

CÁLCULO

Antonio Carlos Brolezzi

A Geometria surgiu por necessidades praticas e estéticas, ajudando a descrever formas da natureza e criadas pelo homem.

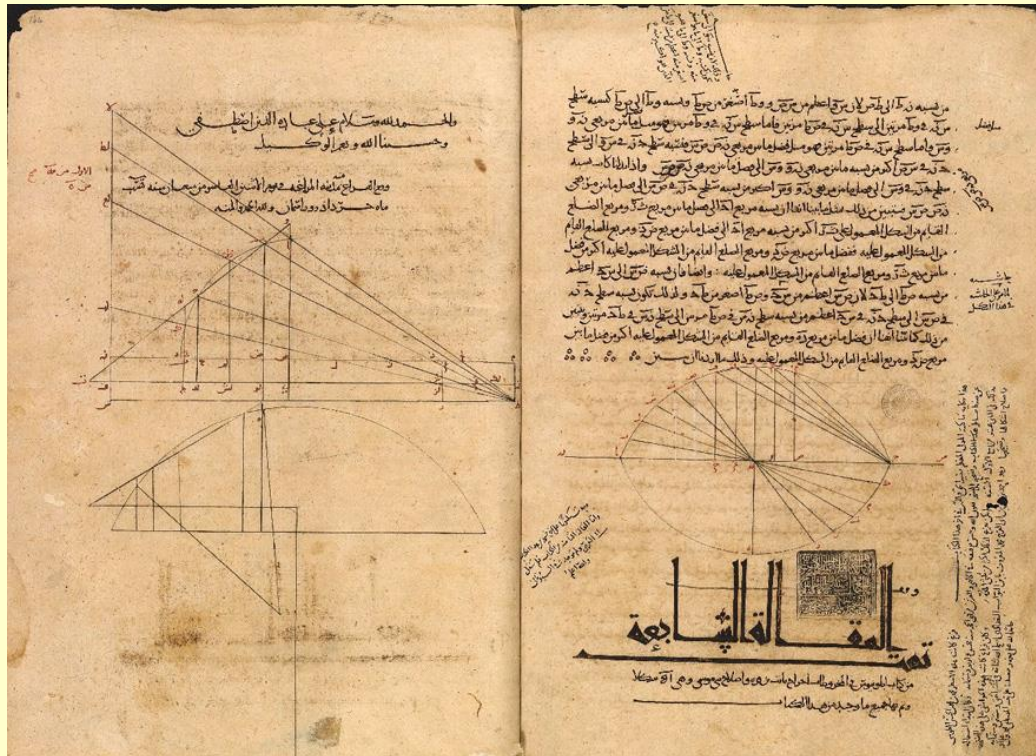


Na Grécia antiga, o ambiente de debates e as trocas comerciais com outros povos ajudaram a desenvolver as habilidades de argumentação e demonstração, e a Geometria foi uma das primeiras áreas do conhecimento a ser organizada de forma lógica.



Grécia antiga: ambiente de debates e as trocas comerciais com outros povos ajudaram a desenvolver as habilidades de argumentação e demonstração.

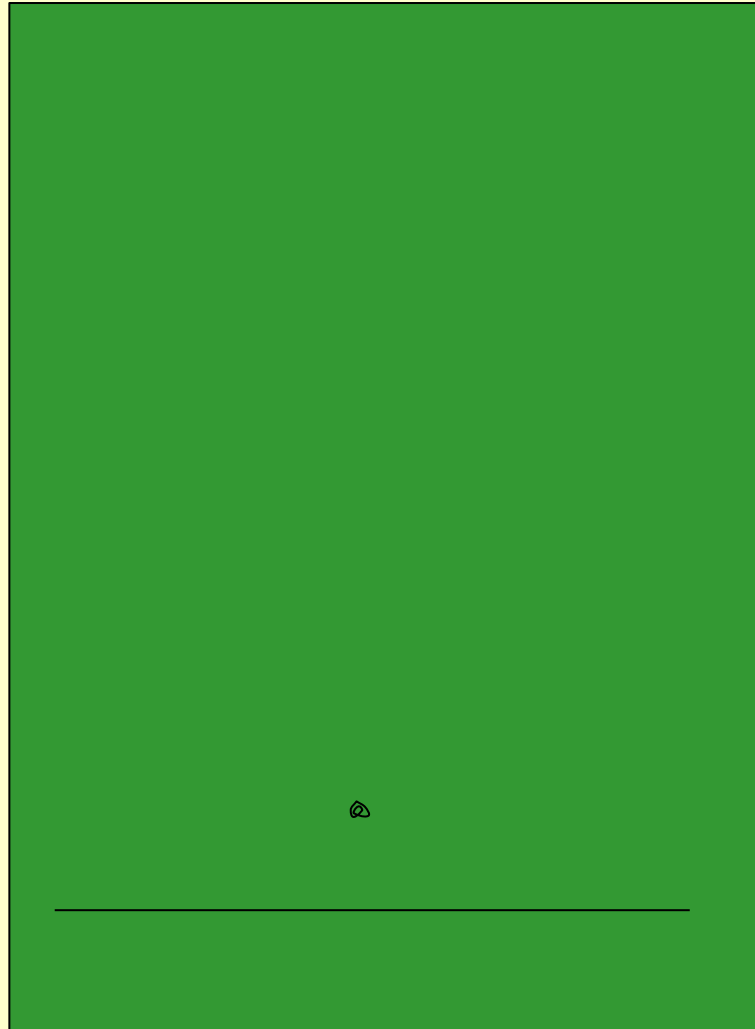
Geometria: foi uma das primeiras áreas do conhecimento a ser organizada de forma lógica.



Cônicas, de Apolônio (15-100)

Parábolas:

“Lugar geométrico dos pontos equidistante a uma reta e um ponto fora dela”.



Na Europa, as invasões bárbaras e o crescimento do cristianismo levaram ao declínio da cultura clássica antiga.

Morte de Hipatia (370-415)



Fim do Império Romano do Ocidente (476)

O imperador Justiniano (482-565) fecha as últimas escolas e academias filosóficas.

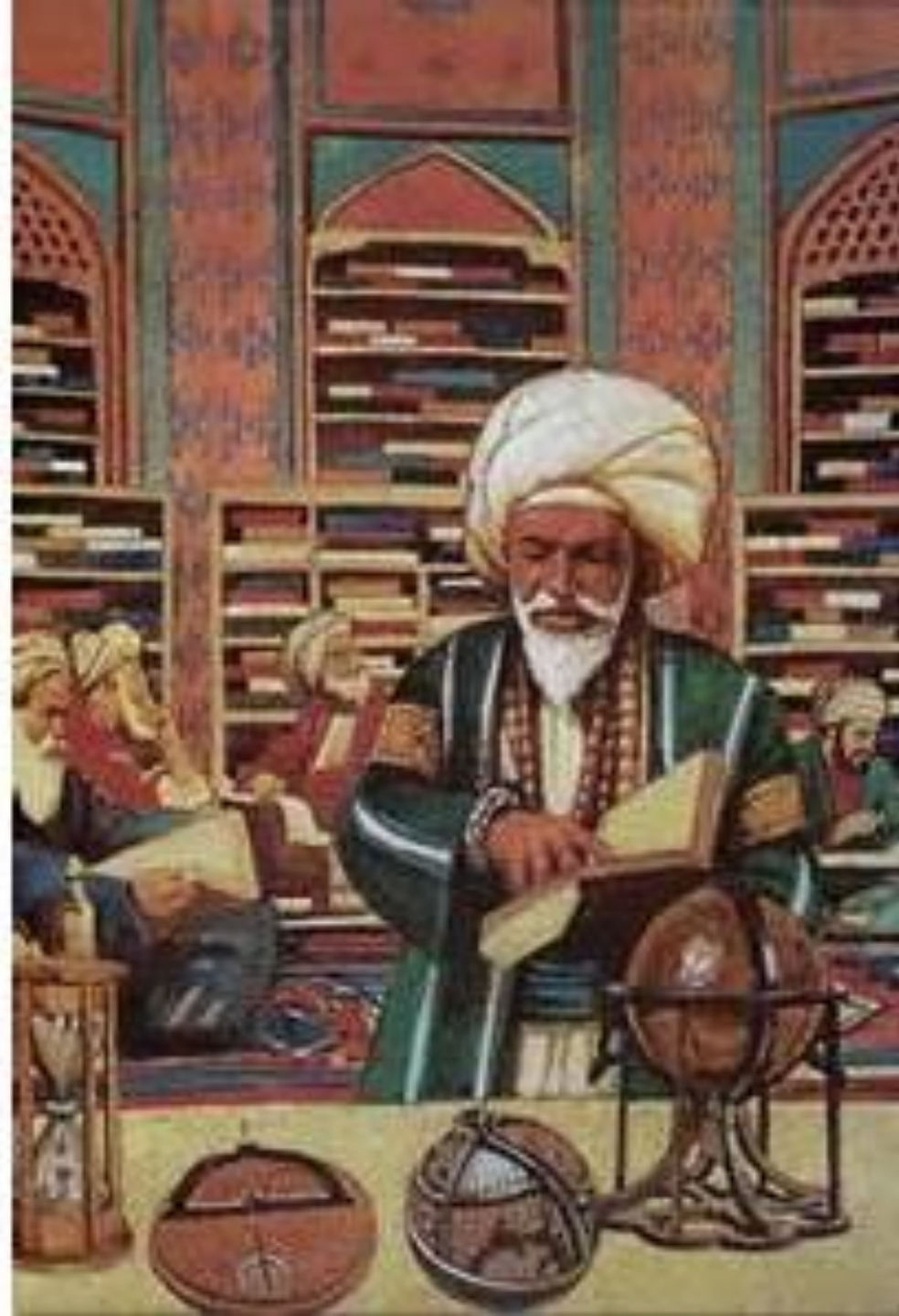
Iniciou-se a Idade Média.



Estudiosos europeus:
acolhidos em cidades da
Pérsia e em Bagdá

Casa da Sabedoria de
Bagdá: estudos de
Matemática continuavam a
se desenvolver.

Cria-se uma nova Álgebra.



Omar Khayyam (1050-1122):
poeta, astrônomo e matemático
persa.

Escreveu sua *Álgebra* propondo
resolver equações até do terceiro
grau por métodos geométricos:
seções cônicas:
parábolas, hipérbolas e elipses.

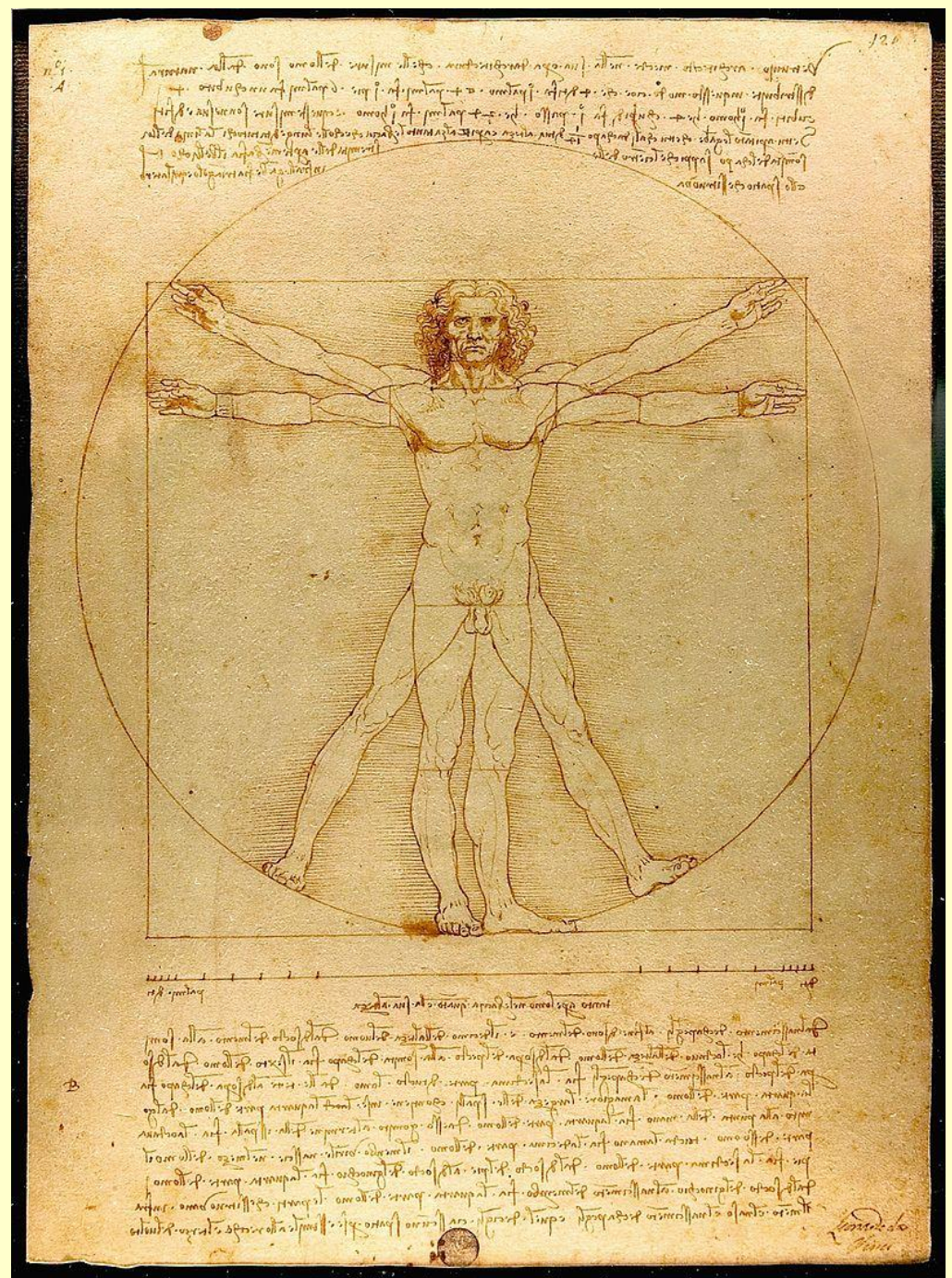
Omar Khayyam aproximou Algebra
e Geometria.



Tomada da cidade de Constantinopla pelos turcos otomanos em 1453.

Fim do Império Romano do Oriente e da Idade Média.

Entre o final do século XIV e o final do século XVII:
Renascimento.



No Renascimento, a Europa passou a produzir uma nova arte, filosofia e ciência.

