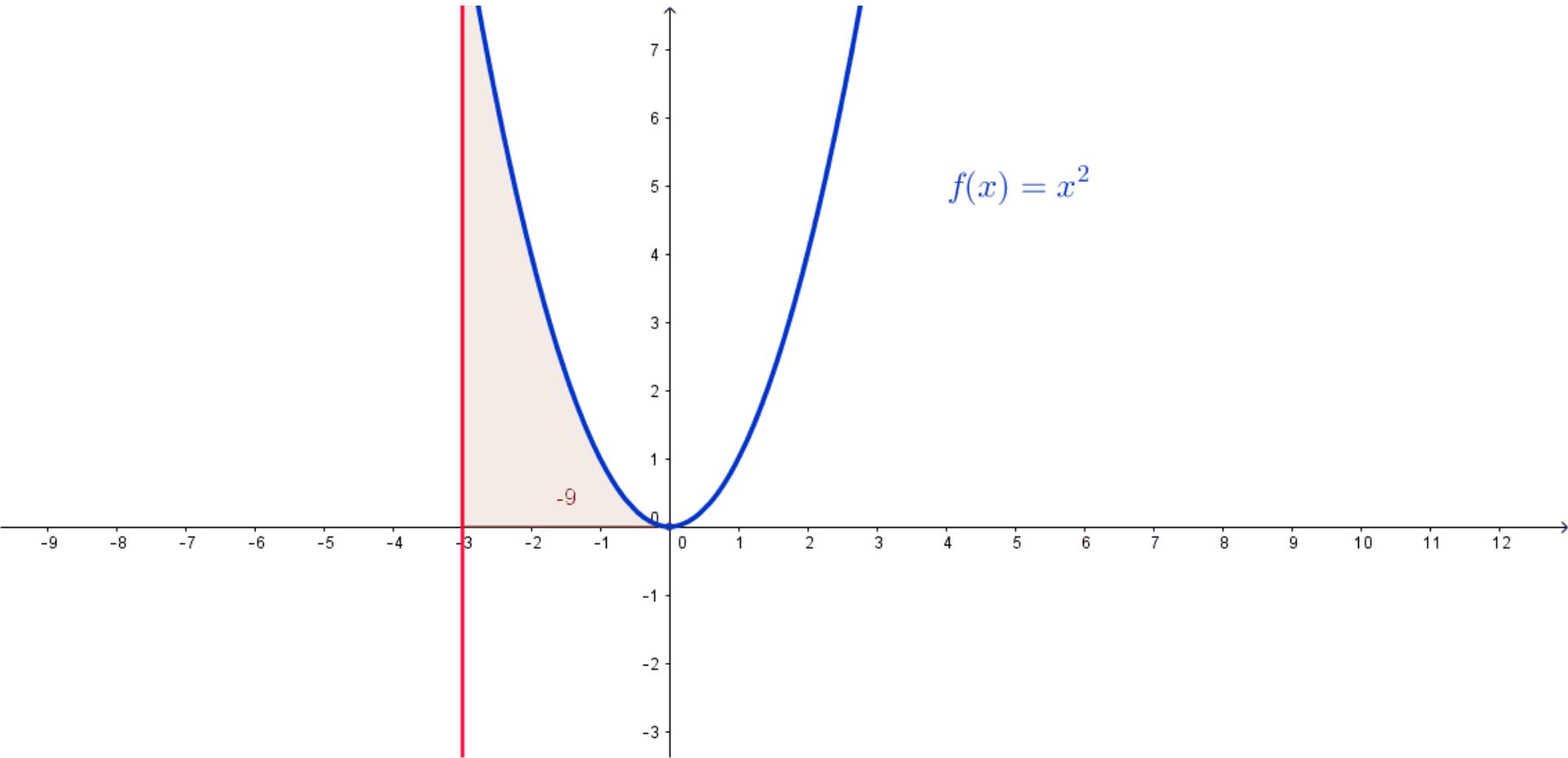
Ou seja, se $y = x^2$, então a função $y = \frac{x^3}{3}$ fornece a área sob a curva entre 0 e x .



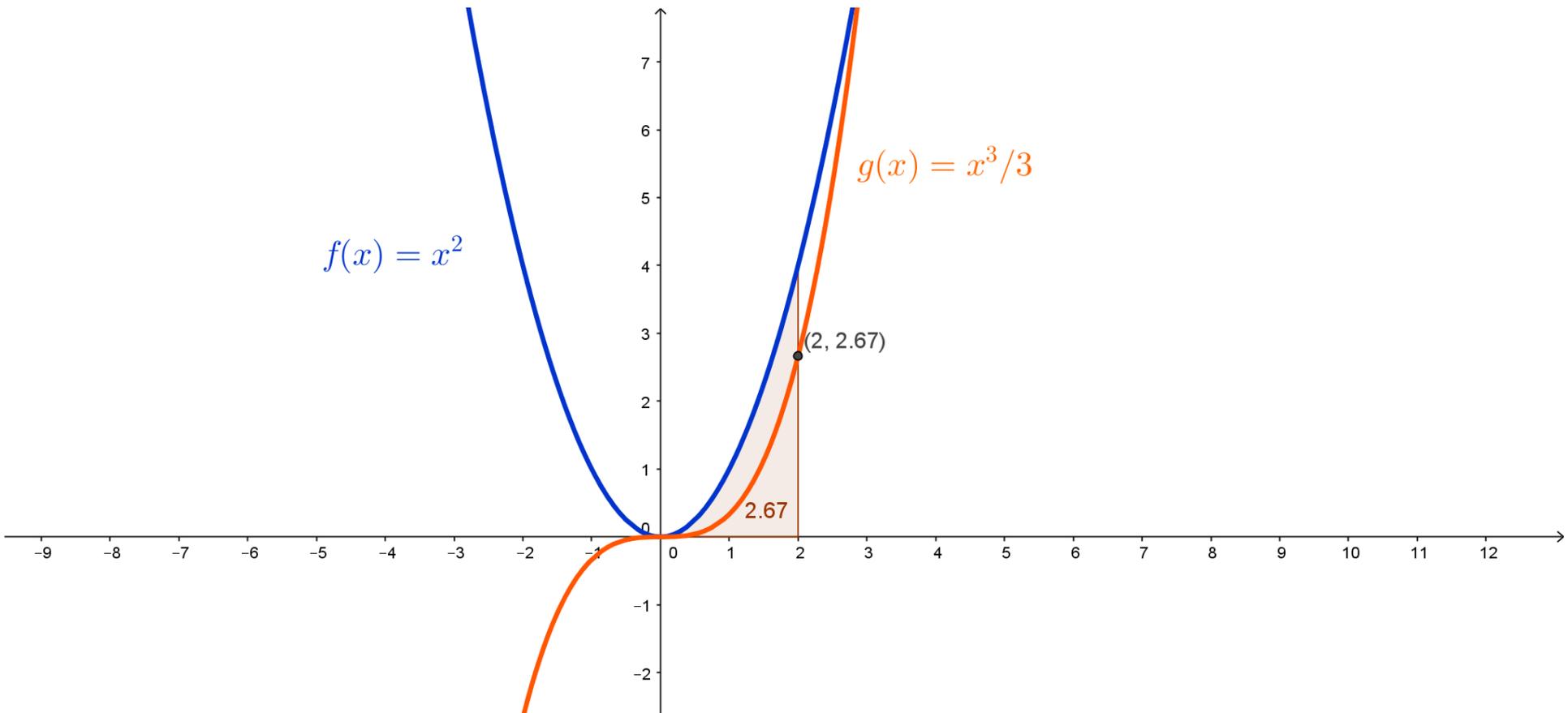
Vamos considerar a função $f(x)=x^2$.



Que função expressa a área sob $f(x)=x^2$?

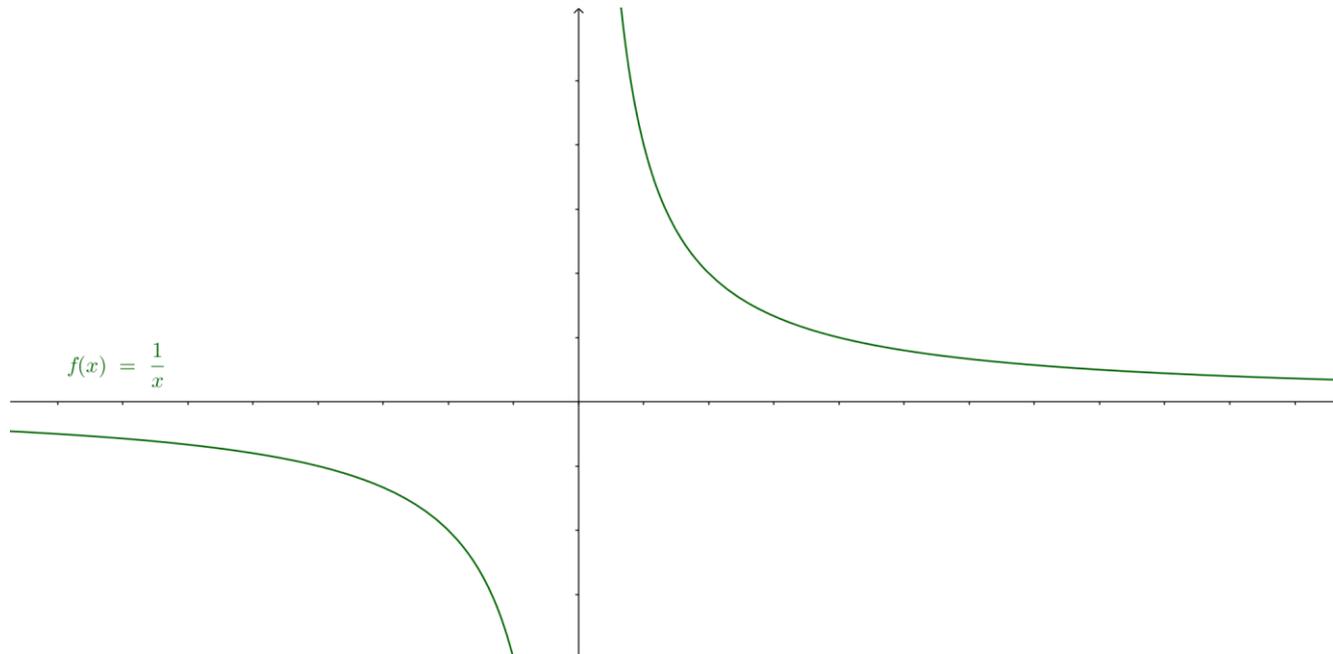


A área sob a curva da função $f(x)=x^2$ pode ser obtida por meio da função $g(x)=x^3/3$.