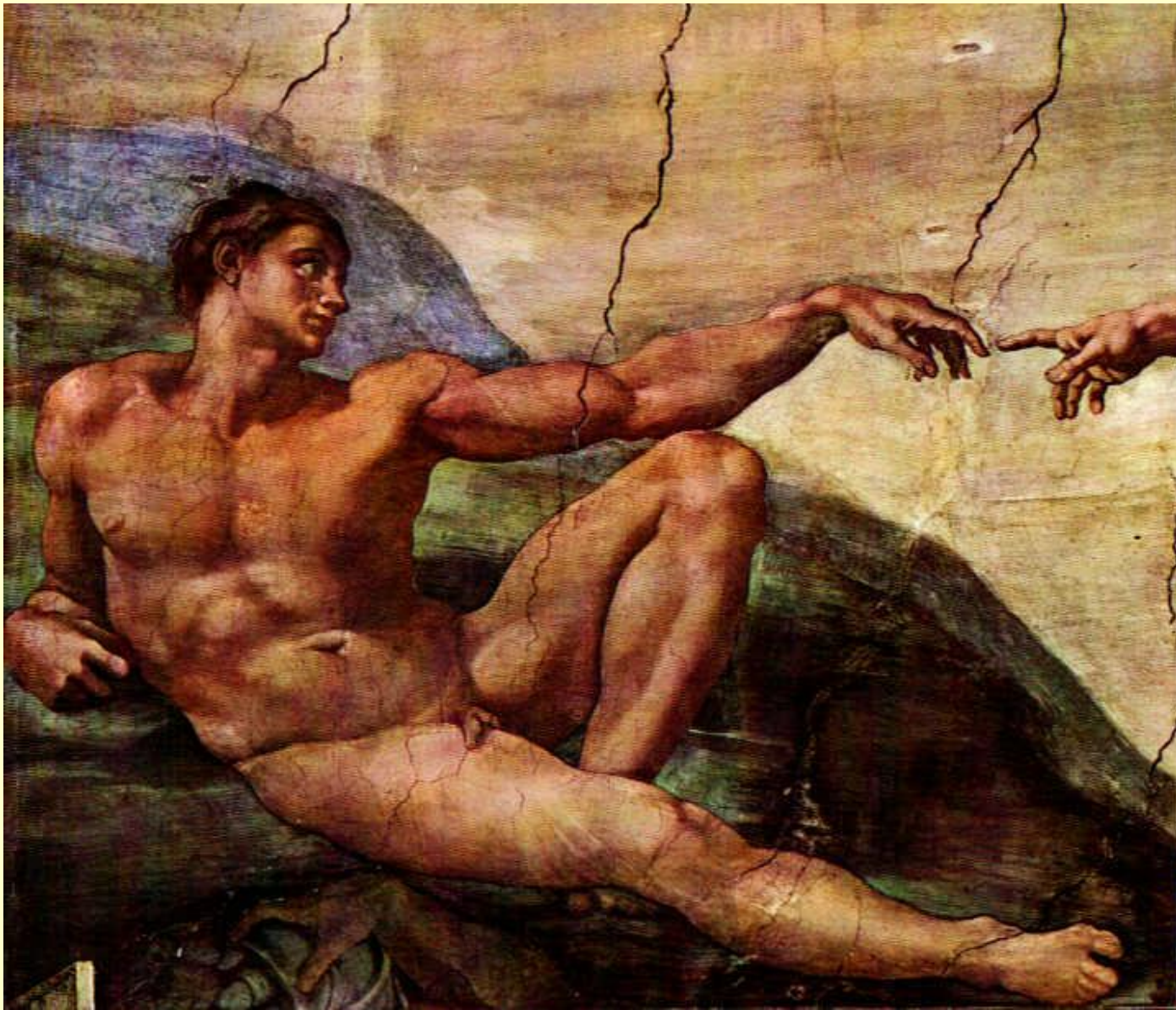


Alessandro Botticelli (1444-1510) Alegoria da Primavera

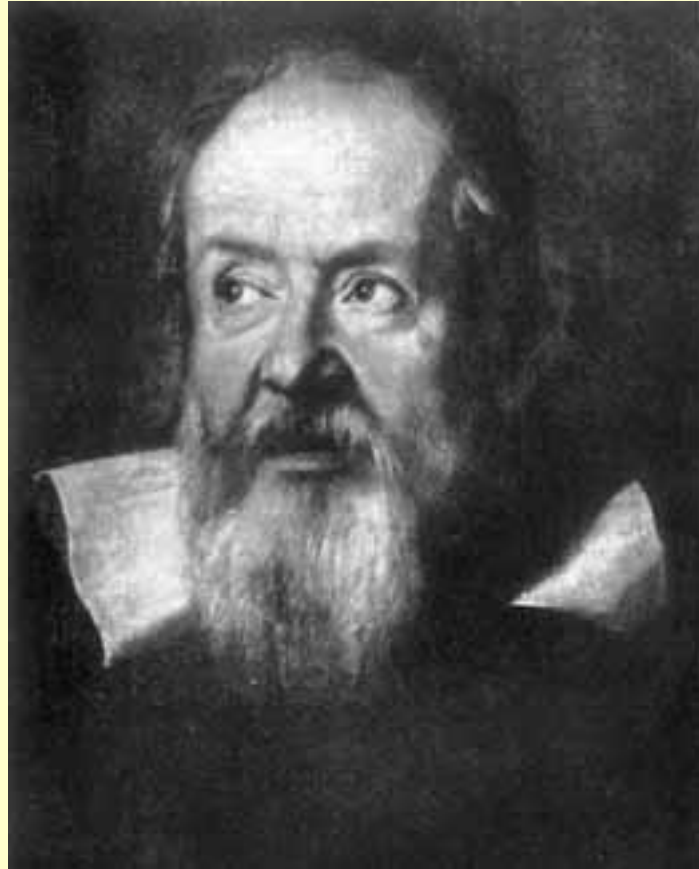
Com o renascimento, a Europa passou a produzir uma nova arte, filosofia e ciência.



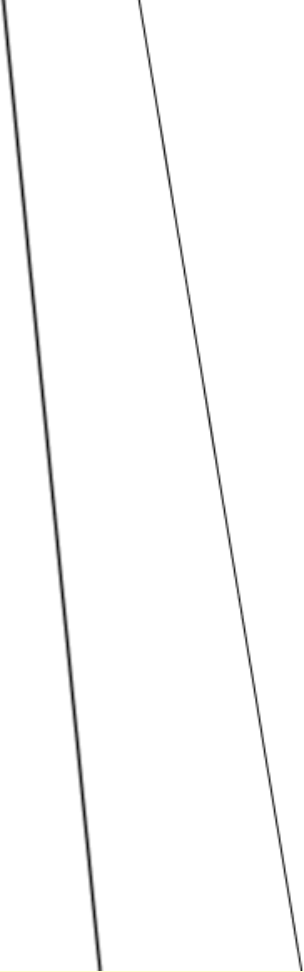
Alessandro Botticelli (1444-1510) O Nascimento de Venus



Com mais liberdade e uma visão em que o homem era o centro de todas as coisas, iniciou-se uma forma nova de abordar a vida e a ciência.



Galileu Galileu (1564-1642) incentiva seus discípulos a pesquisarem sobre o movimento e seus princípios científicos.



Galileu Galileu (1564-1642) incentiva seus discípulos a pesquisarem sobre o movimento e seus princípios científicos.

Tradução da Álgebra árabe no continente europeu: novos estudiosos de Matemática.

François Viète (1540-1603): denominou sua Álgebra de “arte analítica”

Análise: decomposição ou separação.

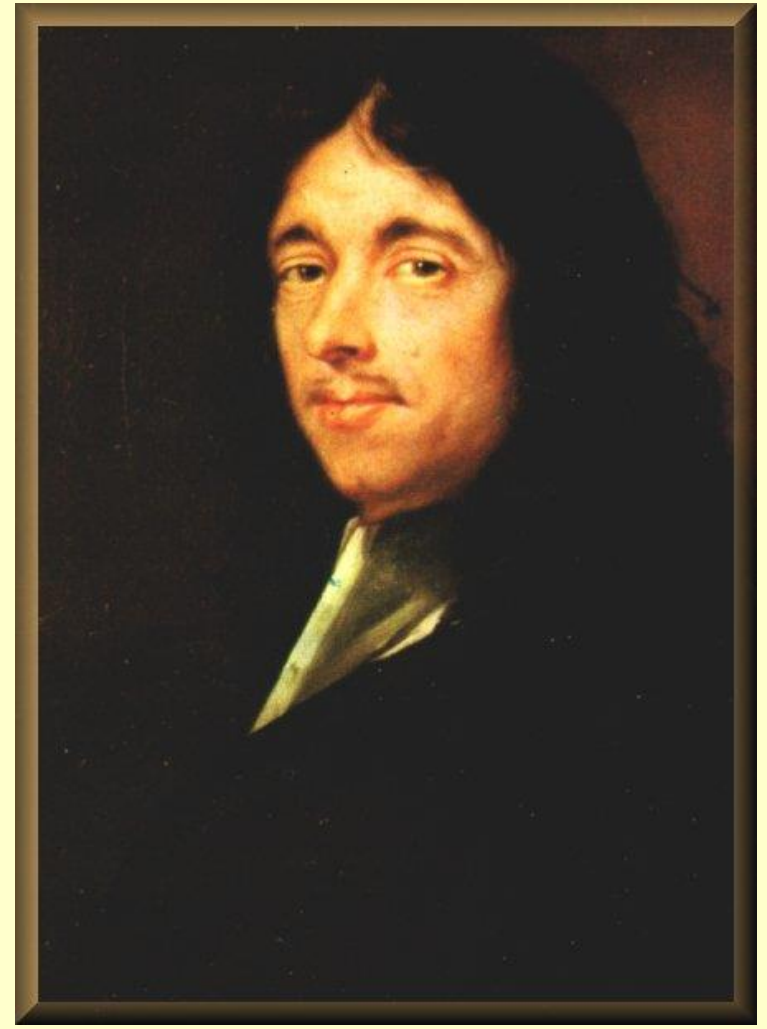
Ao resolver equações há o processo de subdivisão de uma expressão maior em outras menores.



Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) passaram a trabalhar na relação entre Geometria e Álgebra.

Isto é, entre

Geometria e a Arte Analítica, originando assim a Geometria analítica.





O século XVII foi fértil em descobertas científicas em diversas áreas. Neste quadro, na mesa ao lado direito, vemos a rainha Cristina da Suécia (1626-1689) e René Descartes.



Cristina e Descartes que conversam frente a frente na mesa.

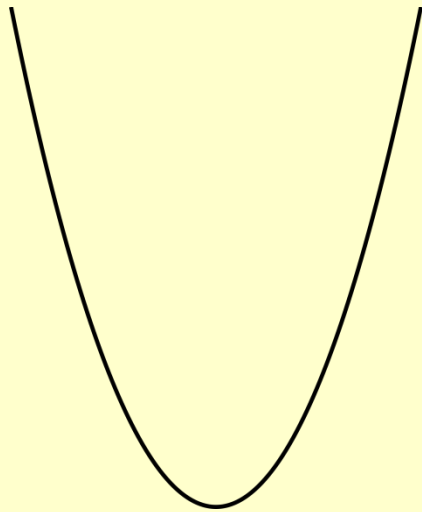
Século XVII na Europa: a Idade da Razão.

Geometria grega: lugar geométrico, construções com régua e compasso de curvas e formas.

Álgebra árabe: relação entre equações e geometria.

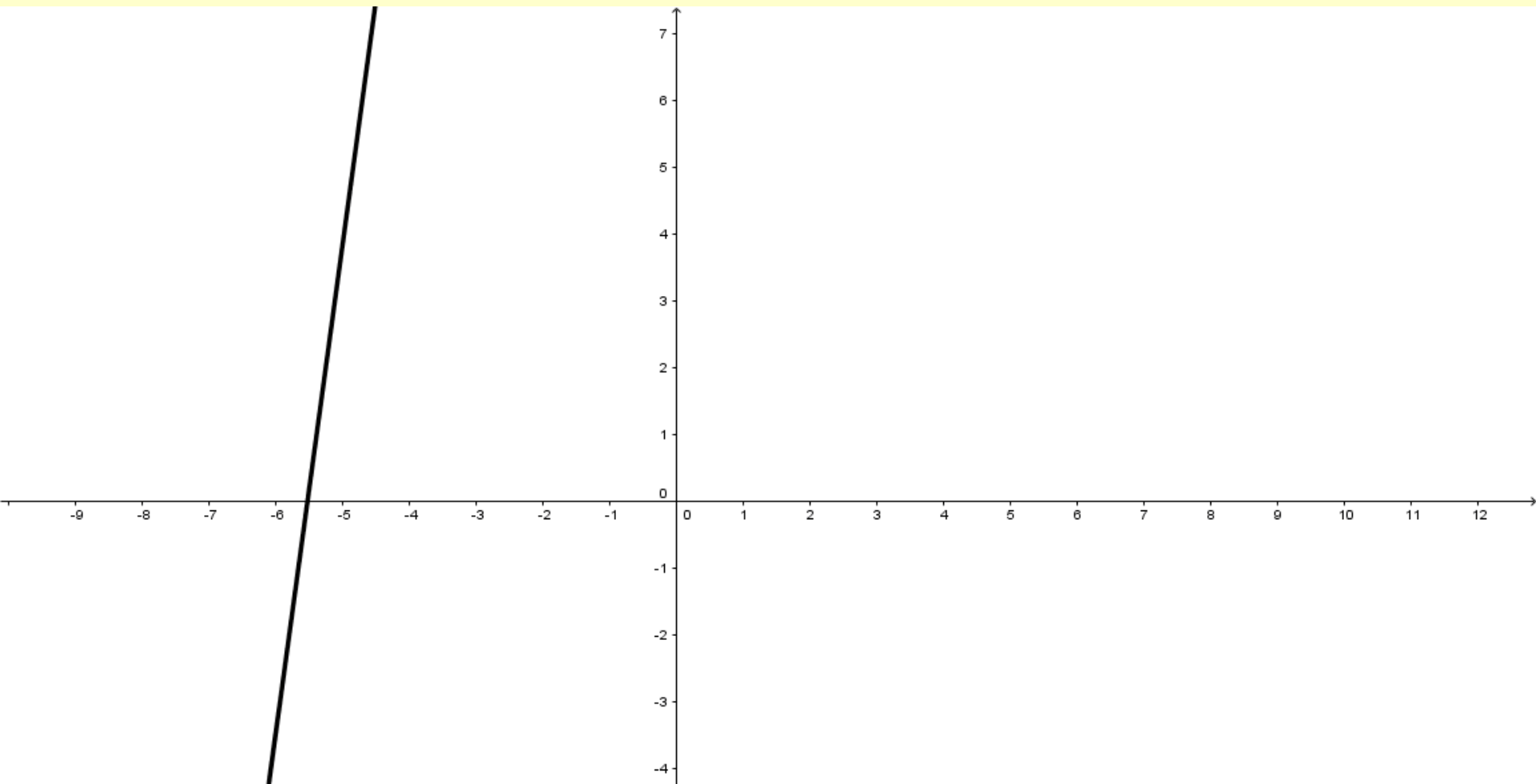
Fermat e Descartes: Geometria analítica:

Ponte entre os dois “mundos”: a geometria grega e a álgebra árabe.