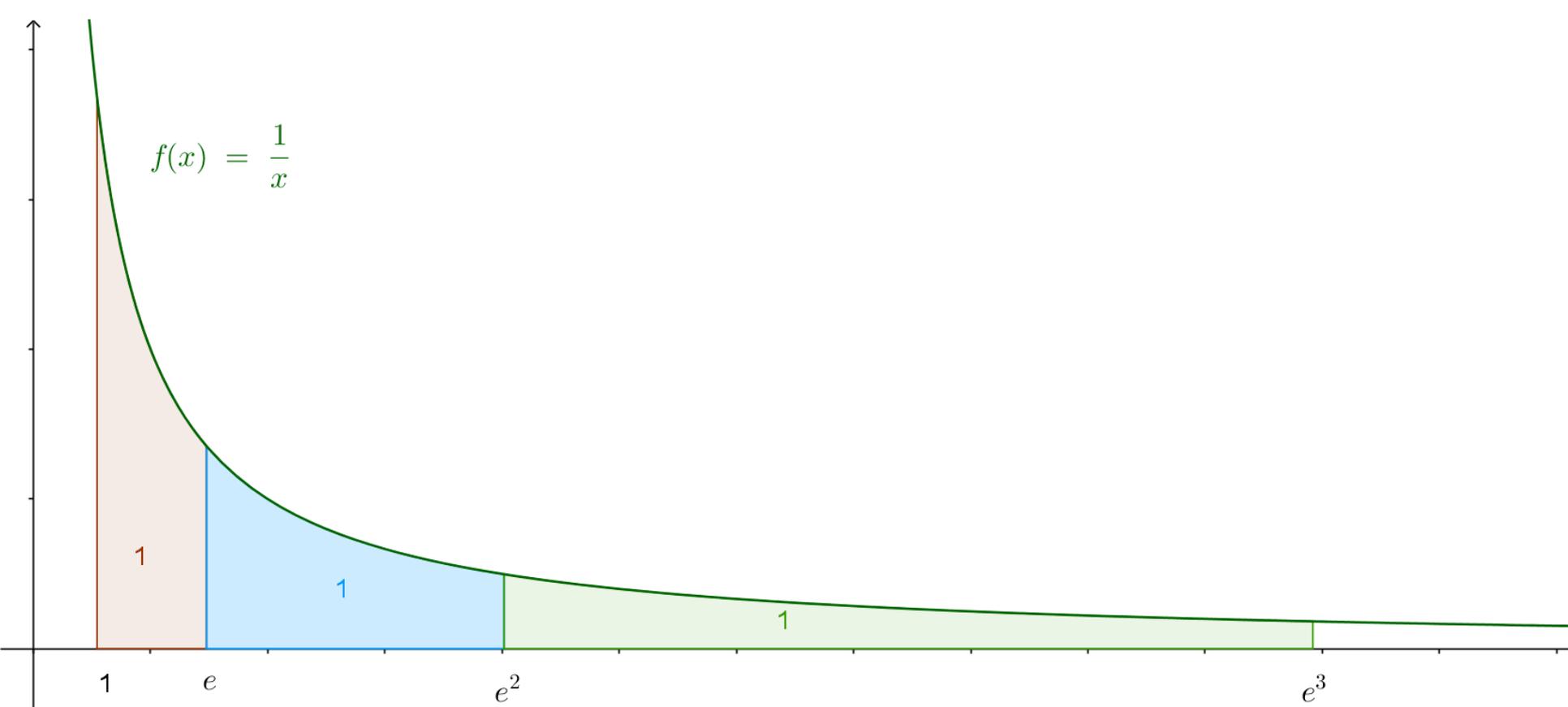
Mas, e se $n = - 1$?

A curva $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, tem como gráfico uma hipérbole. Se fizermos $A = \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{a^0}{0}$ temos uma indeterminação.

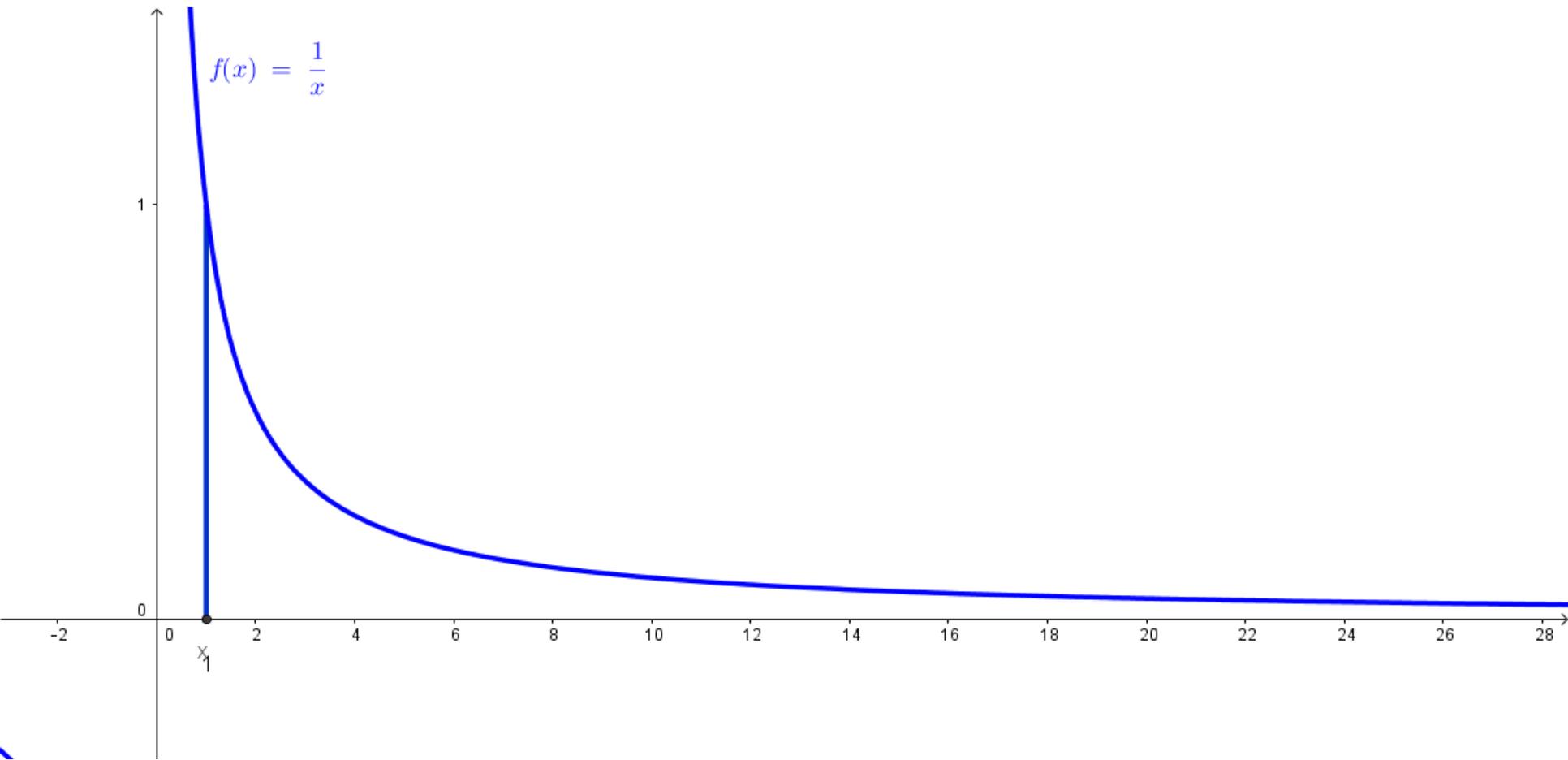


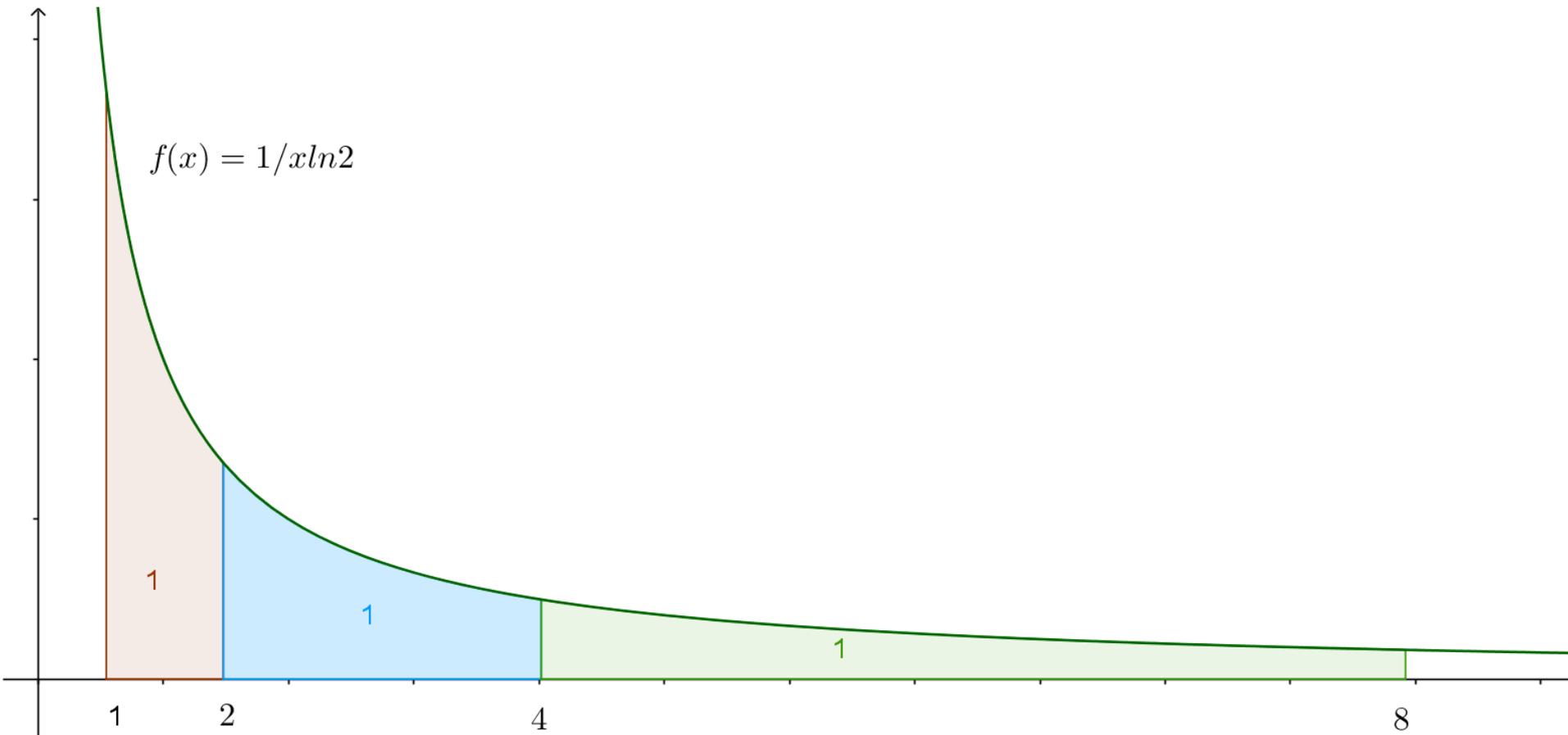
Em 1647, o jesuíta belga
Gregorius de Saint
Vicent (1584-1667),
notou que áreas
correspondentes a
abscissas que formam
uma PG, formam uma
PA.