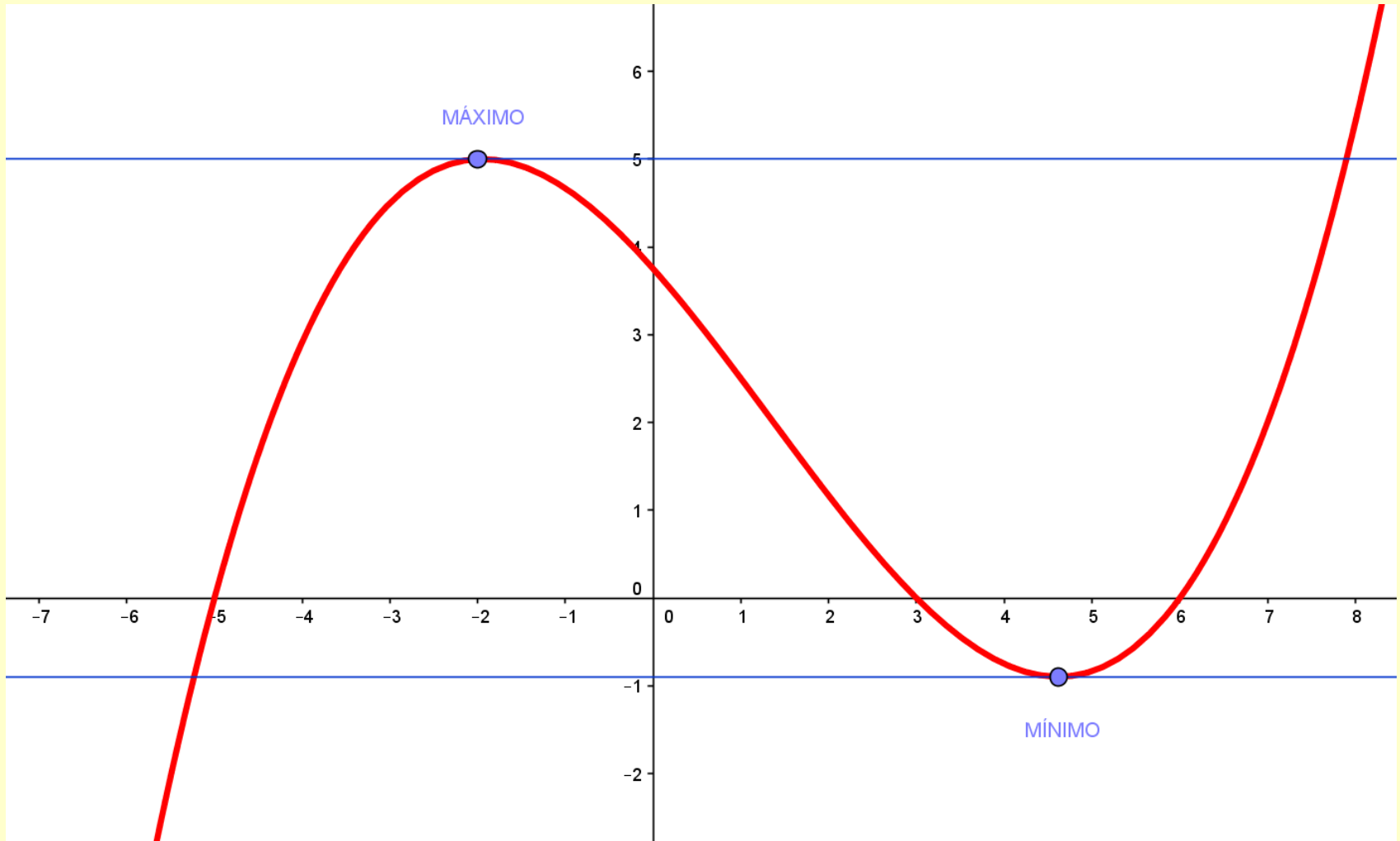
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Uma curva pode ser definida a partir de suas tangentes.



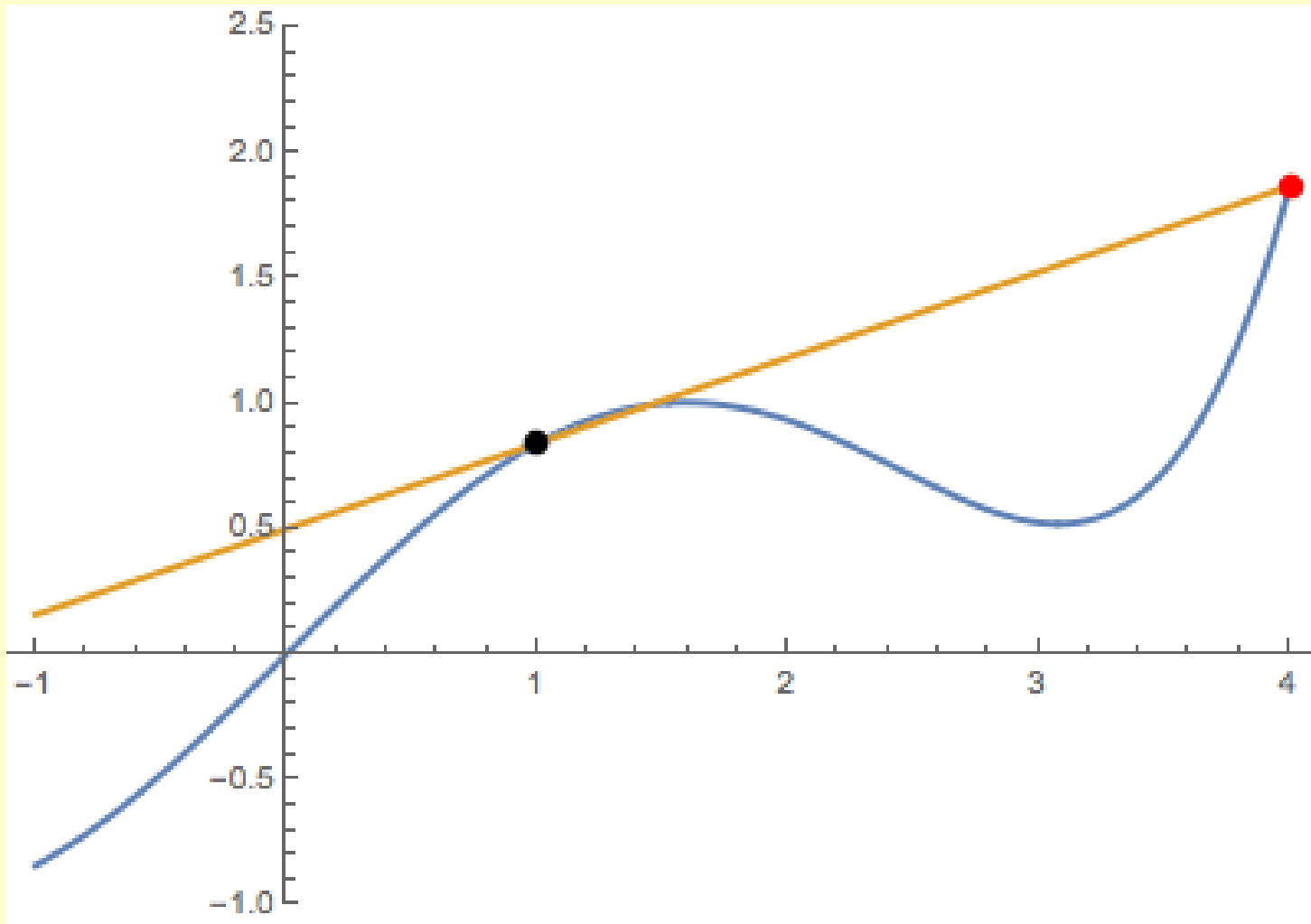
Fermat percebeu que quando a curva tem um máximo ou um mínimo, sua tangente é horizontal (Teorema de Fermat).

Uma curva pode ser definida a partir de suas tangentes.



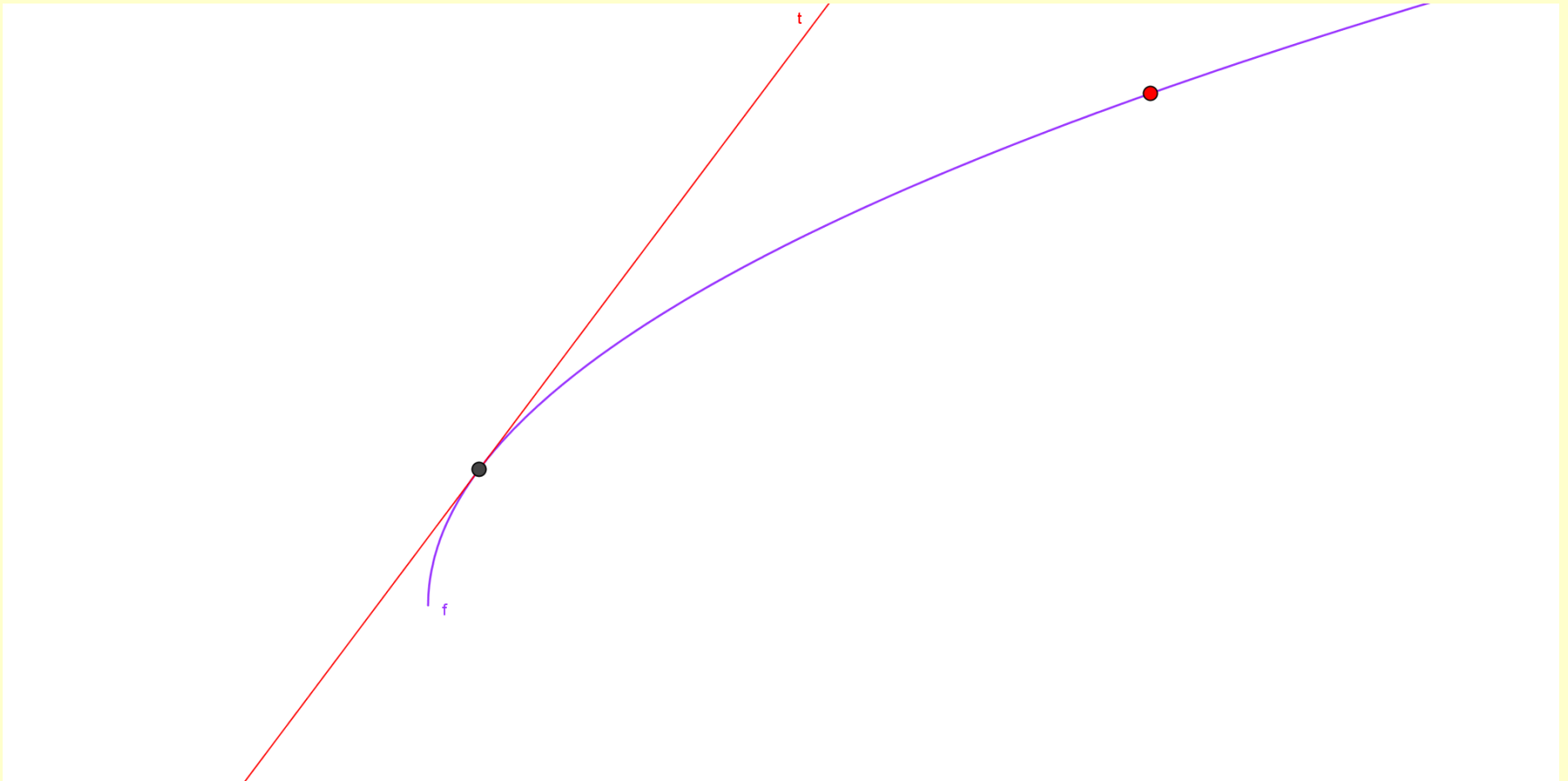
Fermat percebeu que quando a curva tem um máximo ou um mínimo, sua tangente é horizontal (Teorema de Fermat).

Como encontrar a equação da reta tangente à uma curva em um ponto dado?



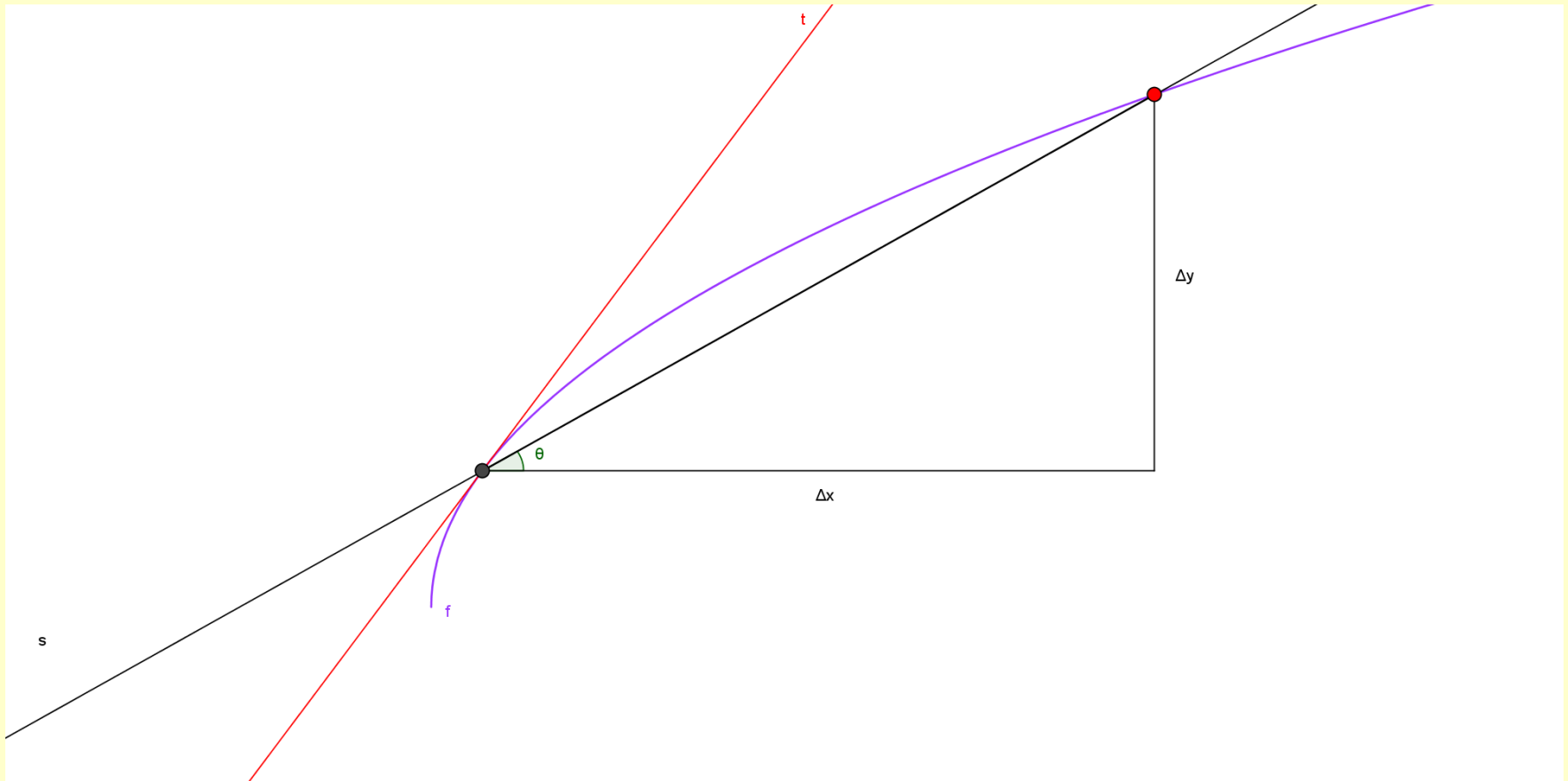
Aproximando o ponto vermelho do ponto preto, a reta secante tende à reta tangente.

Como encontrar a equação da reta tangente à uma curva em um ponto dado?



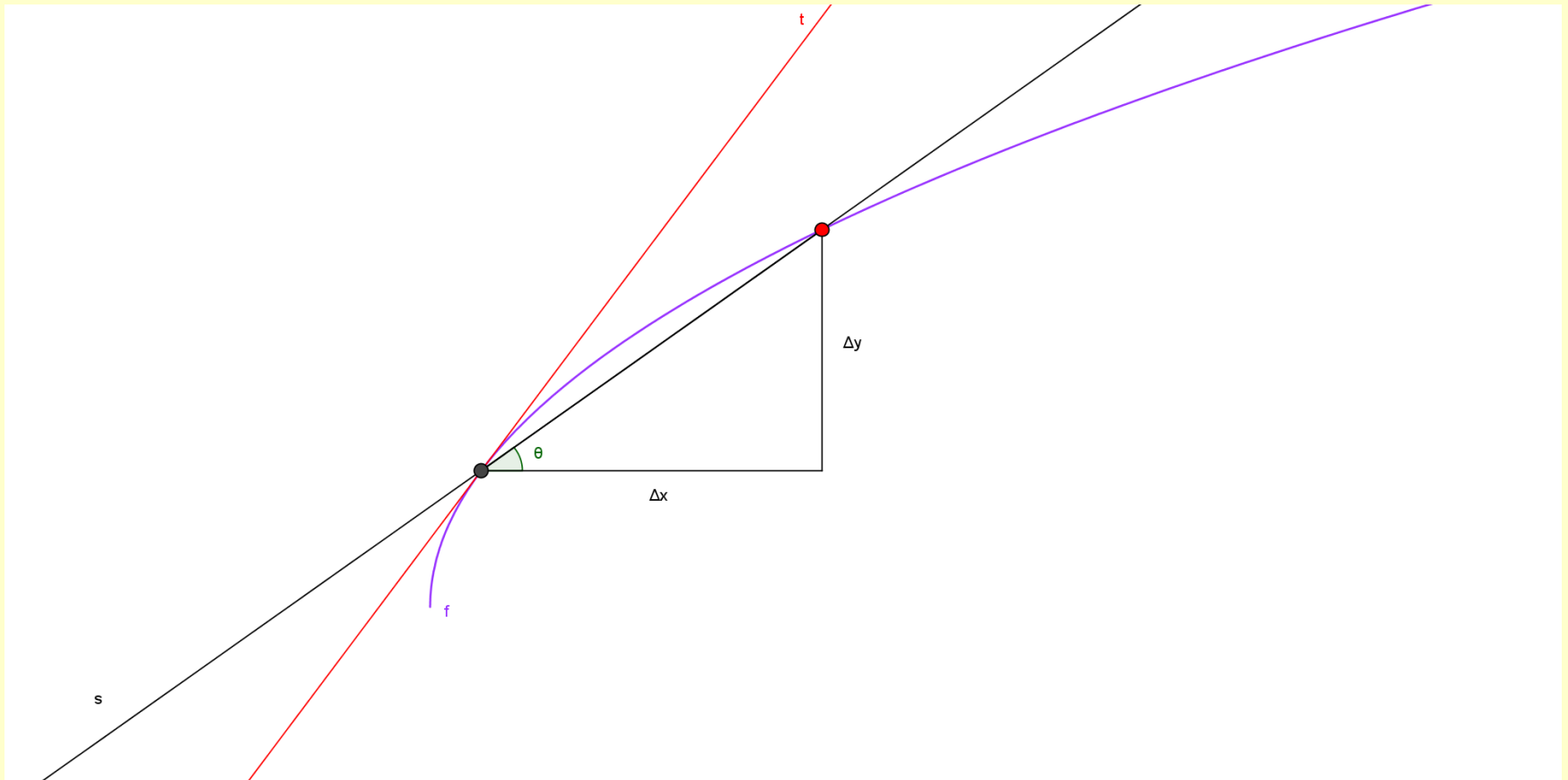
Aproximando o ponto vermelho do ponto preto, a reta secante tende à reta tangente.

Como encontrar a equação da reta tangente à uma curva em um ponto dado?



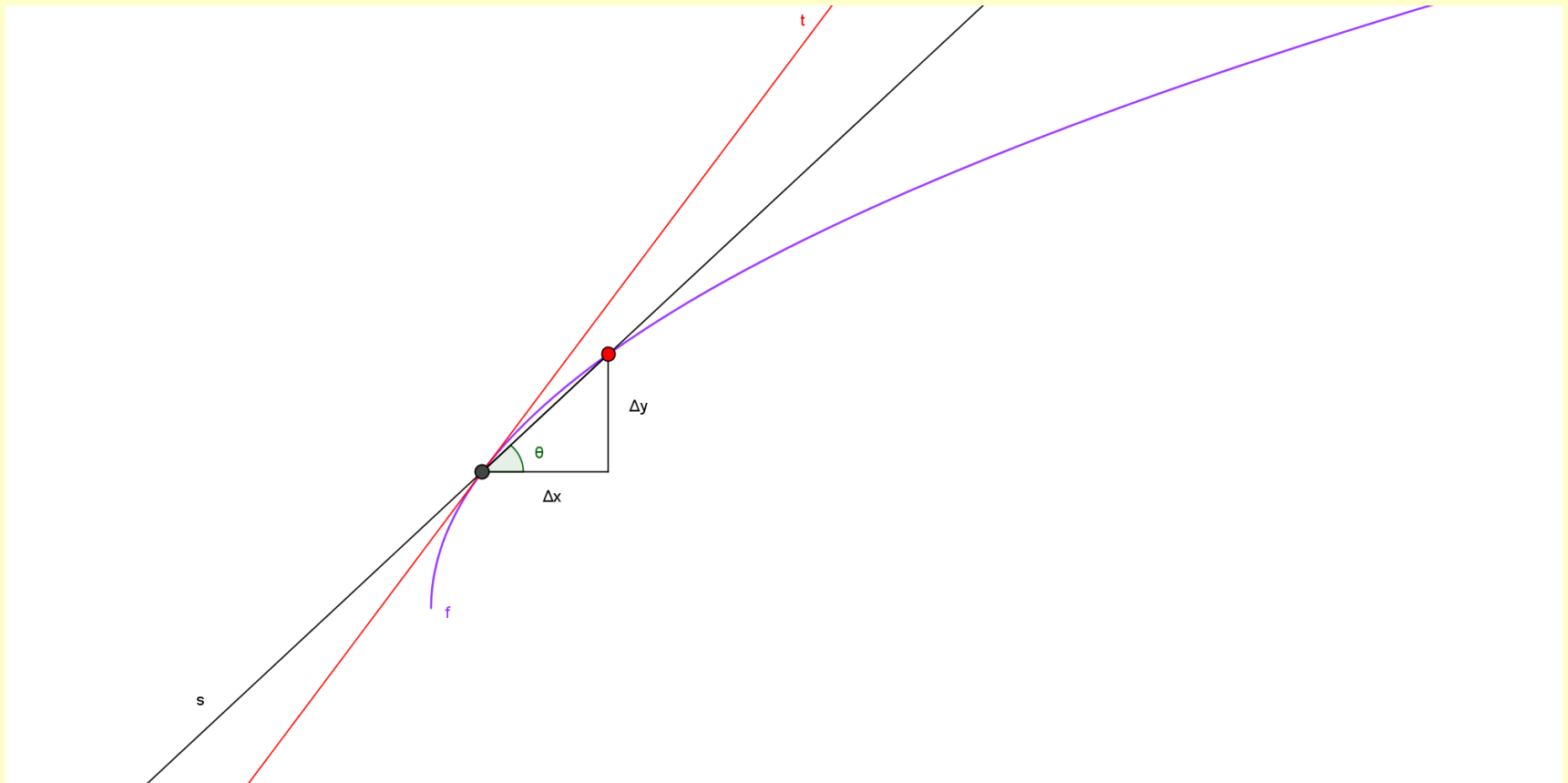
Aproximando o ponto vermelho do ponto preto, a reta secante tende à reta tangente.

Como encontrar a equação da reta tangente à uma curva em um ponto dado?



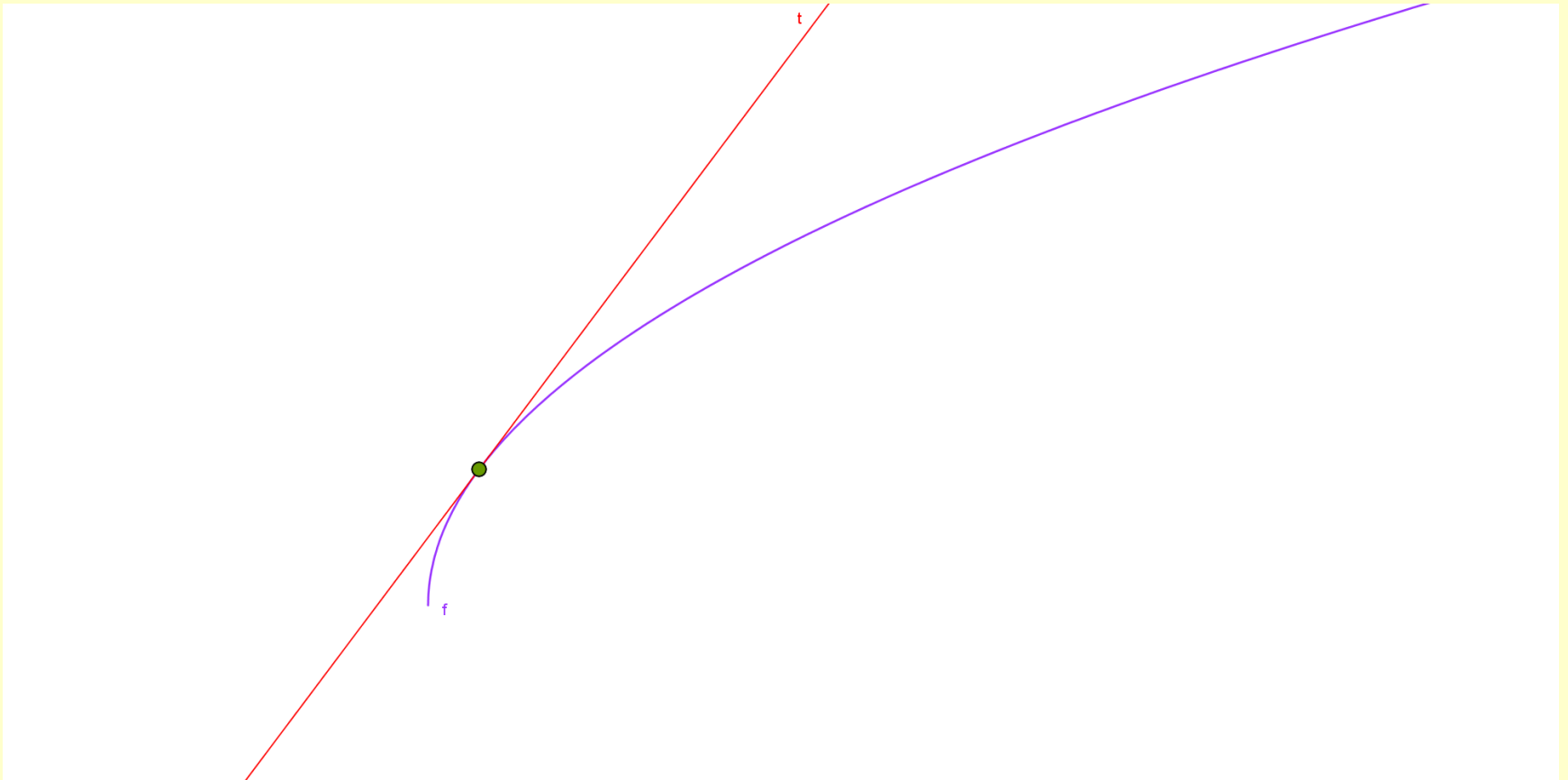
Aproximando o ponto vermelho do ponto preto, a reta secante tende à reta tangente.

Como encontrar a equação da reta tangente à uma curva em um ponto dado?



Aproximando o ponto vermelho do ponto preto, a reta secante tende à reta tangente.

Como encontrar a equação da reta tangente à uma curva em um ponto dado?



Aproximando o ponto vermelho do ponto preto, a reta secante tende à reta tangente.

“Tender a” é um conceito novo da matemática do movimento.

Taxa de variação média:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

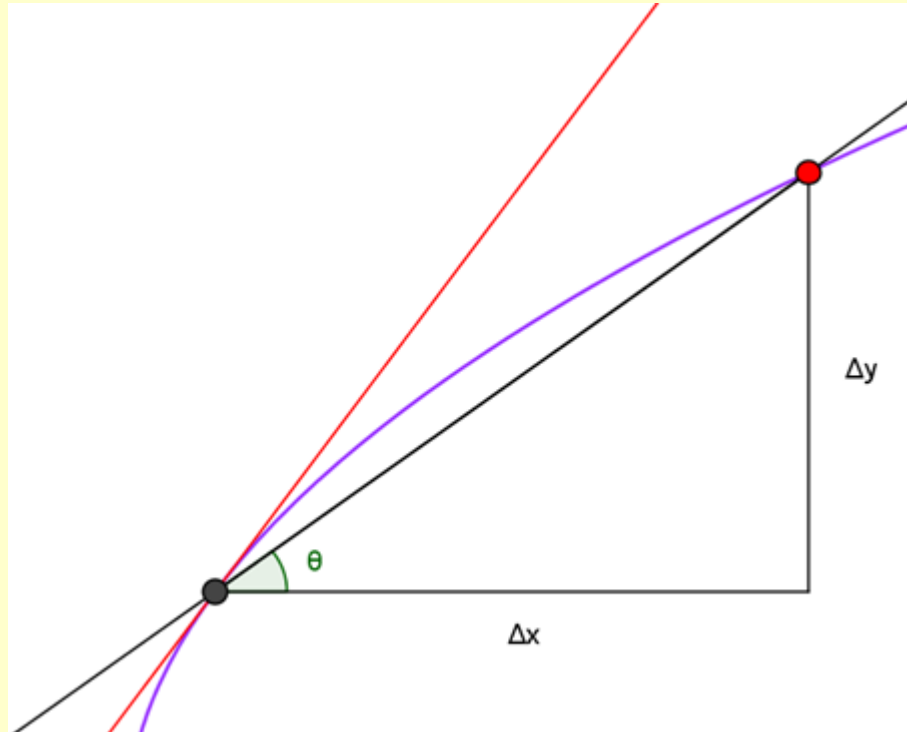
Como “velocidade média”:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Fazendo Δt tender a zero, temos a “velocidade instantânea”:

$$v_i = \frac{ds}{dt}$$

Derivada é uma taxa de variação instantânea.