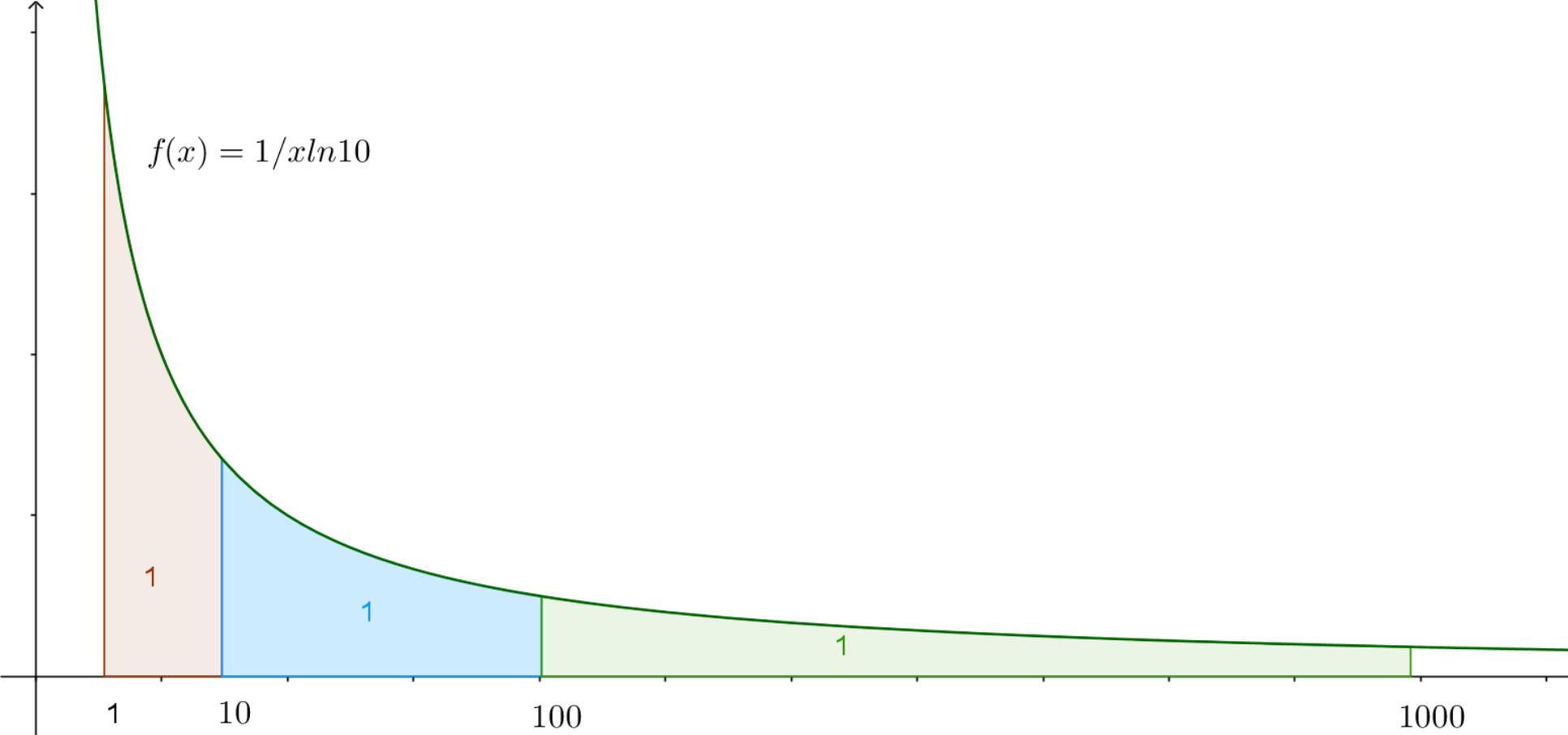


(gráfico fora de escala)





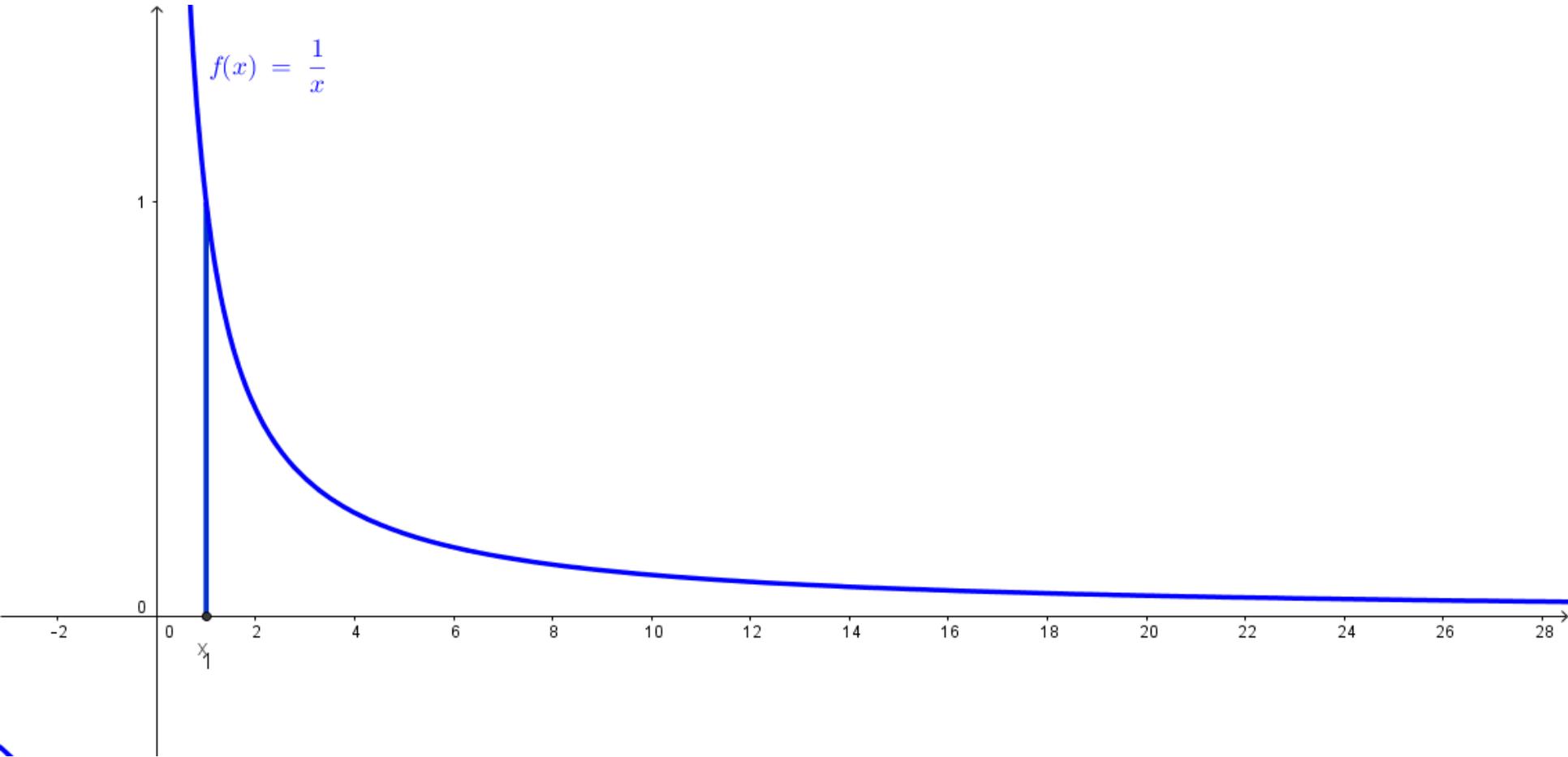
(gráfico fora de escala)



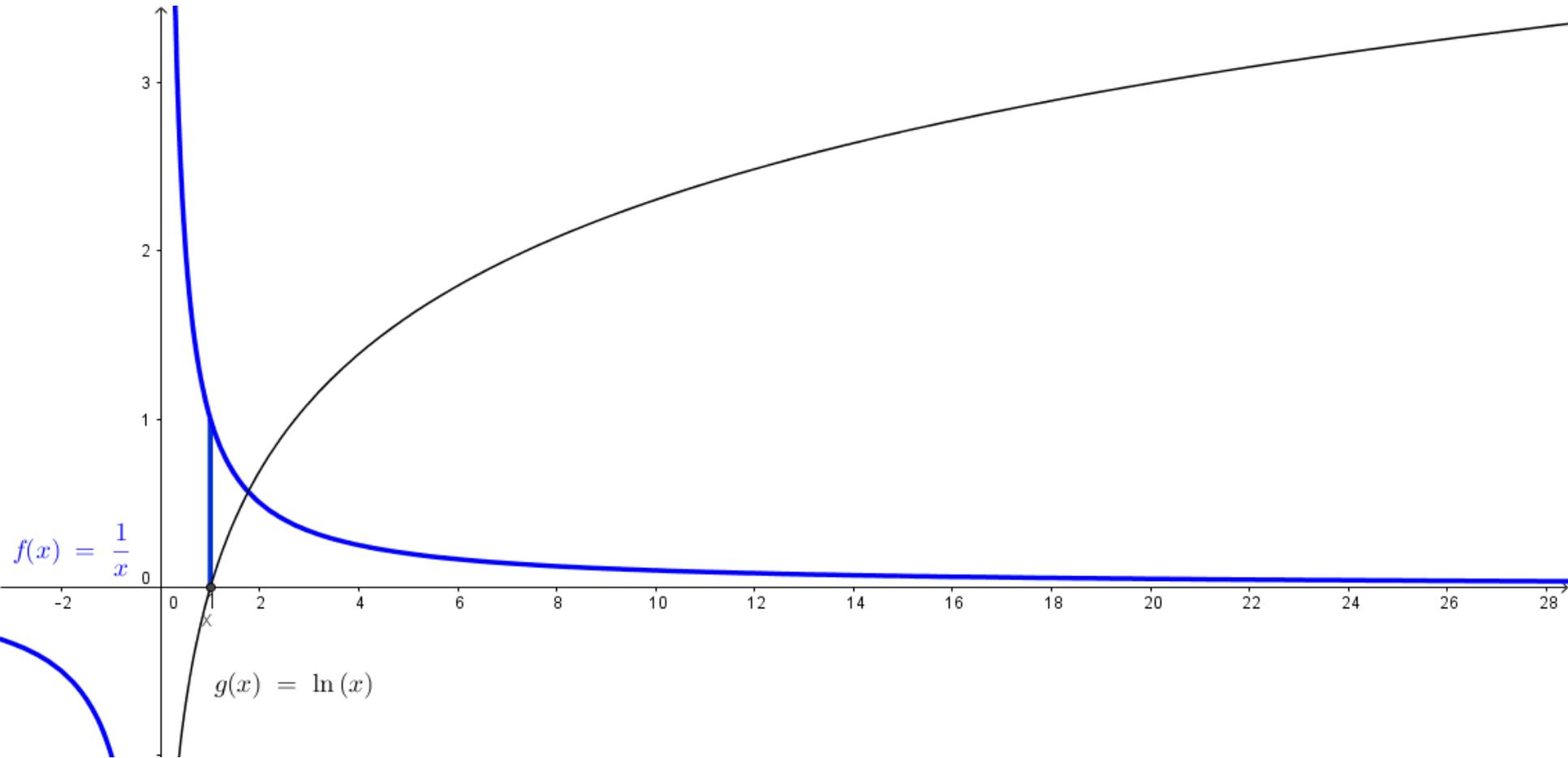
(gráfico fora de escala)

Quem percebeu que havia logaritmos nessa história foi o aluno de Saint Vicent, chamado Alphonse Antonio de Sarasa (1618-1667).