A taxa de variação média é a tangente do ângulo θ :

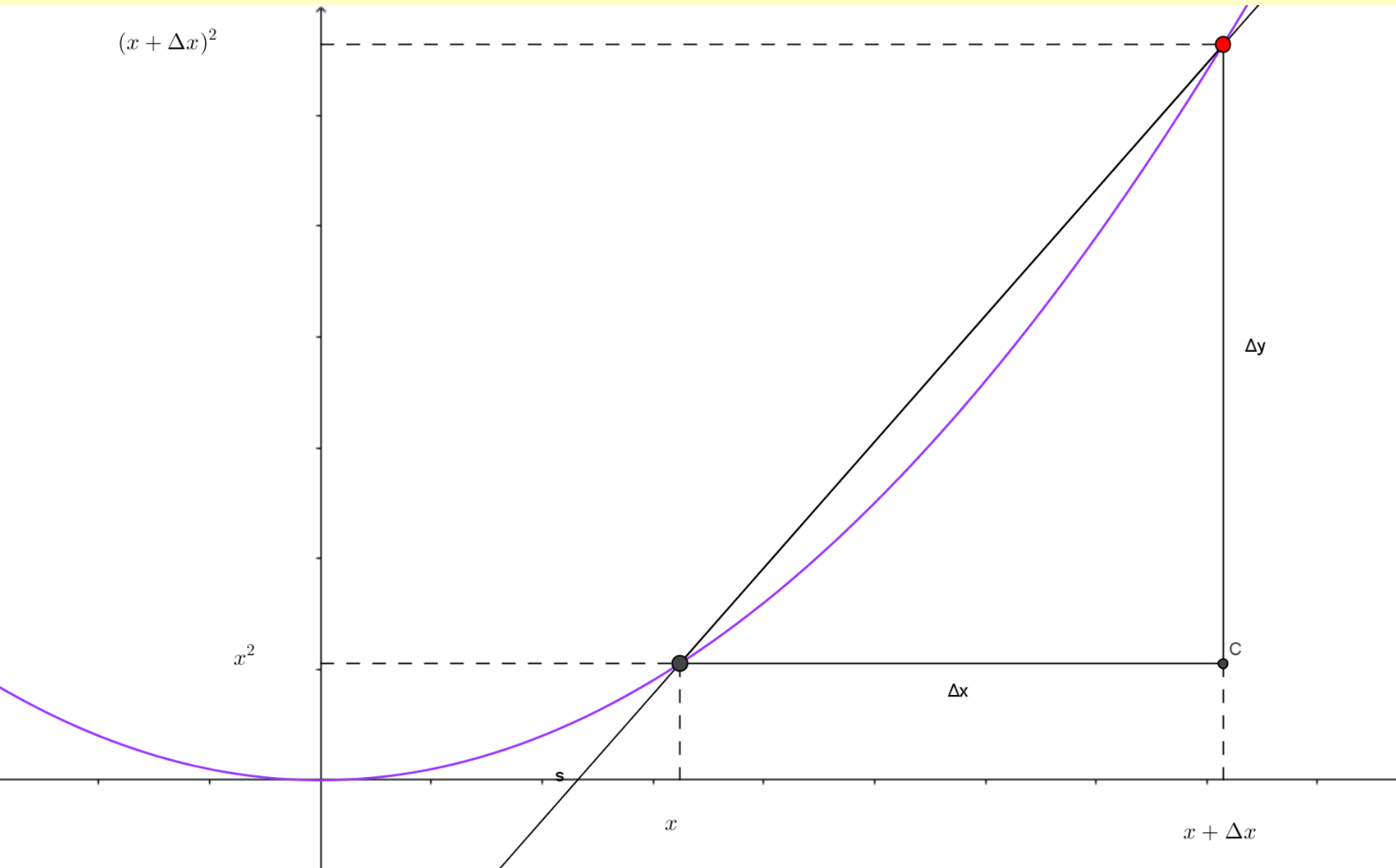
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

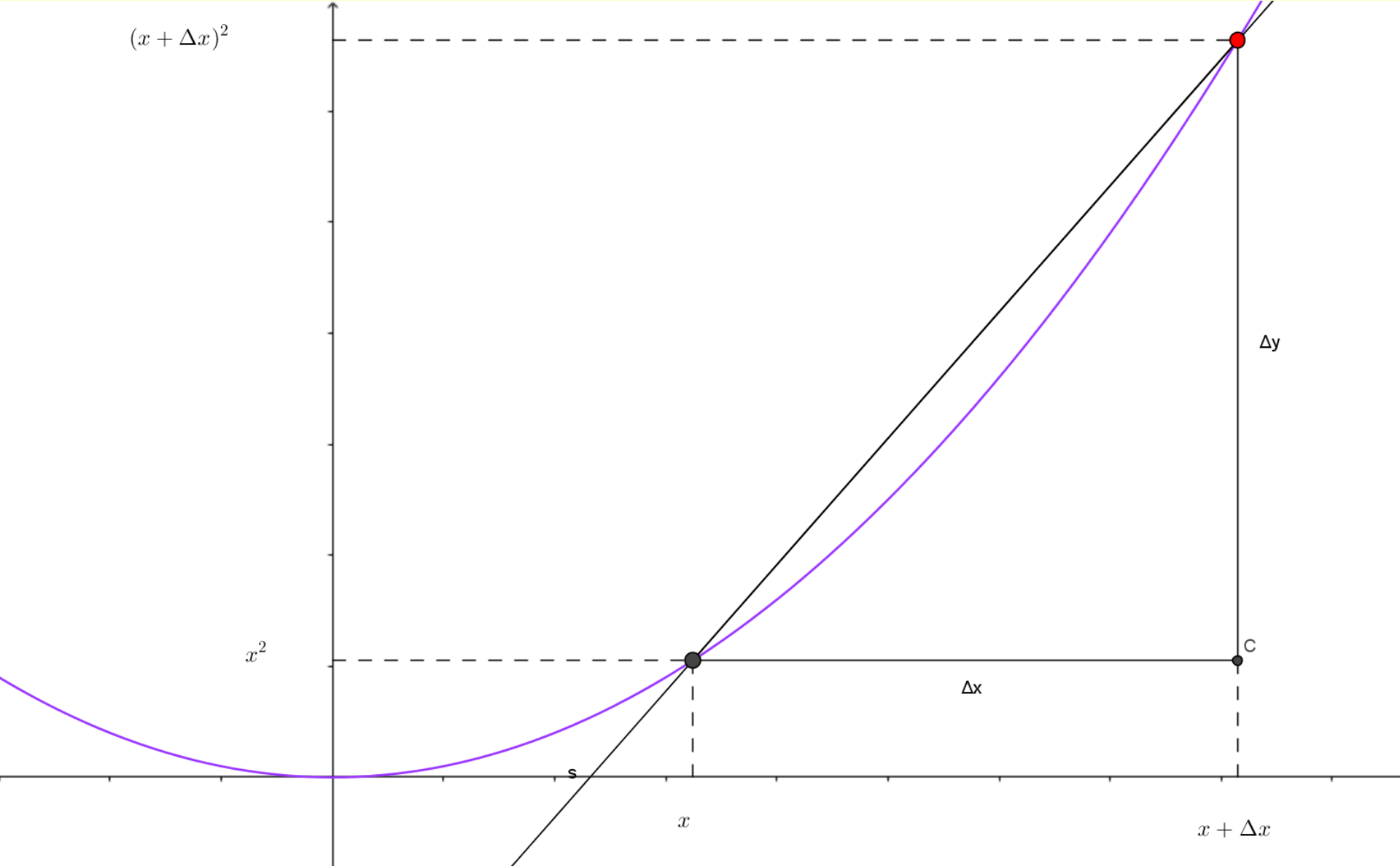
Fazendo $\Delta x \rightarrow 0$, temos o coeficiente angular da reta tangente:

$$m = \frac{dy}{dx}$$

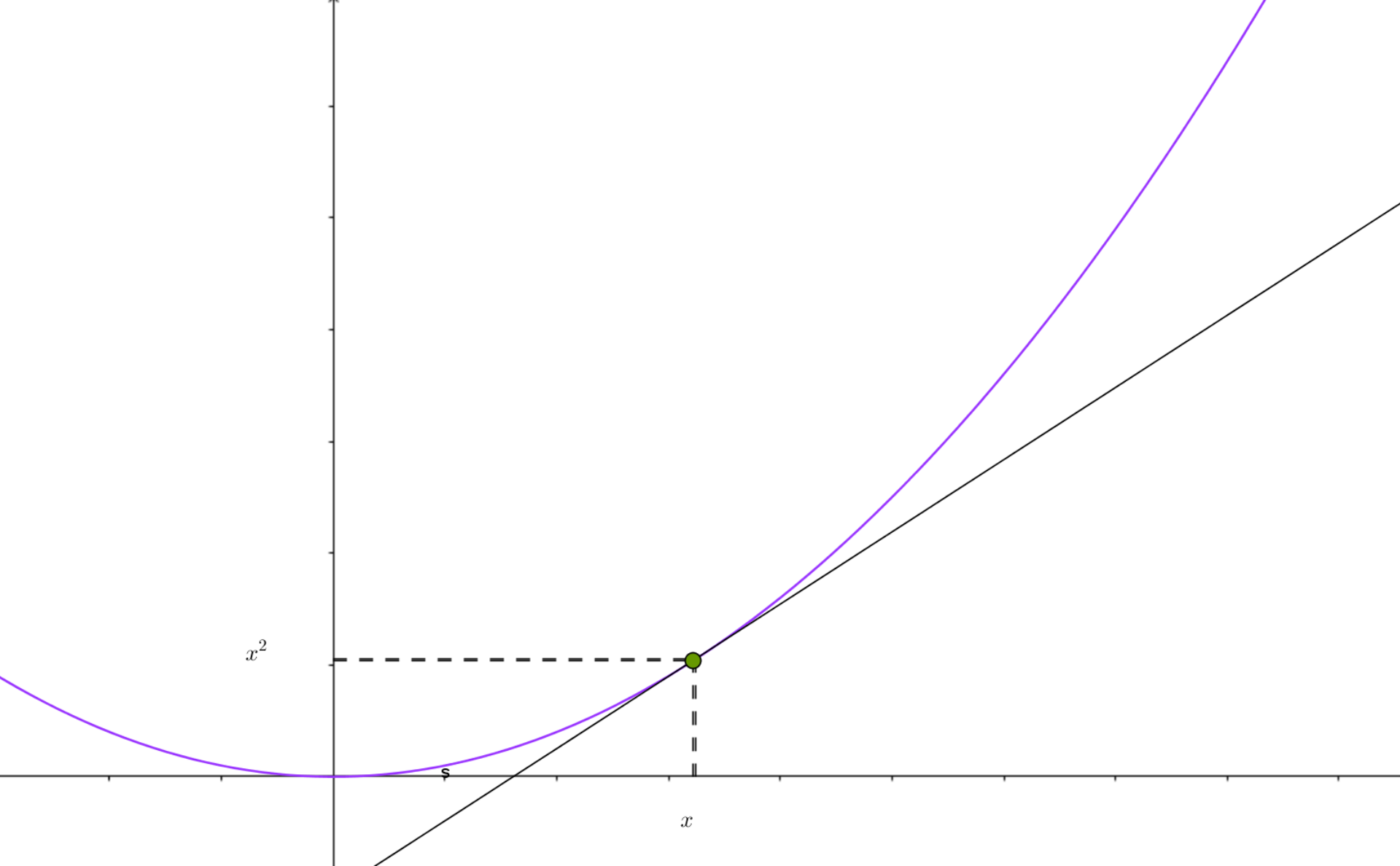
Vamos calcular a expressão de uma derivada:

Tomemos o caso de $y = x^2$.

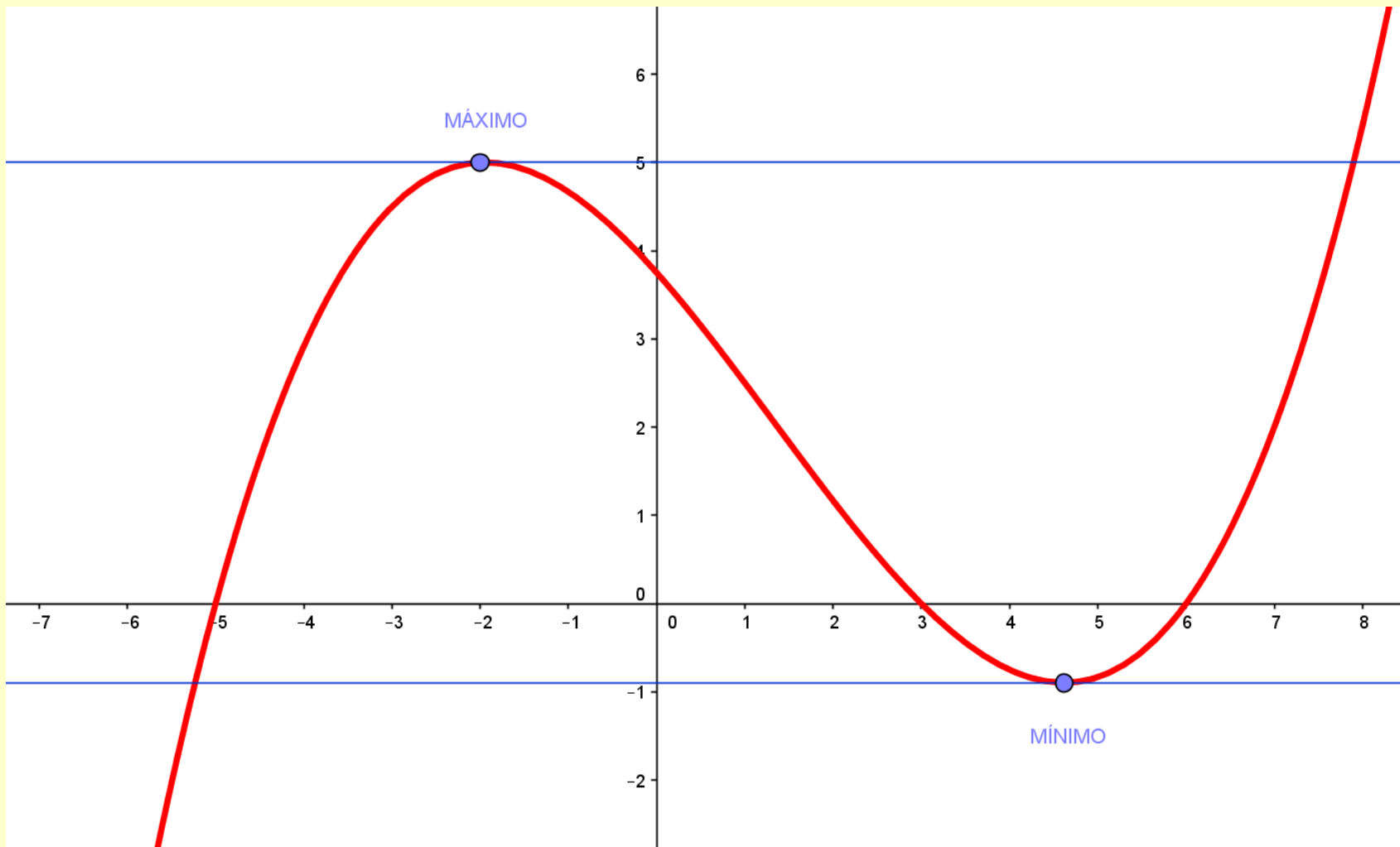




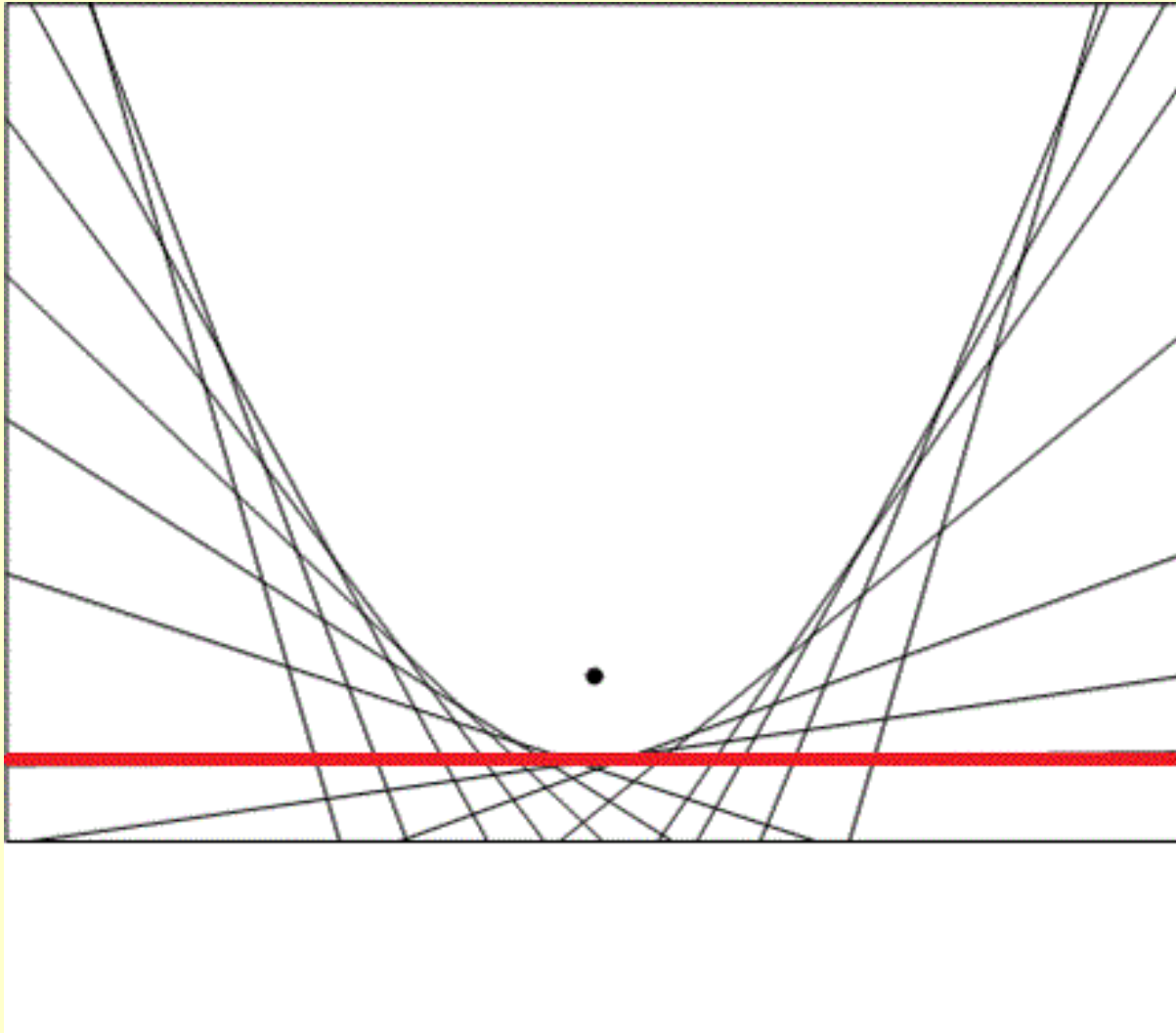
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - (x)^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - (x)^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$



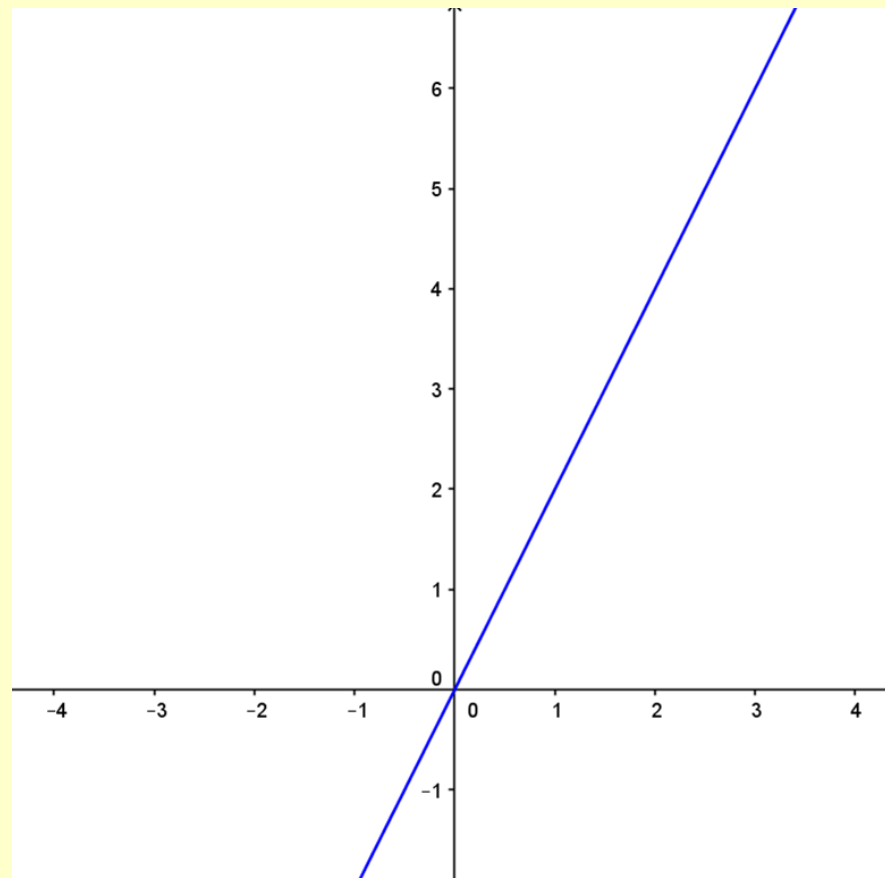
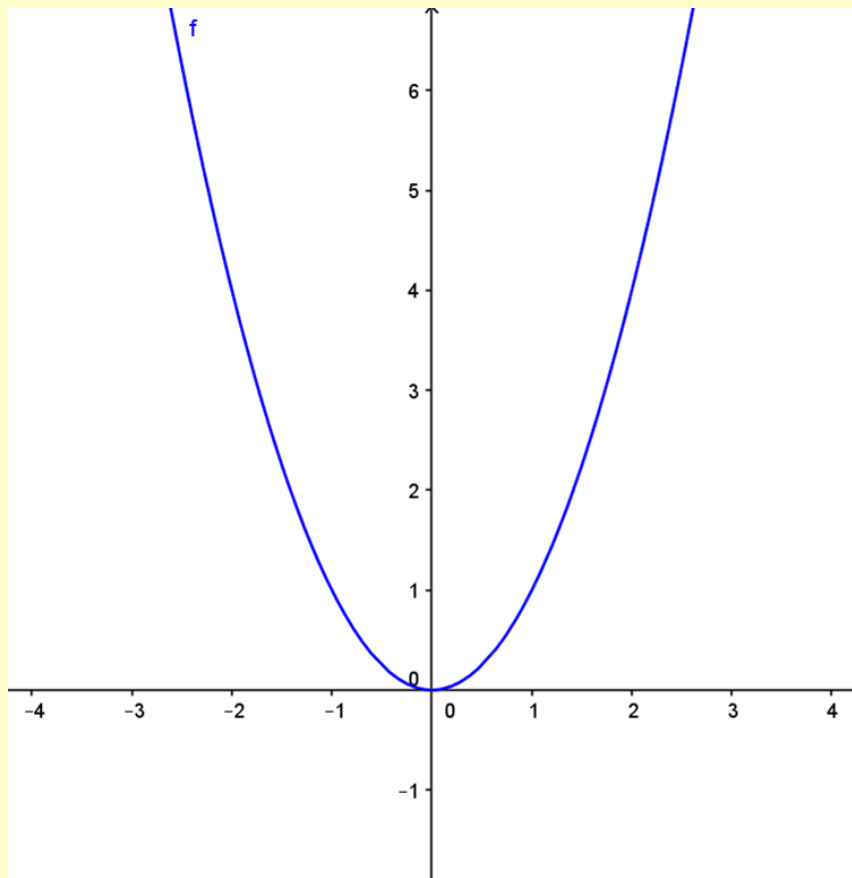
Quando $\Delta x \rightarrow 0$ temos a derivada de $y = x^2$ que é $\frac{dy}{dx} = 2x$.



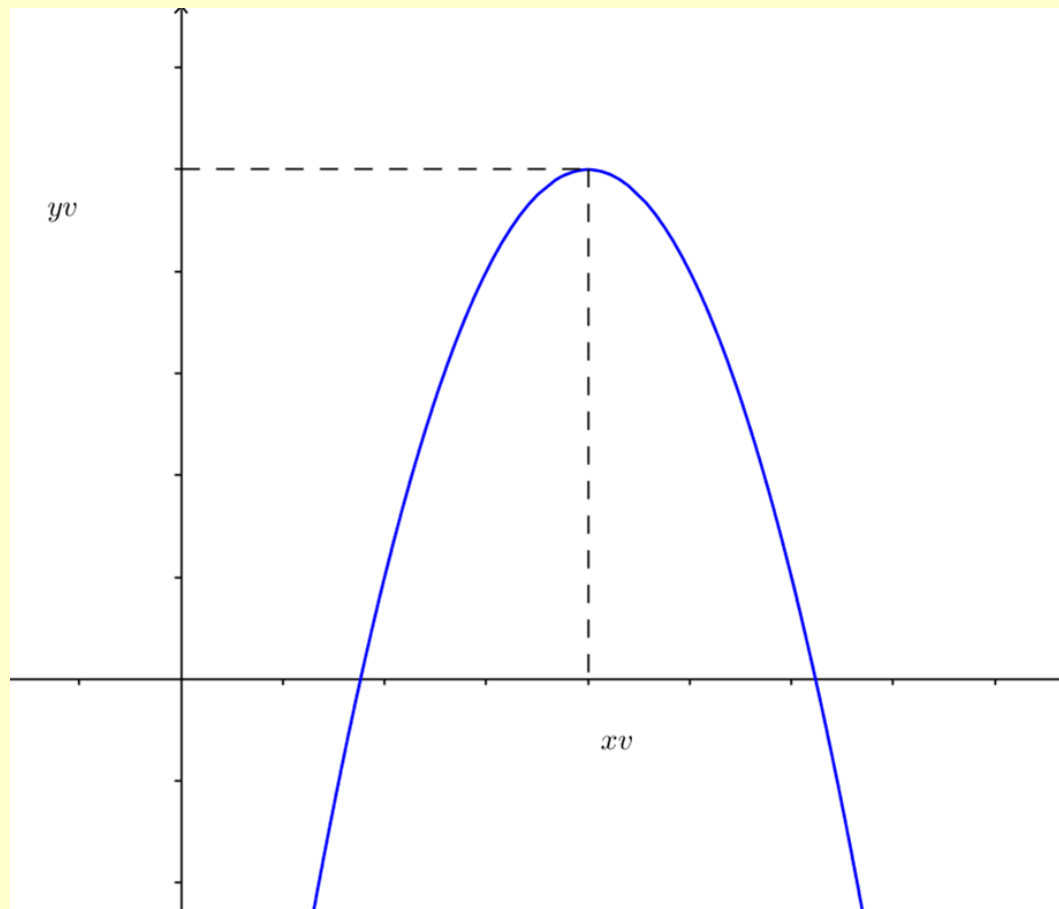
O Teorema de Fermat afirma que se uma função $y=f(x)$ possui um ponto de máximo ou mínimo local em algum $x=c$, então a derivada da função nesse ponto é zero.



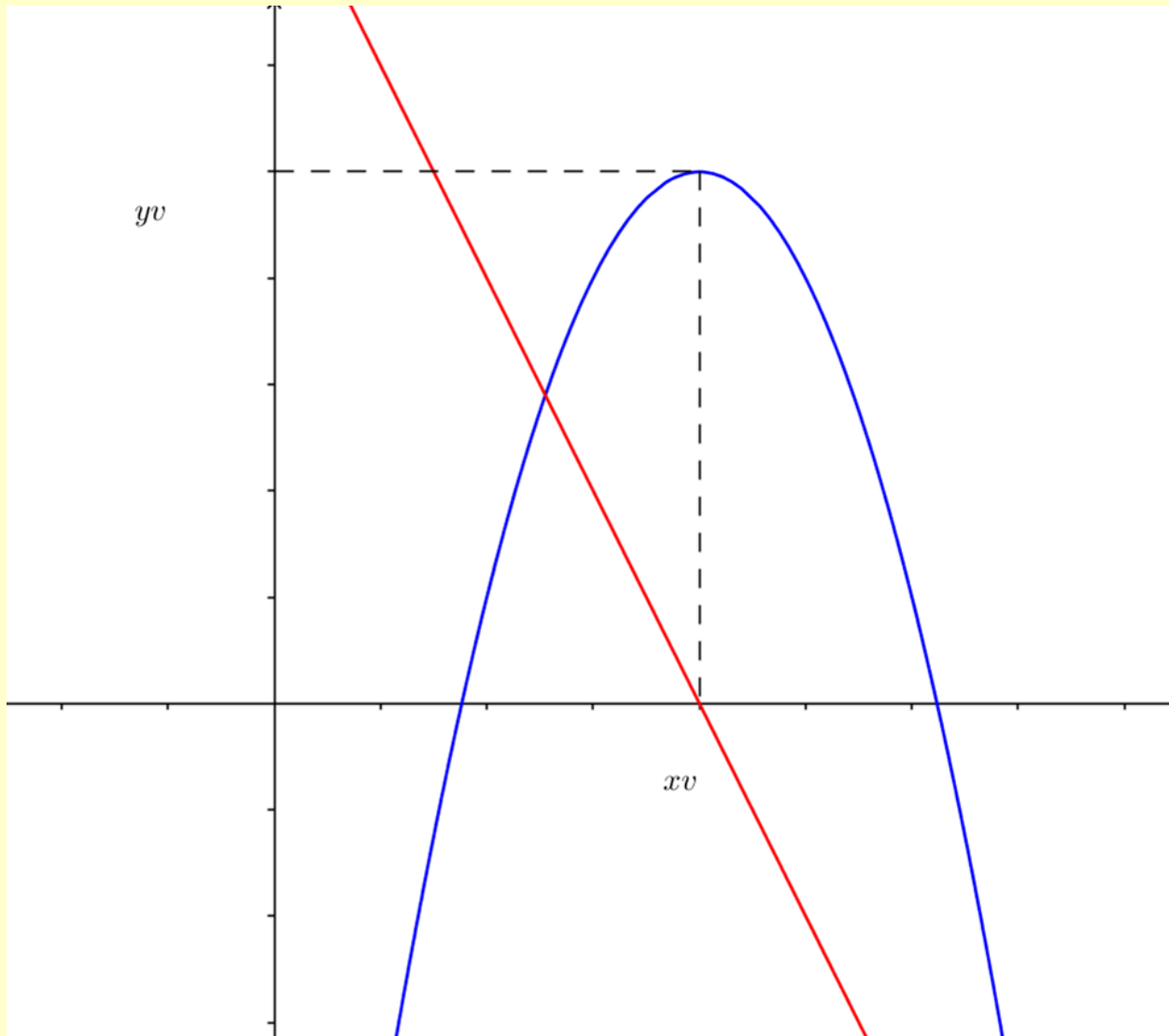
De fato é o que podemos ver na nossa dobradura.



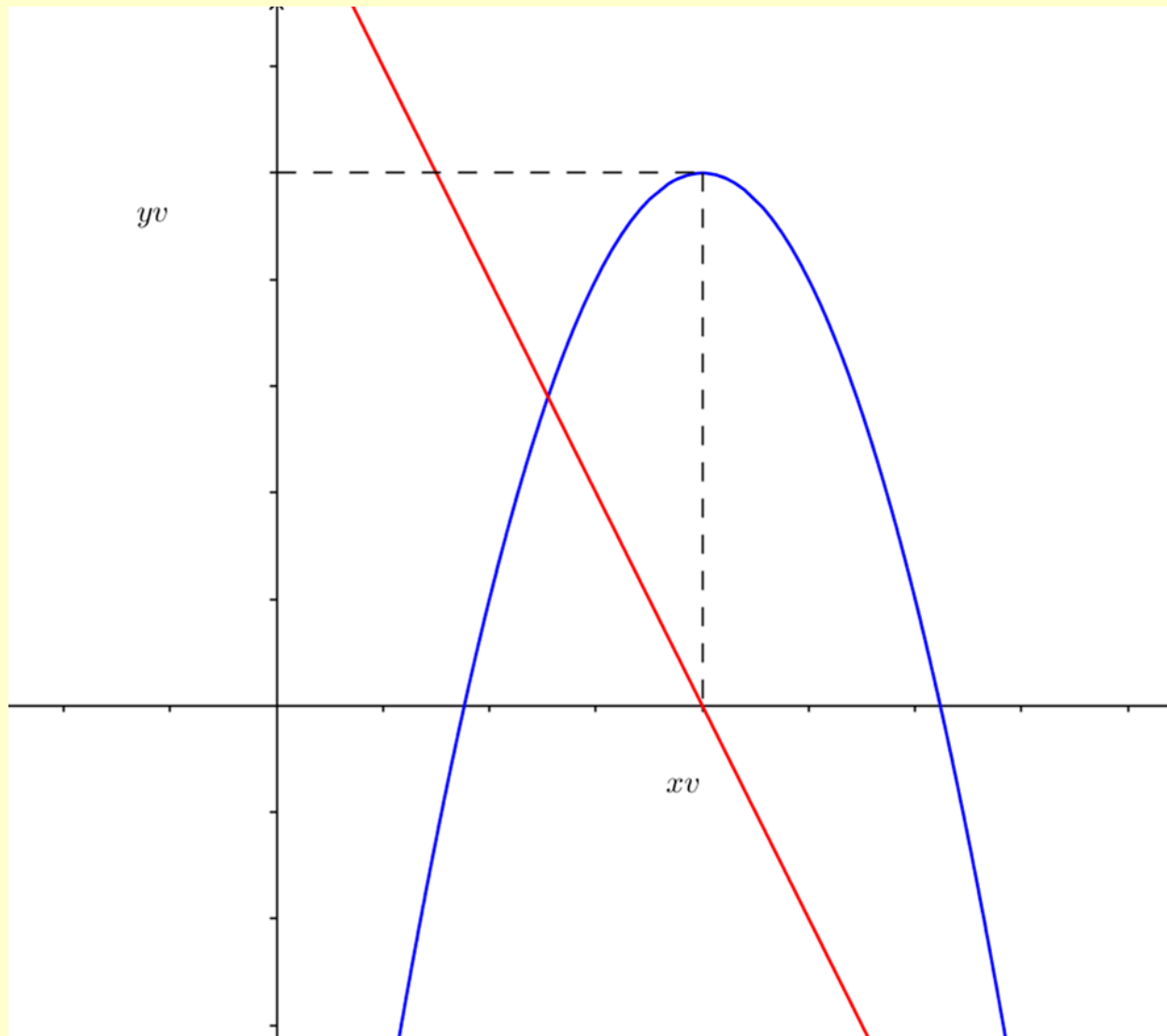
A função afim $y' = 2x$, derivada da função $y = x^2$, tem zero no próprio zero.