Que função expressa a área sob $f(x)=1/x$,
de 1 a x ?

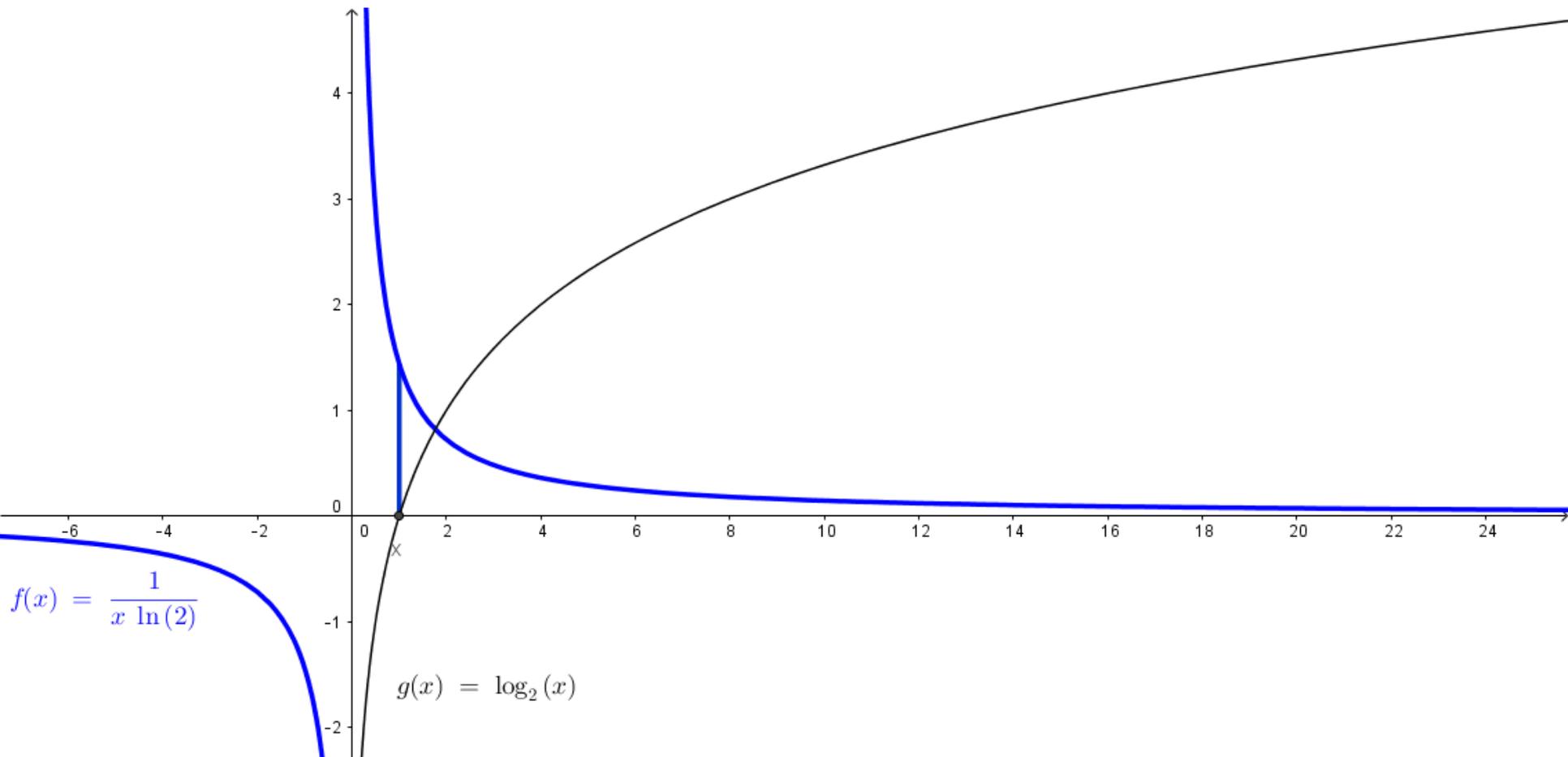


A função área é $A(x) = \ln x$ (logaritmo natural, base e)

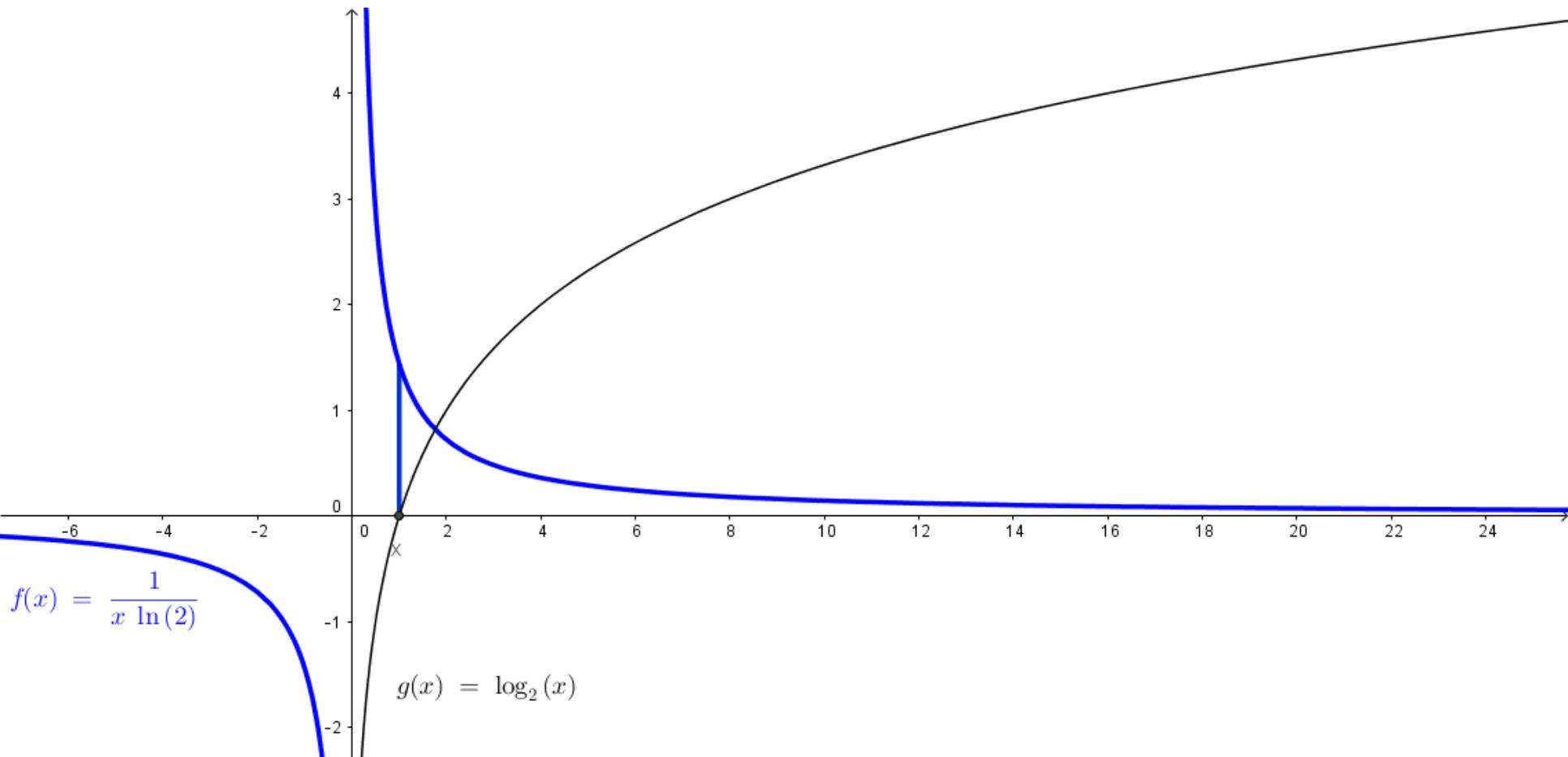


Que função expressa a área sob

$$f(x) = \frac{1}{x \ln 2}, \text{ de } 1 \text{ a } x?$$

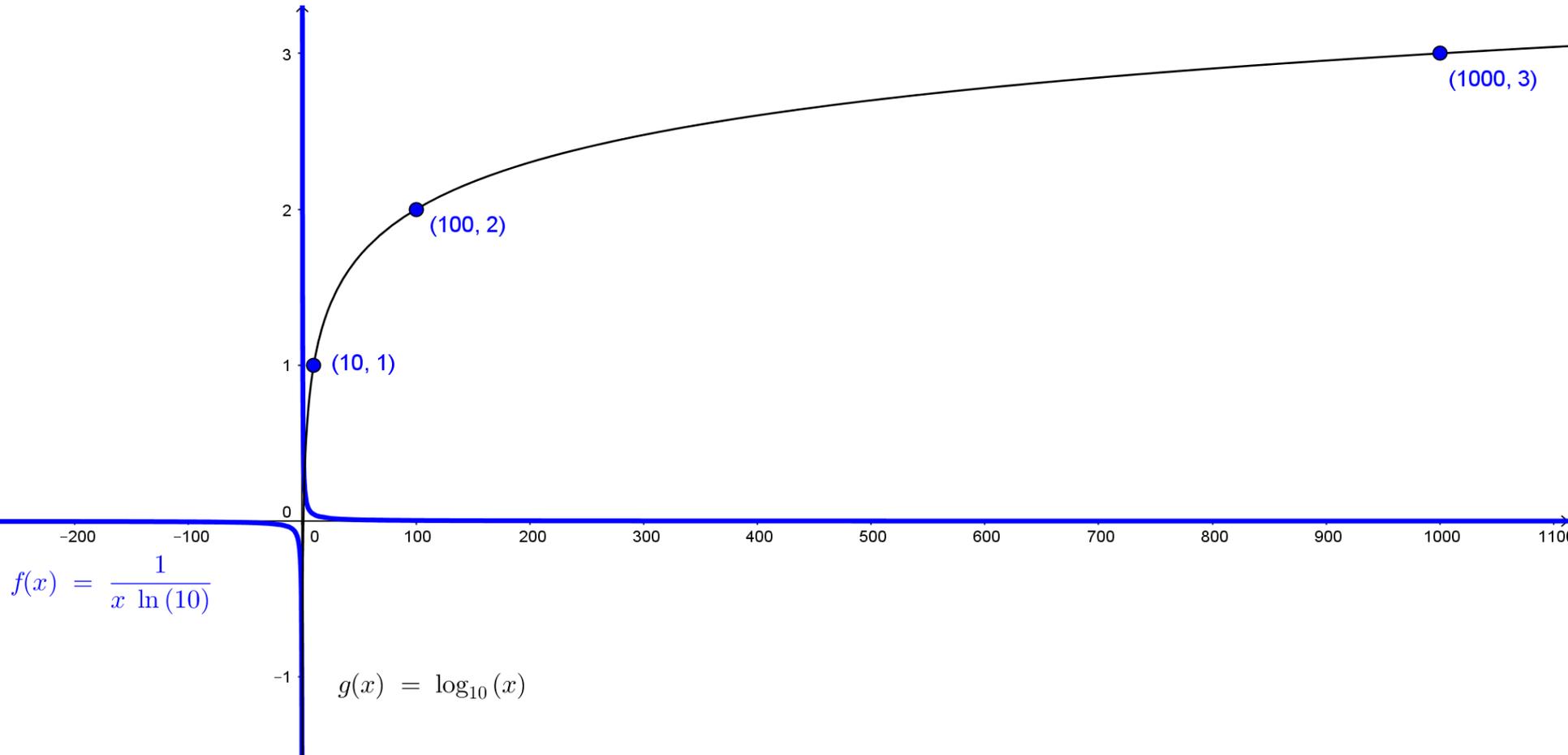


A função área é $A(x) = \log_2 x$
(função logarítmica na base 2)

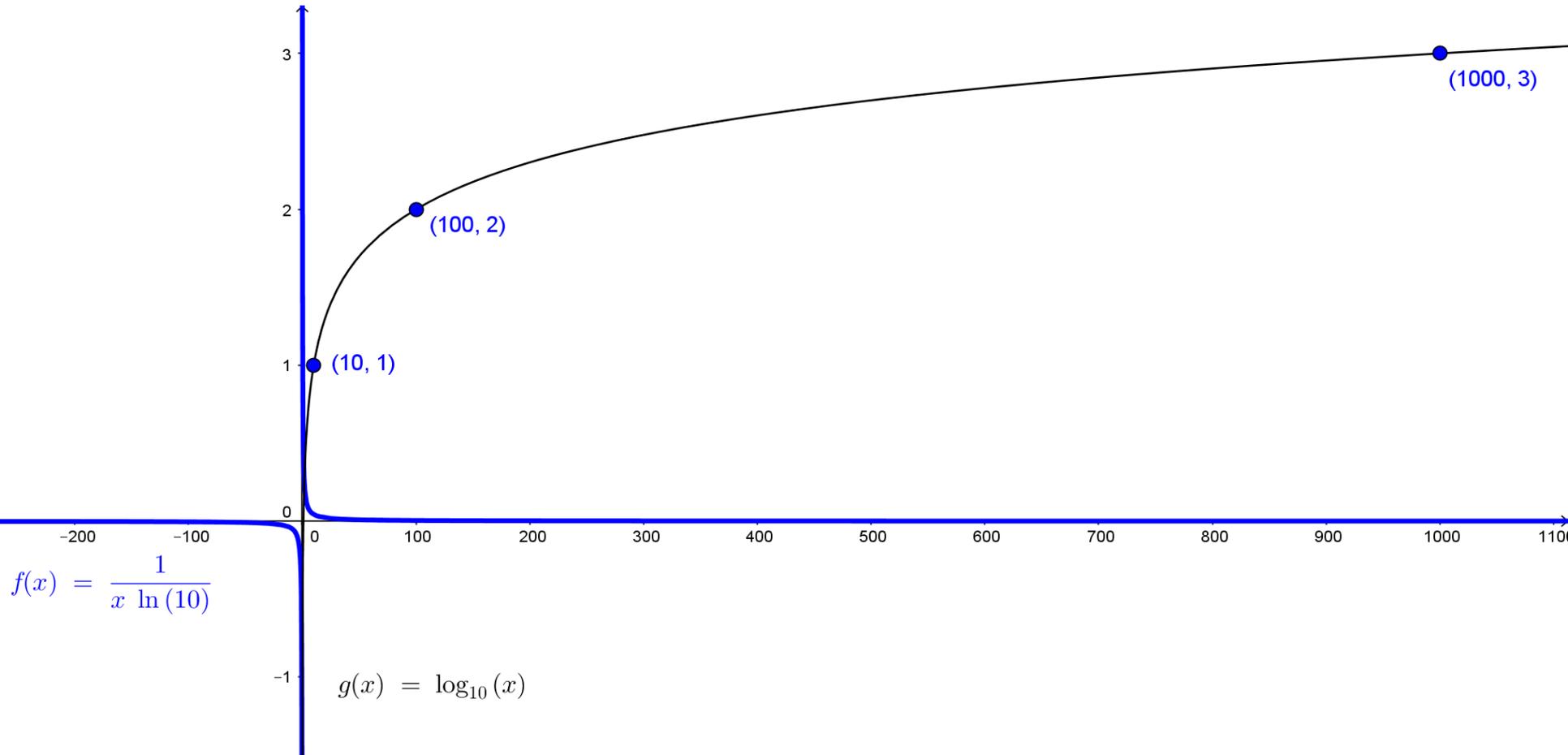


Que função expressa a área sob

$$f(x) = \frac{1}{x \ln 10}, \text{ de } 1 \text{ a } x?$$



A função área é $A(x) = \log_{10} x$
(função logarítmica na base 10)

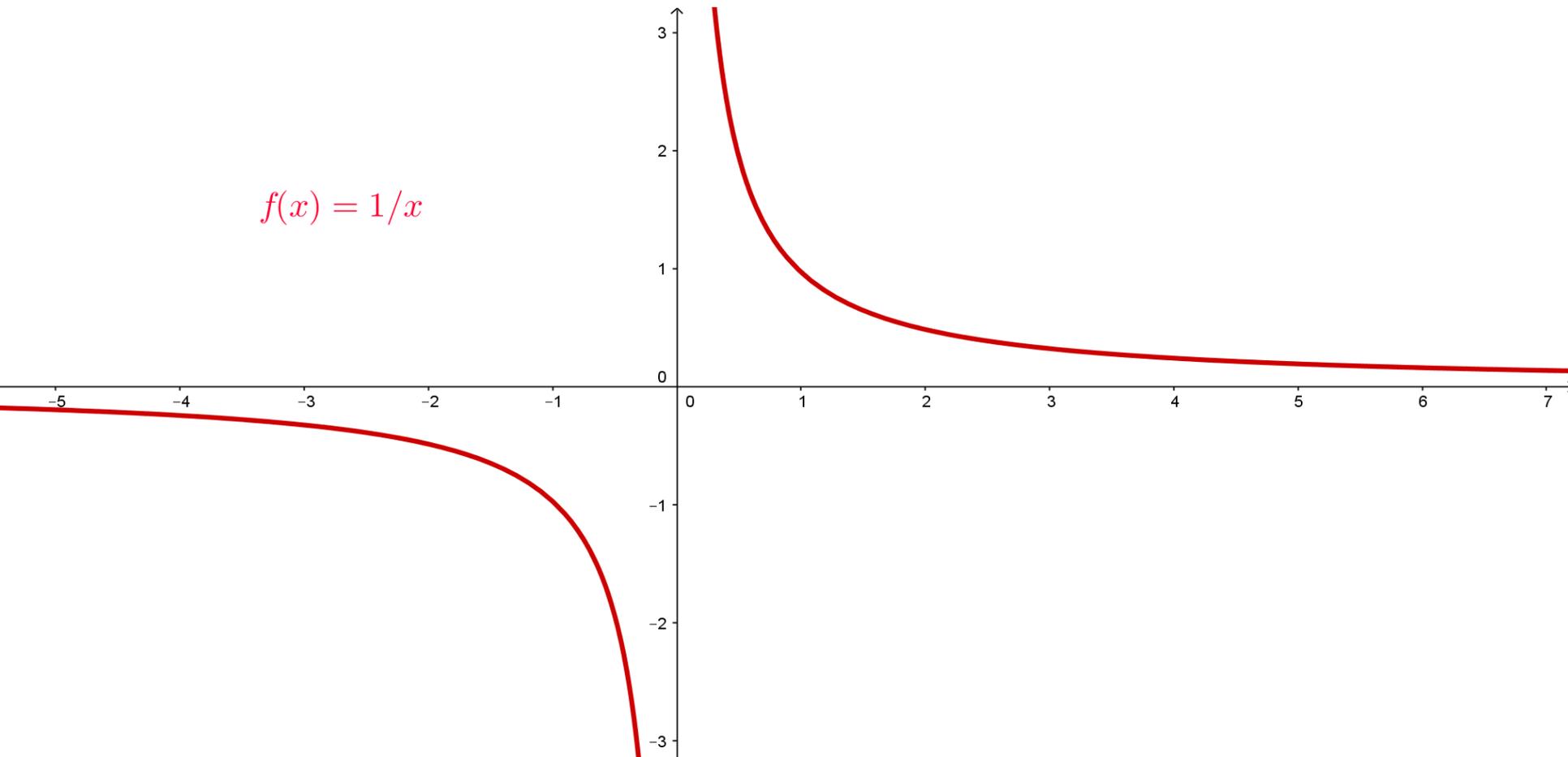


A integral indefinida da função

$f(x) = \frac{1}{x \ln a}$, com $a > 0$, $a \neq 1$, é a função

$$g(x) = \log_a |x|$$

(função logarítmica na base a do módulo de x)