Em uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$,



Em uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, a derivada é a função $y' = 2ax + b$.



Fazendo $y' = 0$, temos $2ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$, que é a expressão do x do vértice.

A matemática grega considerava o efeito do movimento e das transformações nas formas geométricas.



Como aumenta a área de um quadrado quando seu lado aumenta?



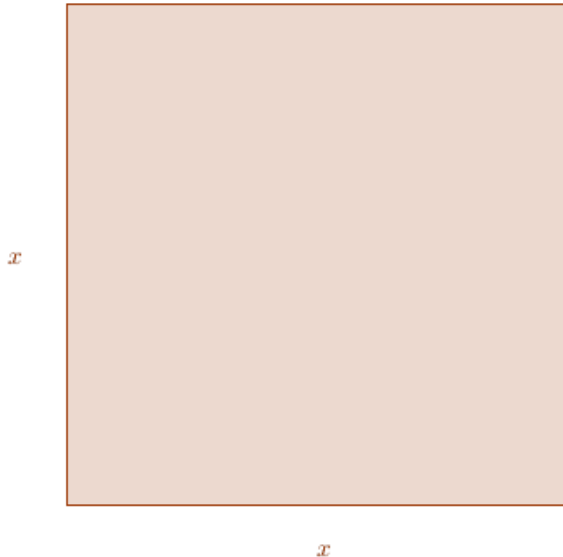
O aumento instantâneo da área do quadrado corresponde a duas vezes o lado.



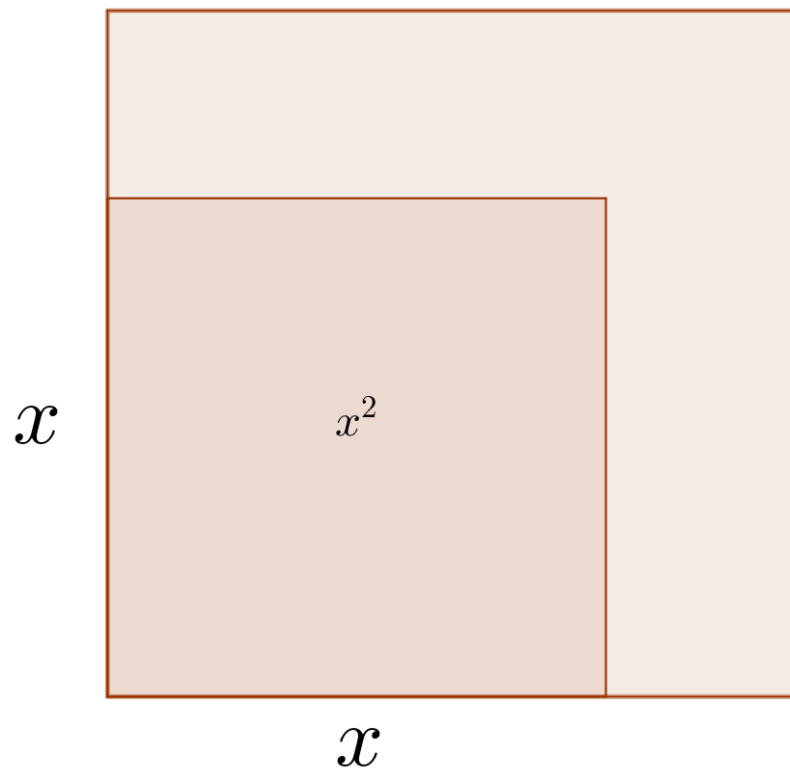
A taxa de variação instantânea da área é $2x$.

$$A(x) = x^2$$

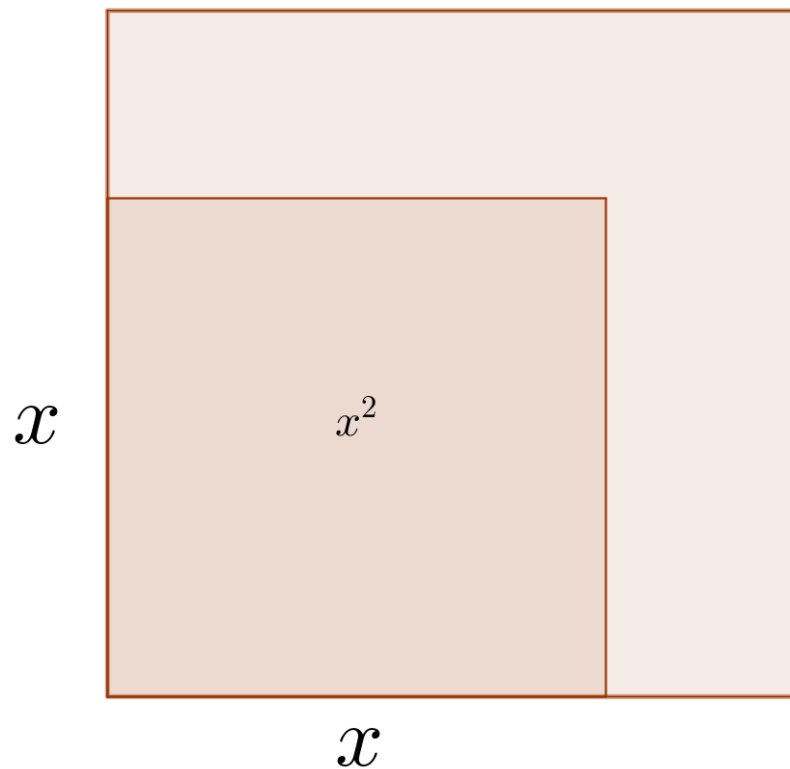
$$A'(x) = \frac{dA}{dx} = 2x$$



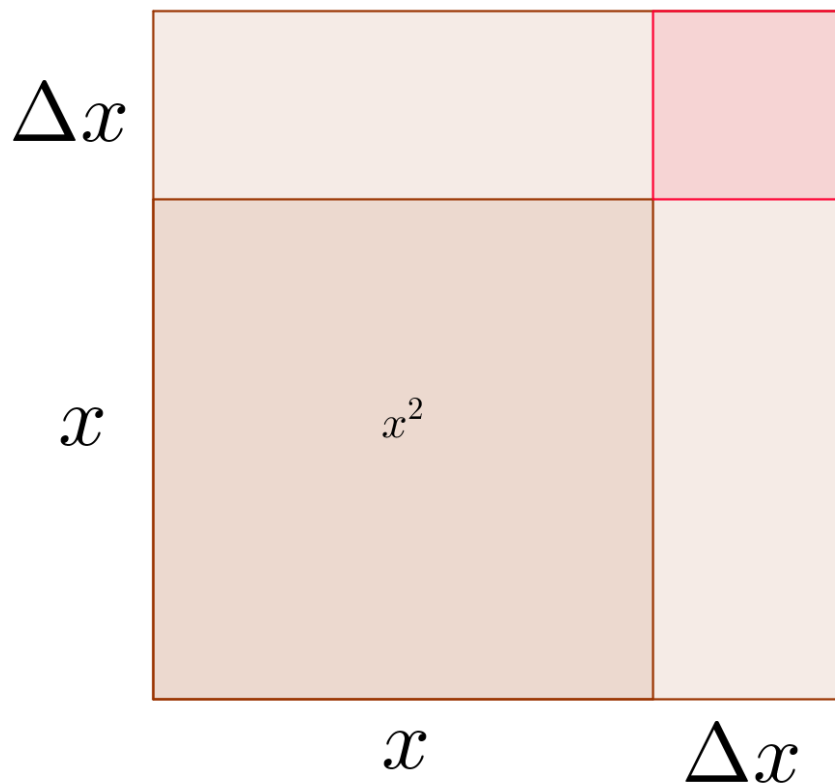
O aumento da área é a área da figura em forma de “L”.



O aumento da área é a área da figura em forma de “L”.

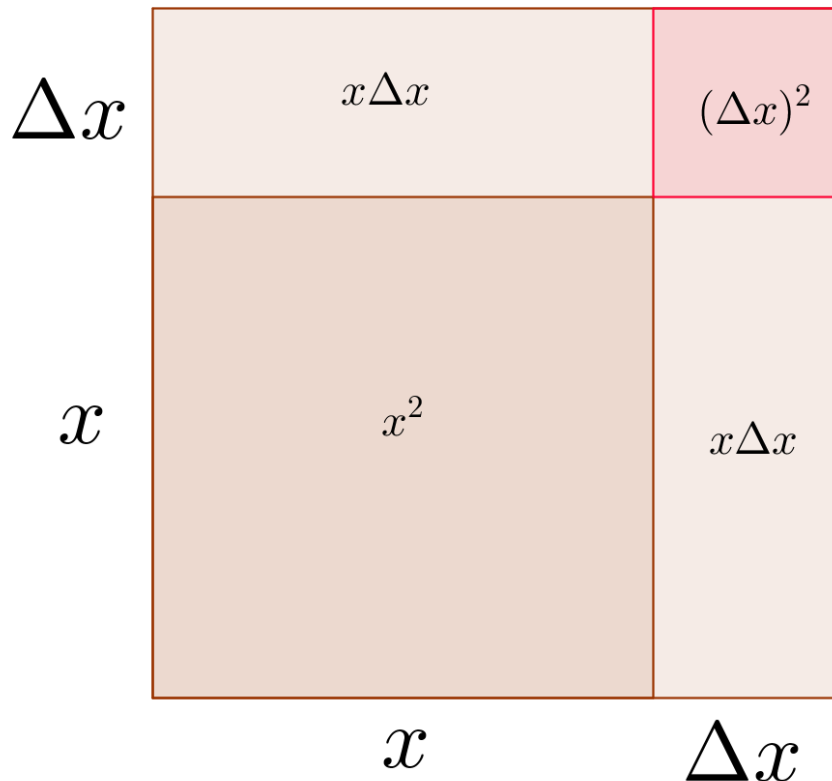


Essa área, ΔA , é dada por



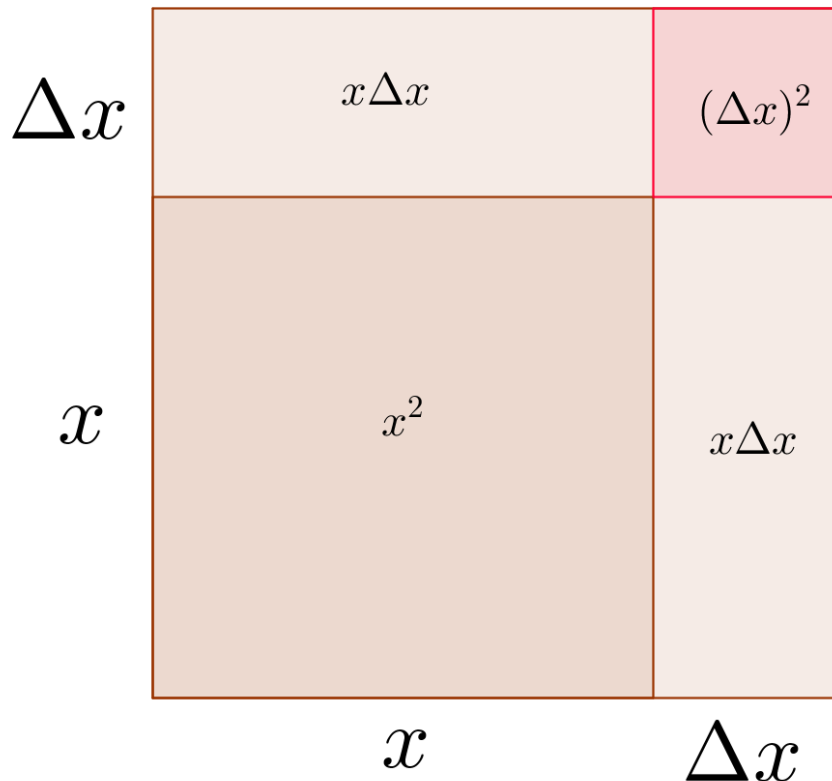
Essa área, ΔA , é dada por

$$\Delta A = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$



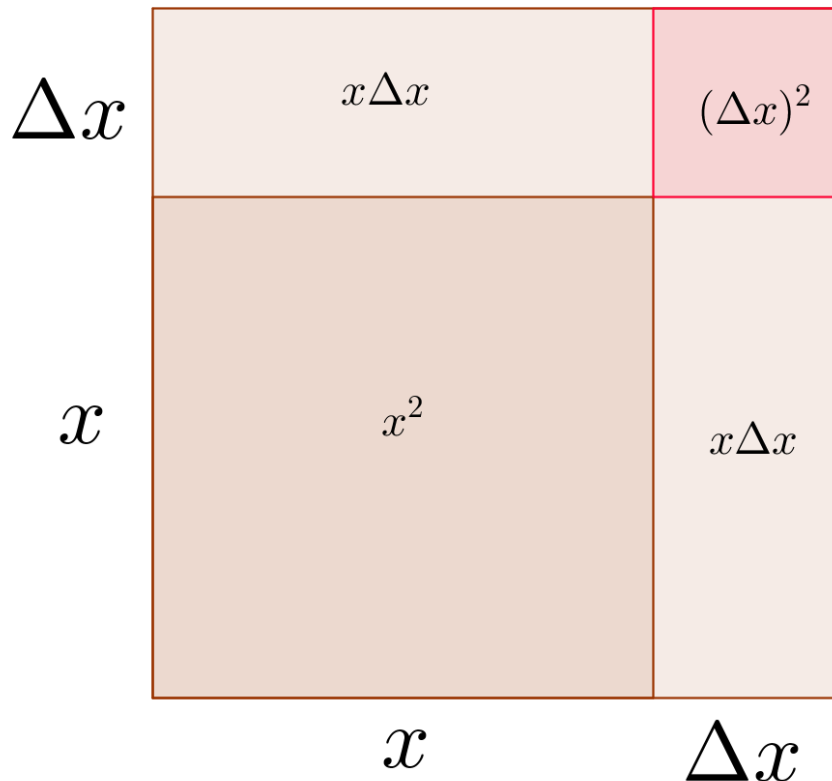
A taxa de aumento da área é

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$



A taxa de aumento da área é

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$



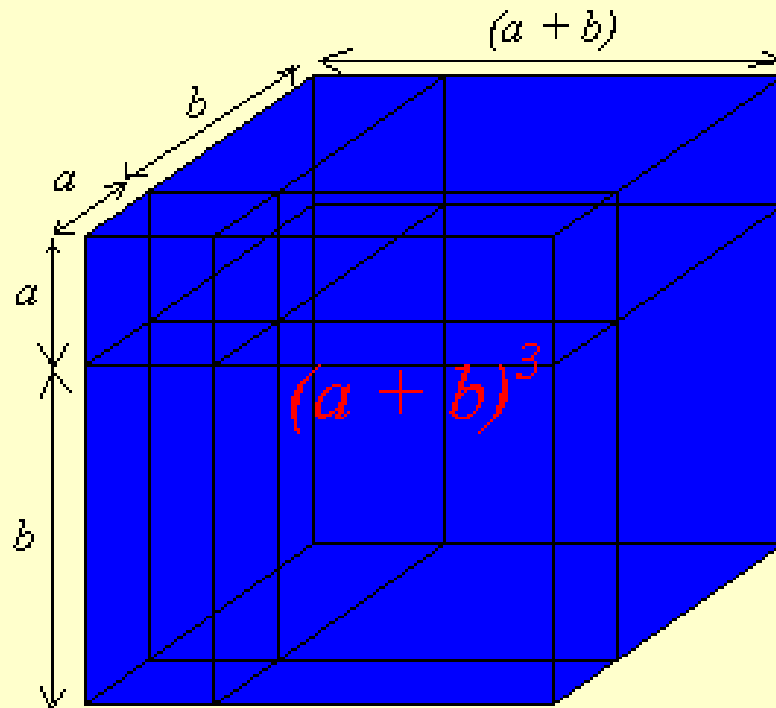
Fazendo $\Delta x \rightarrow 0$,

temos $\frac{\Delta A}{\Delta x} \rightarrow 2x$.