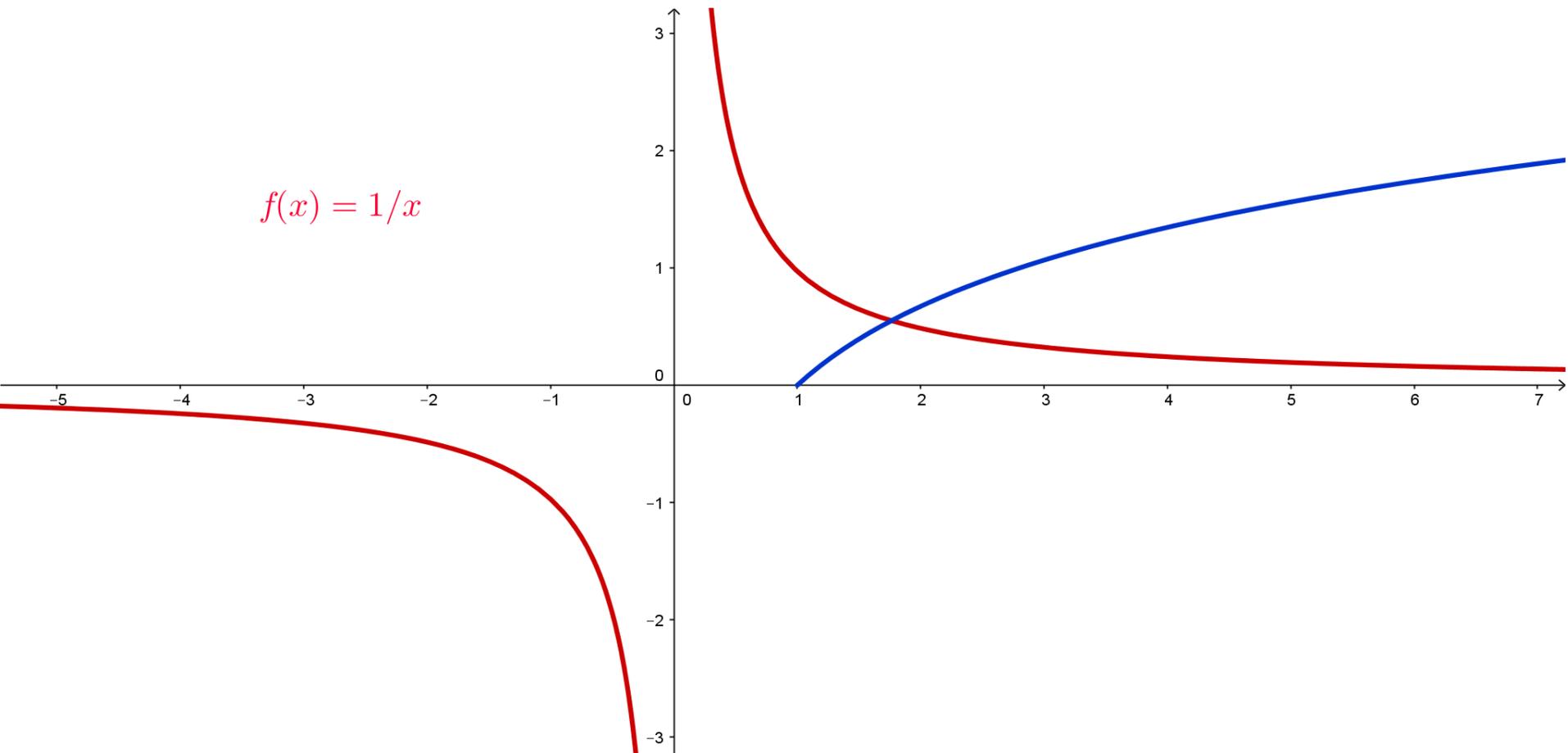


A integral indefinida da função

$f(x) = \frac{1}{x \ln a}$, com $a > 0$, $a \neq 1$, é a função

$$g(x) = \log_a |x|$$

(função logarítmica na base a do módulo de x)

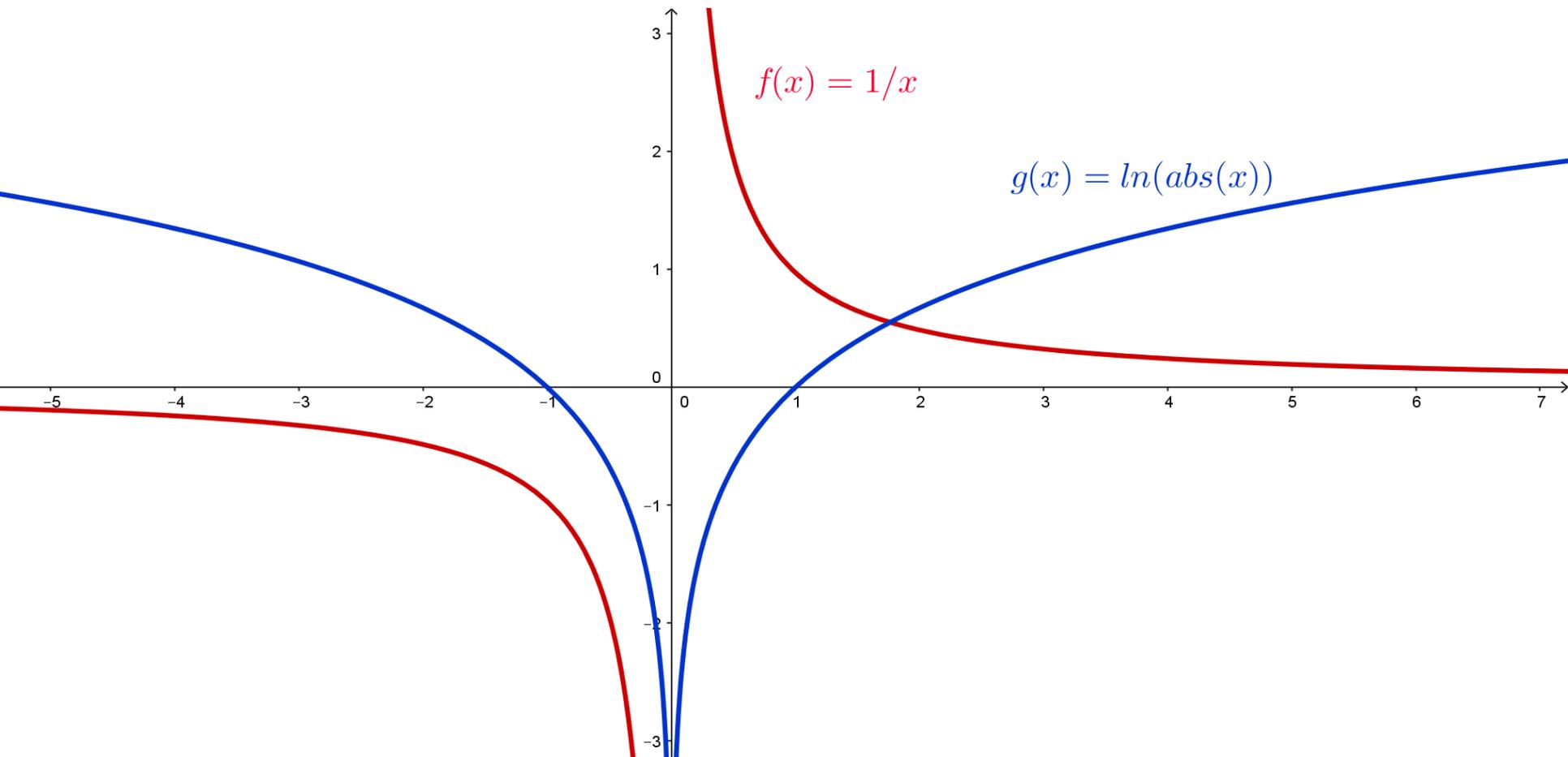


A integral indefinida da função

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ é a função}$$

$$g(x) = \ln|x|$$

(função logarítmica natural, base e)

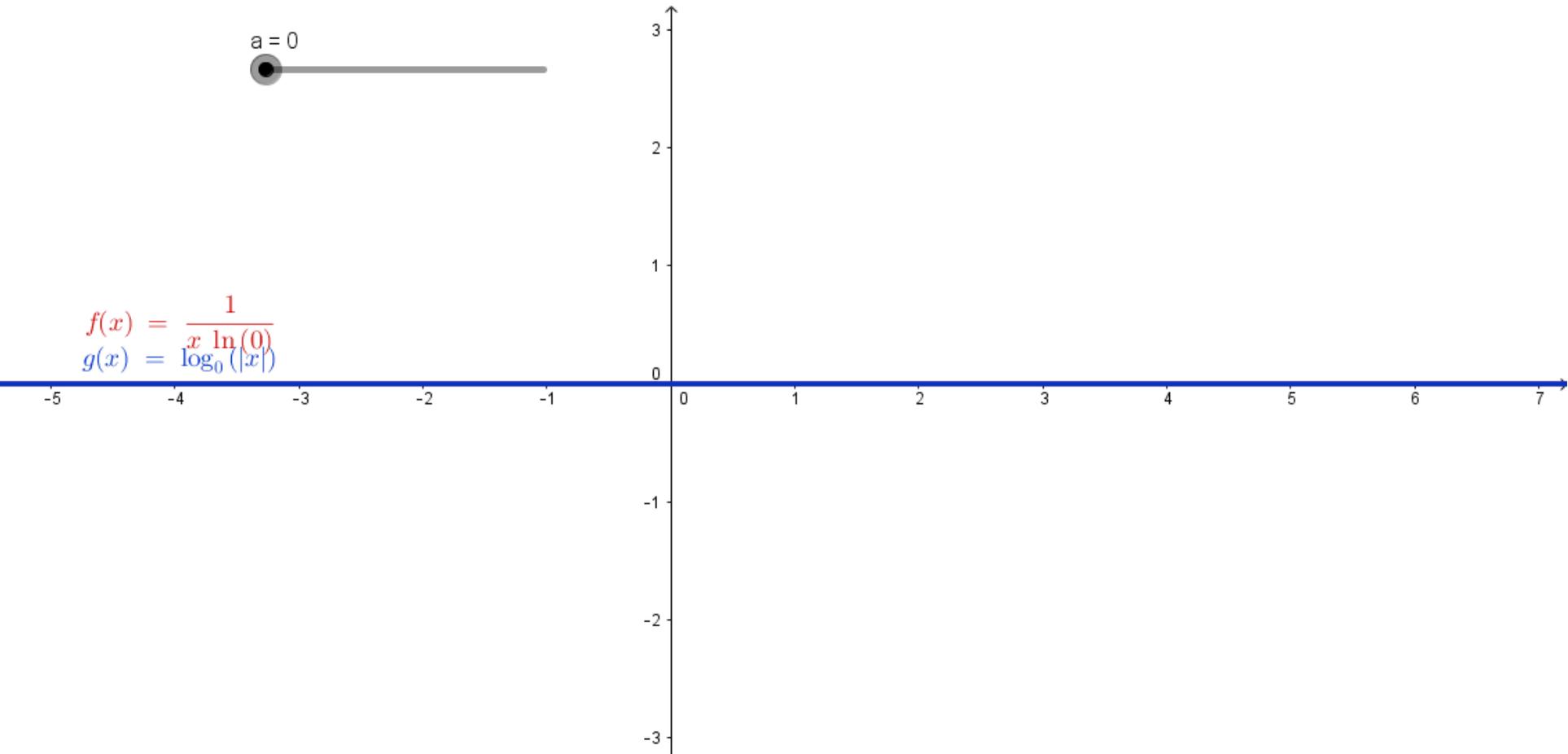


A integral indefinida da função

$$f(x) = \frac{1}{x \ln a}, \text{ com } a > 0, a \neq 1, \text{ é a função}$$

$$g(x) = \log_a |x|$$

(função logarítmica na base a do módulo de x)



Nossa sensibilidade é afetada de modo logaritmico. Ou seja, percebemos variações de grandezas que nos afetam não de modo linear, mas de modo exponencial.

Por exemplo, nosso ouvido percebe uma mudança de pressão que indica um aumento considerável de sons, quando este passa a uma próxima potência de 10.



Quando a pressão sonora passa de uma potência de 10 a outra, a escala de decibéis assinala uma mudança linear, mais fácil de acompanhar.



Quando a pressão sonora passa de uma potência de 10 a outra, a escala de decibeis assinala uma mudança linear, mais fácil de acompanhar.



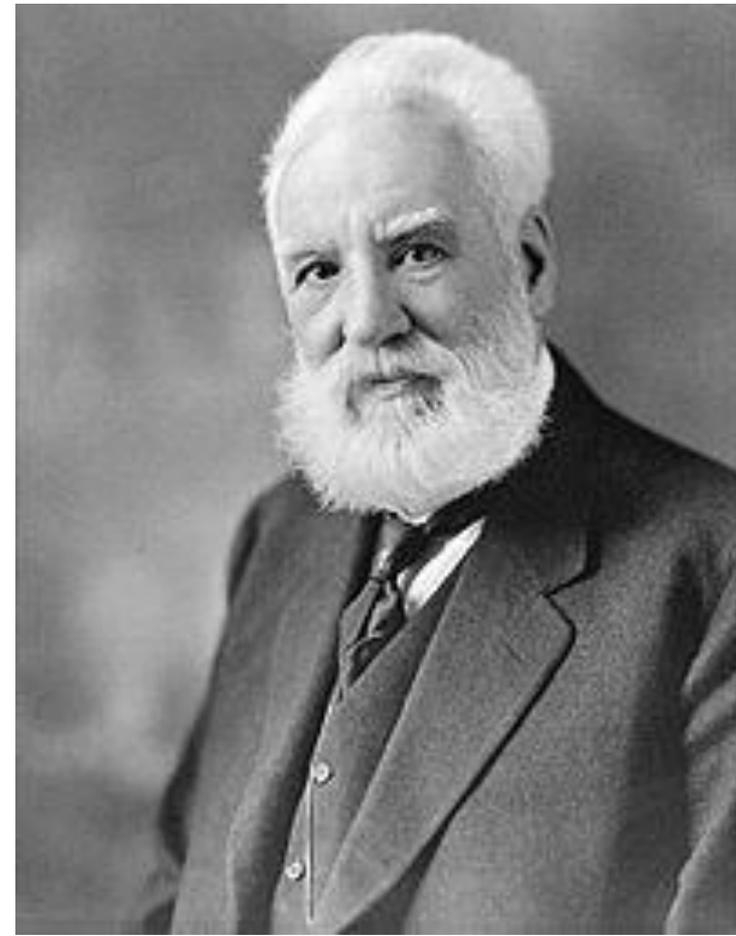
Decibel e Escala Logarítmica

Decibel é a razão logarítmica entre duas potências ou intensidades e é dado pela expressão:

$$P_{dB} = 10 \times \log_{10} (P_x/P_y)$$

ou

$$I_{dB} = 10 \times \log_{10} (I_x/I_y)$$



Alexander Graham Bell (1847 — 1922).

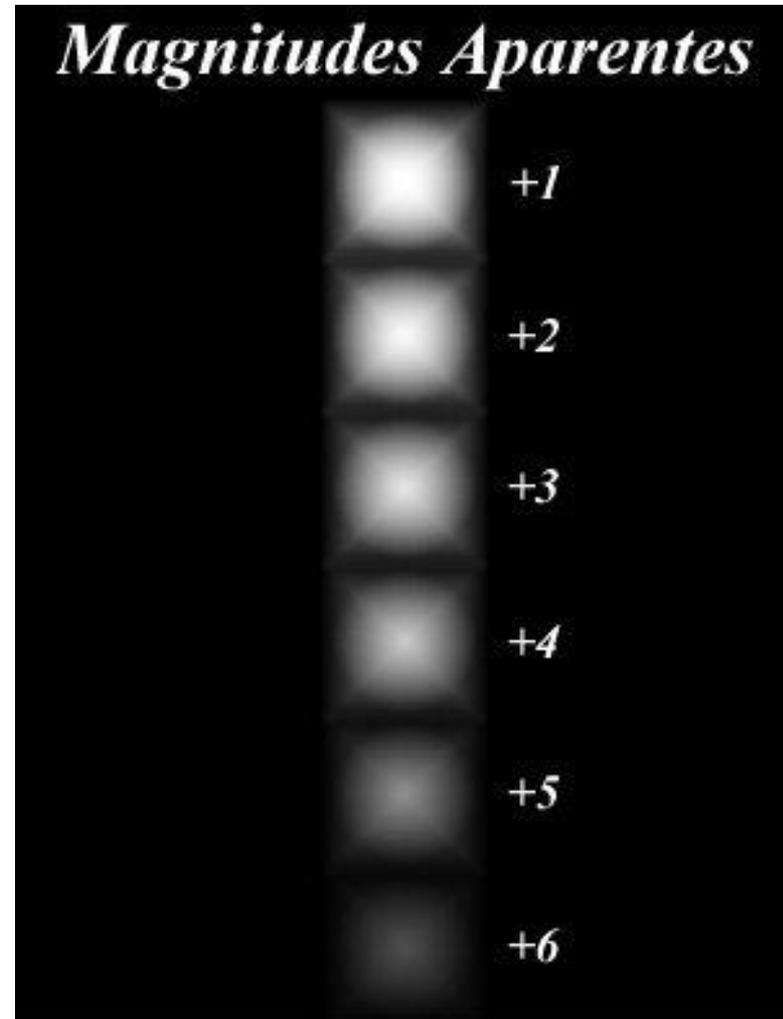
Magnitude aparente das estrelas

Magnitude aparente é uma escala para comparação do brilho das estrelas desenvolvida pelo astrônomo grego Hiparco há mais de 2000 anos.



Hiparco (190-120 aC)

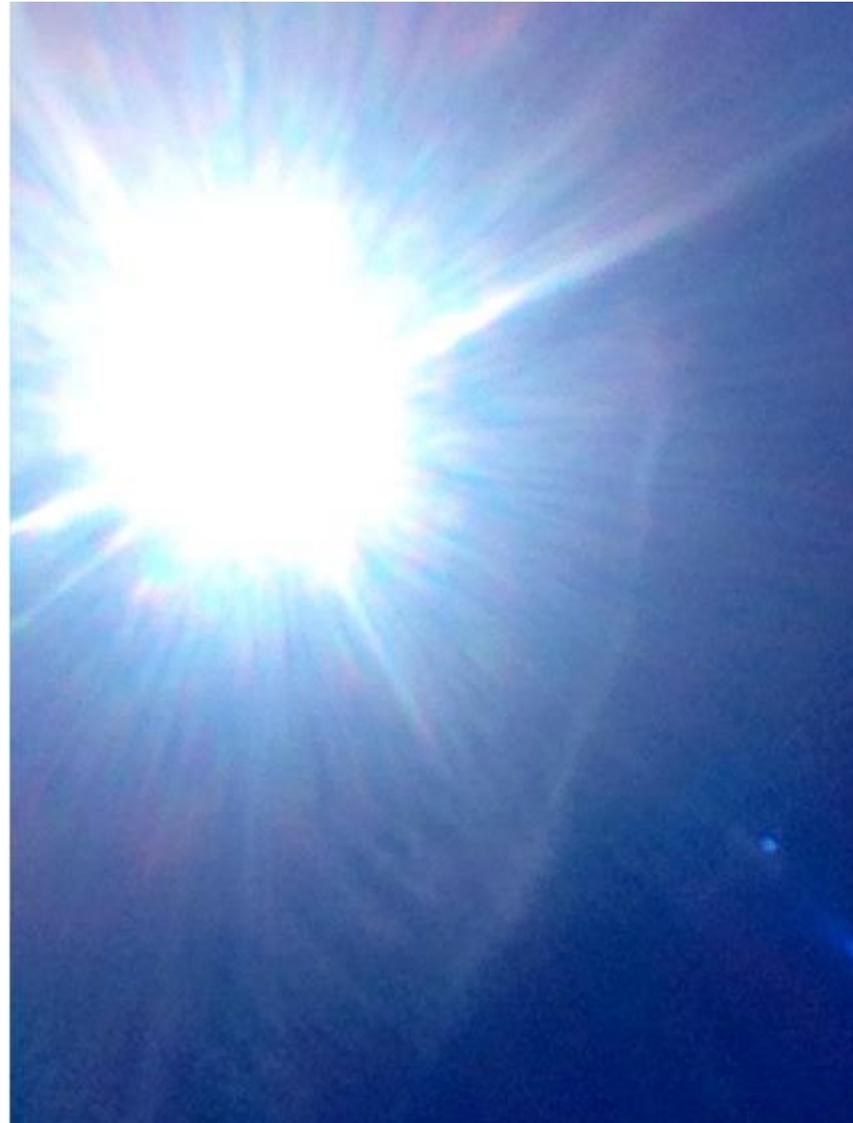
Ele alocou às estrelas mais brilhantes do céu uma magnitude $m=1$, às um pouco menos brilhantes do que as primeiras uma magnitude $m=2$, e assim por diante, até que todas as estrelas visíveis por ele tivessem valores de magnitude de 1 a 6, sendo este último valor atribuído às estrelas menos brilhantes do céu.



Magnitude aparente das estrelas

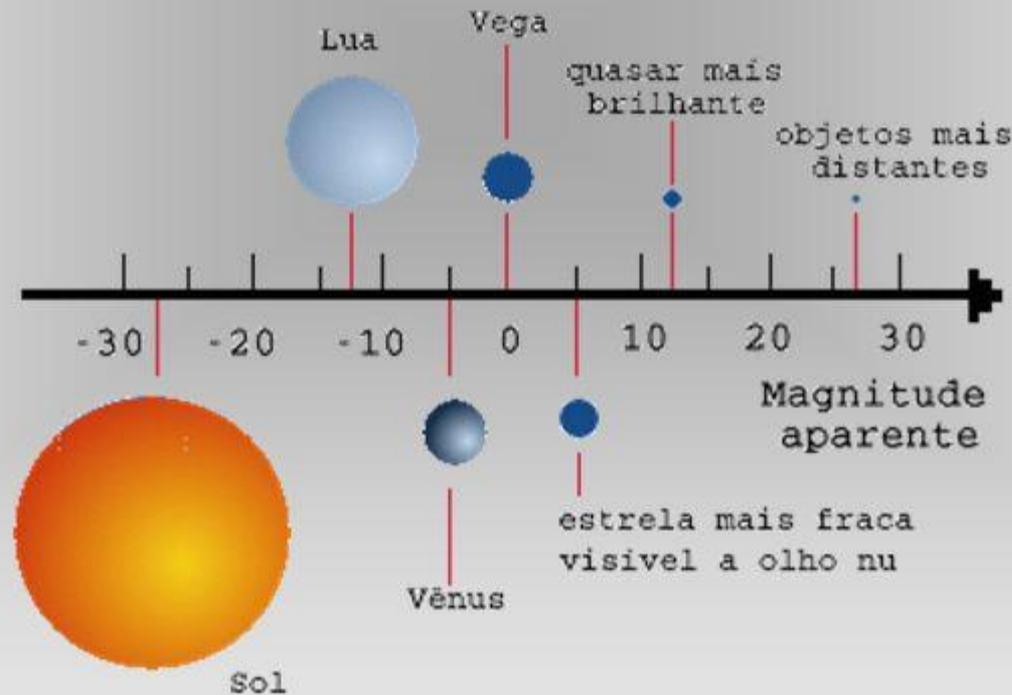
Portanto, o sistema de magnitude é baseado no quanto brilhantes são as estrelas a olho nu.

Posteriormente a escala de Hiparco foi estendida para magnitudes além de 6 e abaixo de 1, inclusive negativas.



Magnitude Aparente

Magnitude de um astro obtida através da observação, independentemente de seu fluxo radiante intrínseco. Exprime o brilho aparente.



Magnitude aparente das estrelas

Hoje em dia a diferença entre as magnitudes das estrelas se expressa com logaritmos:

$$(m_i - m_j) = -\frac{5}{2} \log_{10} \left(\frac{F_i}{F_j} \right)$$



Hiparco (190-120 aC)

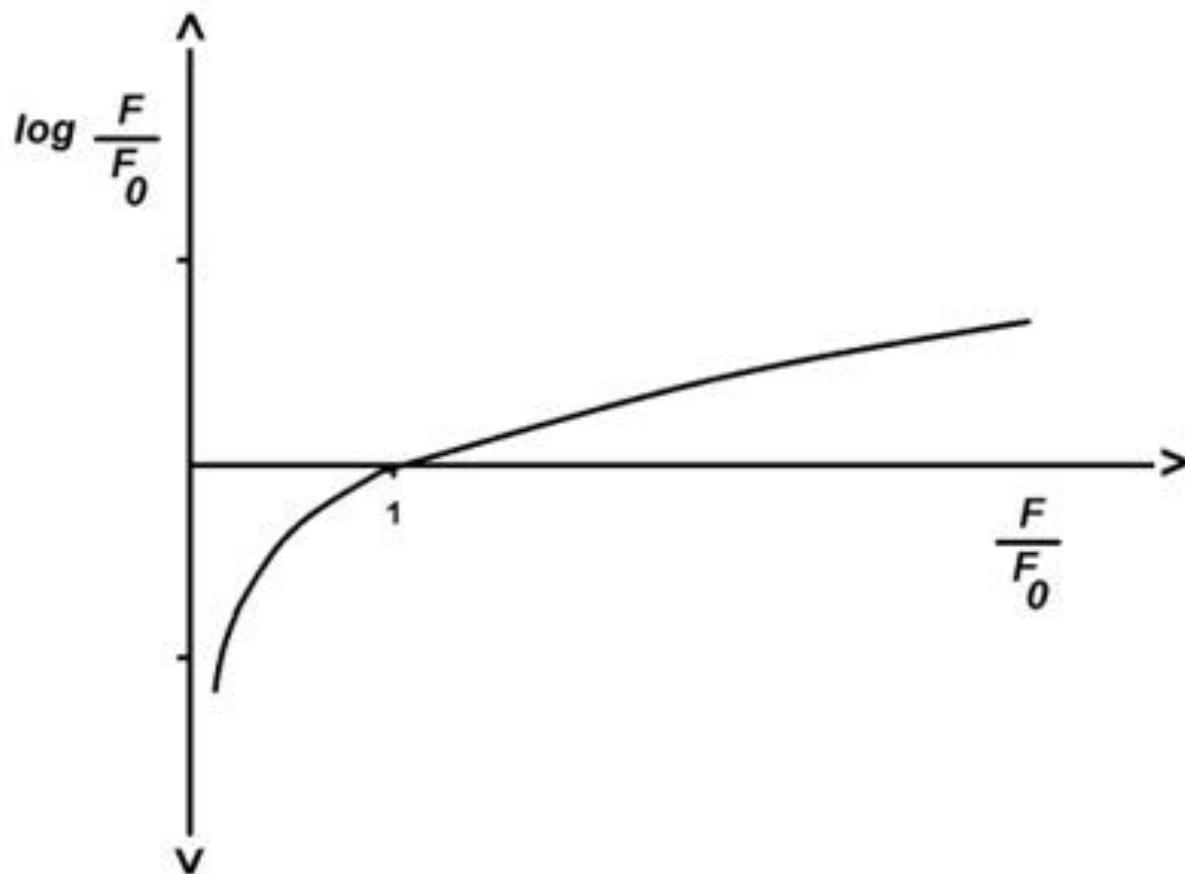


Figura 1 - O logaritmo do fluxo da luz estelar F , função que cresce suavemente conforme F aumenta. Hipparcos e seus seguidores adotaram implicitamente esta forma ao definir um intervalo (escala) de magnitudes visíveis, posteriormente matematicamente esgrimida na Eq. (1), a qual continua sendo utilizada até hoje. Quando o fluxo F resulta menor que aquele da referência F_0 , a função é negativa e a magnitude aparente m cresce numericamente.

Escala Richter

A **escala Richter**, atribui um número único para quantificar o nível de energia liberada por um terremoto.



Charles Francis Richter (1900 — 1985),
sismólogo americano.

Escala Richter

A **escala Richter**, atribui um número único para quantificar o nível de energia liberada por um terremoto.



É uma escala logarítmica, de base 10.

Escala Richter

O número do terremoto é obtido calculando o logaritmo da amplitude horizontal combinada (amplitude sísmica) do maior deslocamento a partir do zero em um tipo particular de sismógrafo.



Escala Richter

Pelo fato de ser um escala logarítmica, um terremoto que mede 5 na escala Richter tem uma amplitude sísmica 10 vezes maior do que uma que mede 4. Em termos de energia, um terremoto de grau 7 libera cerca de 30 vezes a energia de um sismo de grau 6.



Escala Richter

O terremoto de abril no Nepal teve grau 7,9.

O de maio teve grau 7,3.



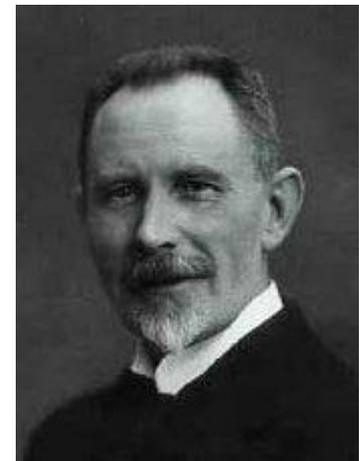
Escala de pH

pH é uma medida do **potencial hidrogeniônico** a acidez, neutralidade ou alcalinidade de uma solução aquosa.



Escala de pH

O termo **pH** foi introduzido, em 1909, pelo bioquímico dinamarquês Søren Peter Lauritz Sørensen (1868-1939) com o objetivo de facilitar seus trabalhos no controle de qualidade de cervejas.



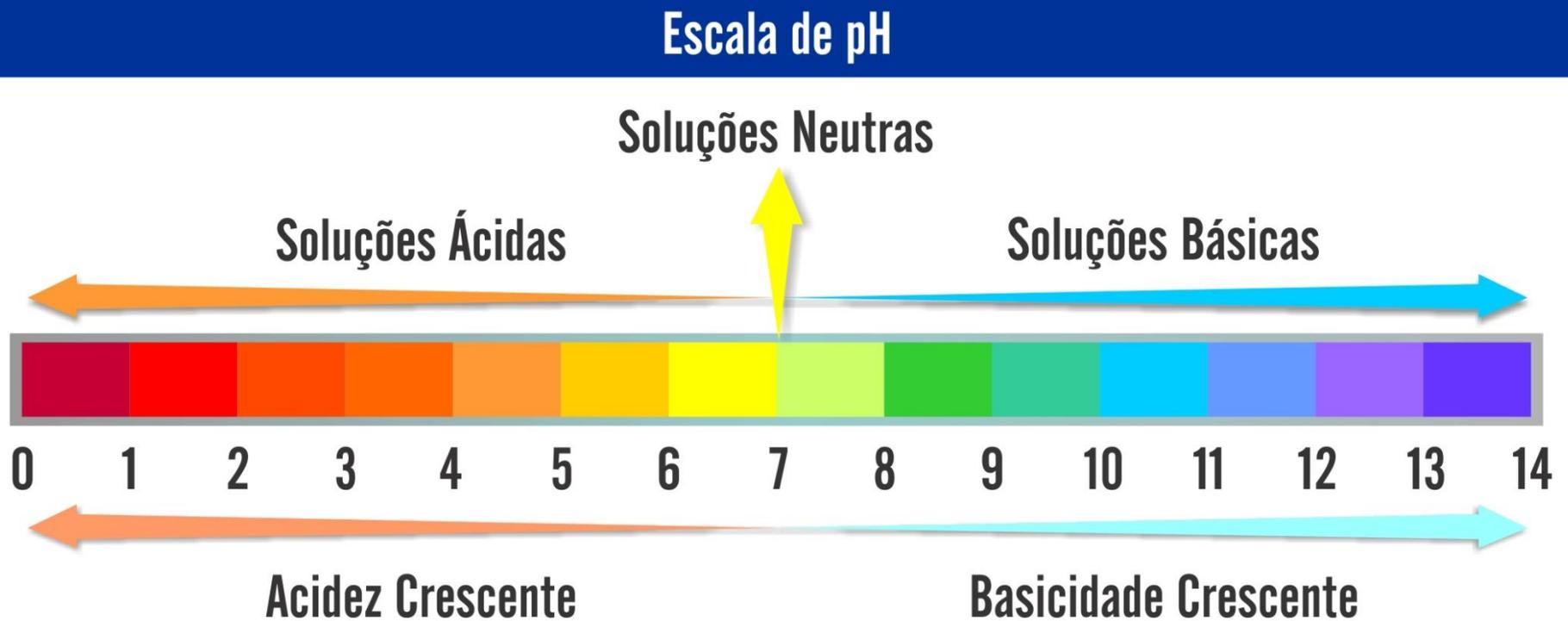
Escala de pH

O "p" vem do alemão *potenz*, que significa poder de concentração, e o "H" é para o íon de hidrogênio (H⁺).

$$\text{pH} = -\log_{10} [a_{\text{H}^+}]$$

Escala de pH

O "p" vem do alemão *potenz*, que significa poder de concentração, e o "H" é para o íon de hidrogênio (H^+).



Alguns valores comuns de pH

Substância	pH
Ácido de bateria	<1.0
Suco gástrico	2.0
Sumo de limão	2.4
refrigerante tipo Cola	2.5
Vinagre	2.9
Sumo de laranja ou maçã	3.5
Cerveja	4.5
Café	5.0
Chá	5.5
Chuva ácida	< 5.6
Saliva pacientes com câncer (canoro)	4.5-5.7
Leite	6.5
Água pura	7.0
Saliva humana	6.5-7.4
Sangue	7.34 - 7.45
Água do mar	8.0
Sabonete de mão	9.0 - 10.0
Amônia caseira	11.5
"Água sanitária"	12.5
Hidróxido de sódio caseiro	13.5