Portanto,

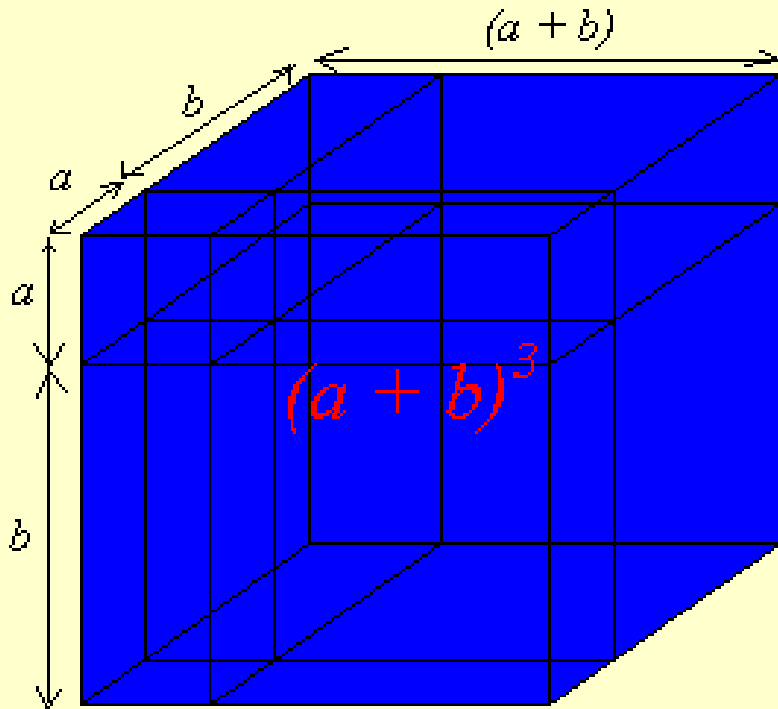
$$\frac{dA}{dx} = 2x.$$

No caso do volume do cubo de aresta x , cujo volume é $V(x) = x^3$, a taxa de variação instantânea é $3x^2$.



A taxa de variação do volume do cubo é

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - (x)^3}{\Delta x} = \frac{3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$



Fazendo $\Delta x \rightarrow 0$,

temos $\frac{\Delta V}{\Delta x} \rightarrow 3x^2$.

Portanto,

$$\frac{dV}{dx} = 3x^2.$$

Como aumenta a área de um círculo quando seu raio r aumenta?



A taxa de aumento da área do círculo é

$$\frac{\Delta A}{\Delta r} = \frac{\pi(r + \Delta r)^2 - \pi(r)^2}{\Delta r} = \frac{2\pi r \Delta r + (\Delta r)^2}{\Delta r}$$

Fazendo $\Delta r \rightarrow 0$,

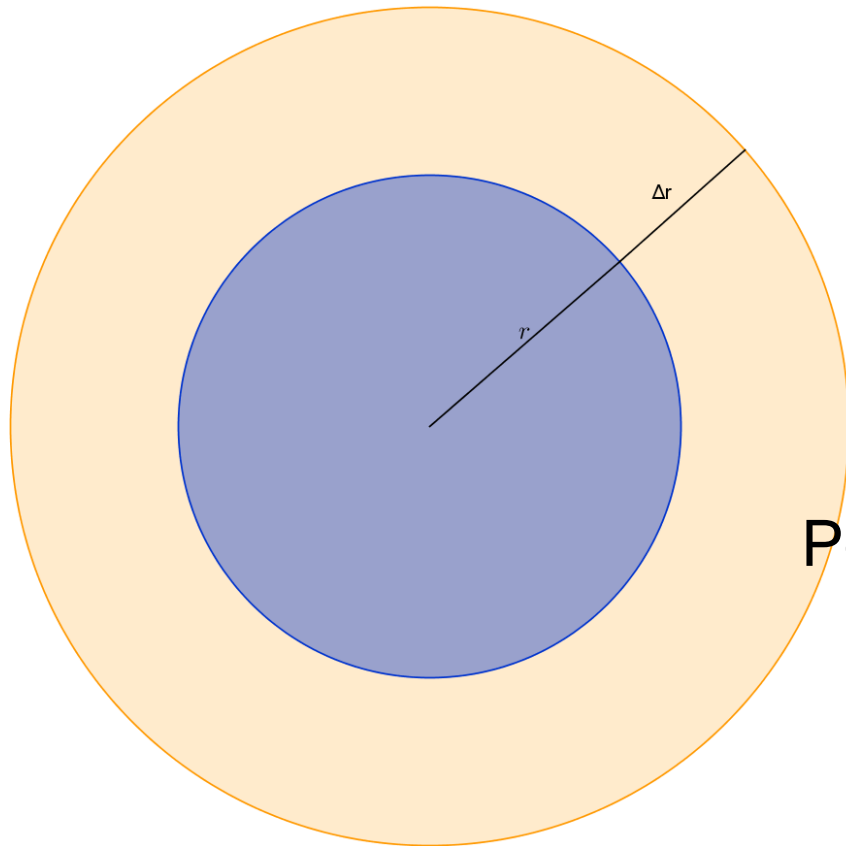
temos $\frac{\Delta A}{\Delta r} \rightarrow 2\pi r$.

Portanto,

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r.$$

A taxa de aumento da área do círculo é

$$\frac{\Delta A}{\Delta r} = \frac{\pi(r + \Delta r)^2 - \pi(r)^2}{\Delta r} = \frac{2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2}{\Delta r}$$



Fazendo $\Delta r \rightarrow 0$,

temos $\frac{\Delta A}{\Delta r} \rightarrow 2\pi r$.

Portanto,

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r.$$

Para uma esfera de raio r , cujo volume é dado por $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, a taxa de variação é

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{\frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi(r)^3}{\Delta r} = \frac{4\pi(r^2\Delta r + r(\Delta r)^2 + \frac{1}{3}(\Delta r)^3)}{\Delta r}$$

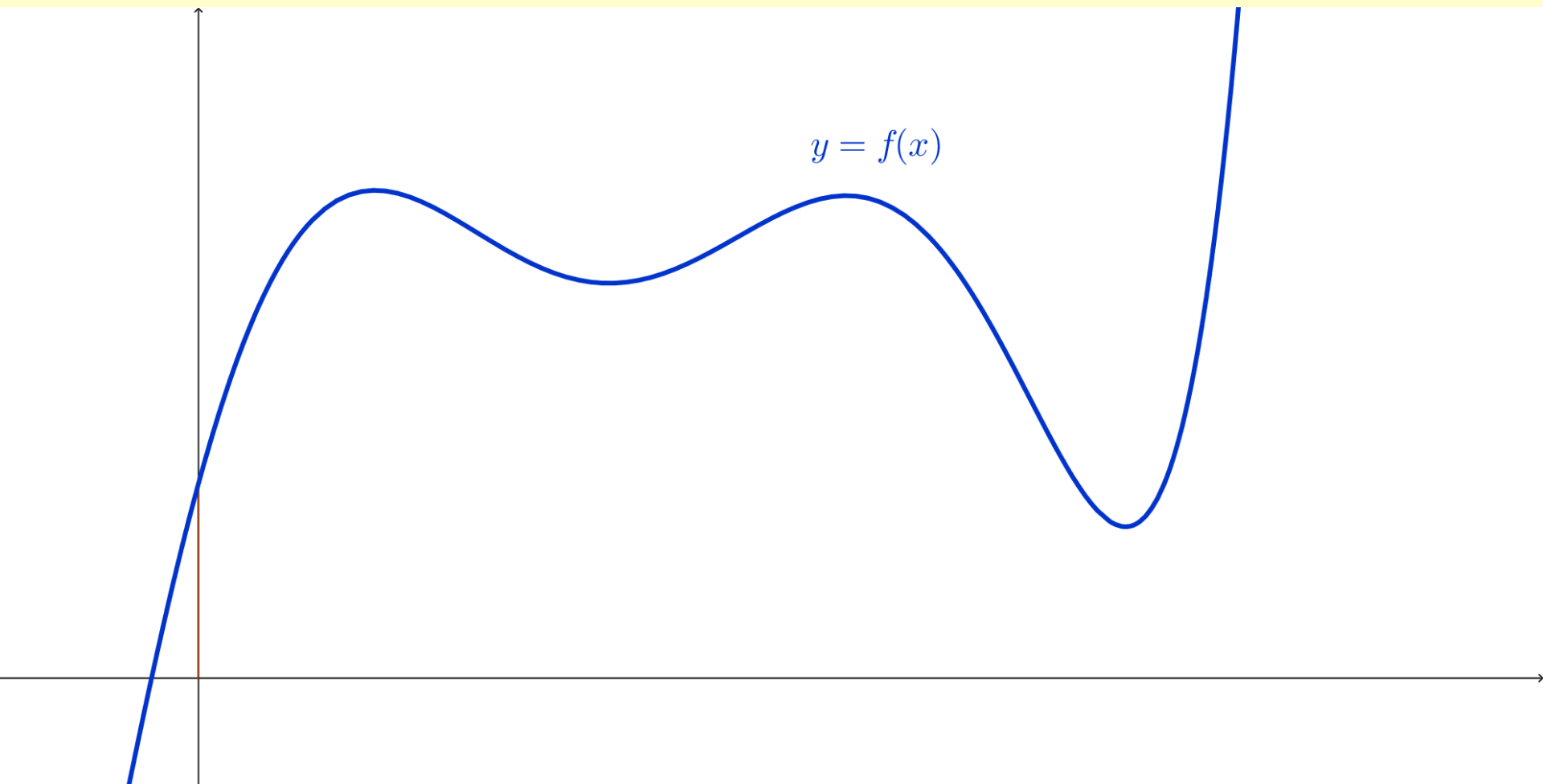


Fazendo $\Delta r \rightarrow 0$,

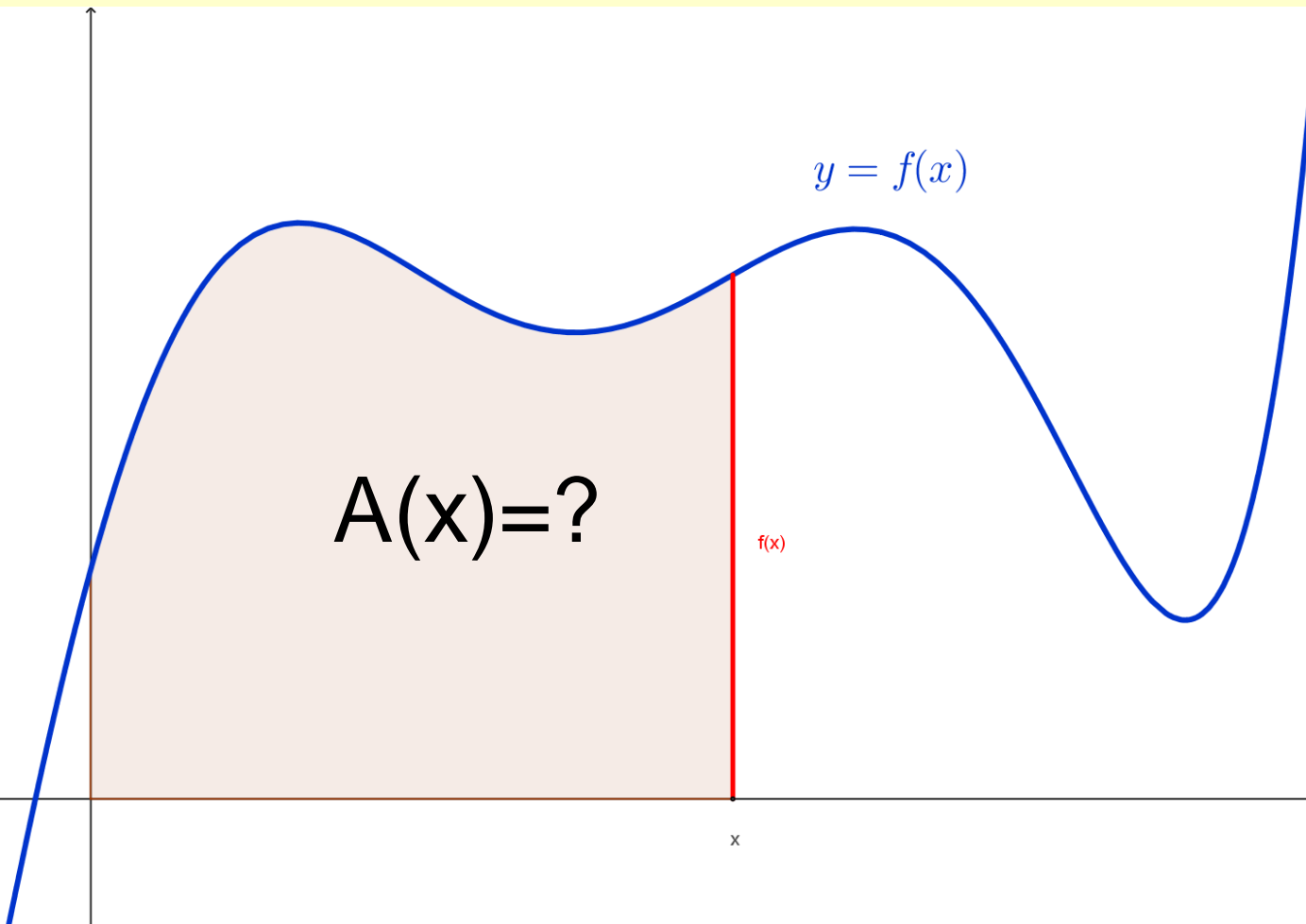
$$\text{temos } \frac{\Delta V}{\Delta r} \rightarrow 4\pi r^2.$$

$$\text{Portanto, } \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2.$$

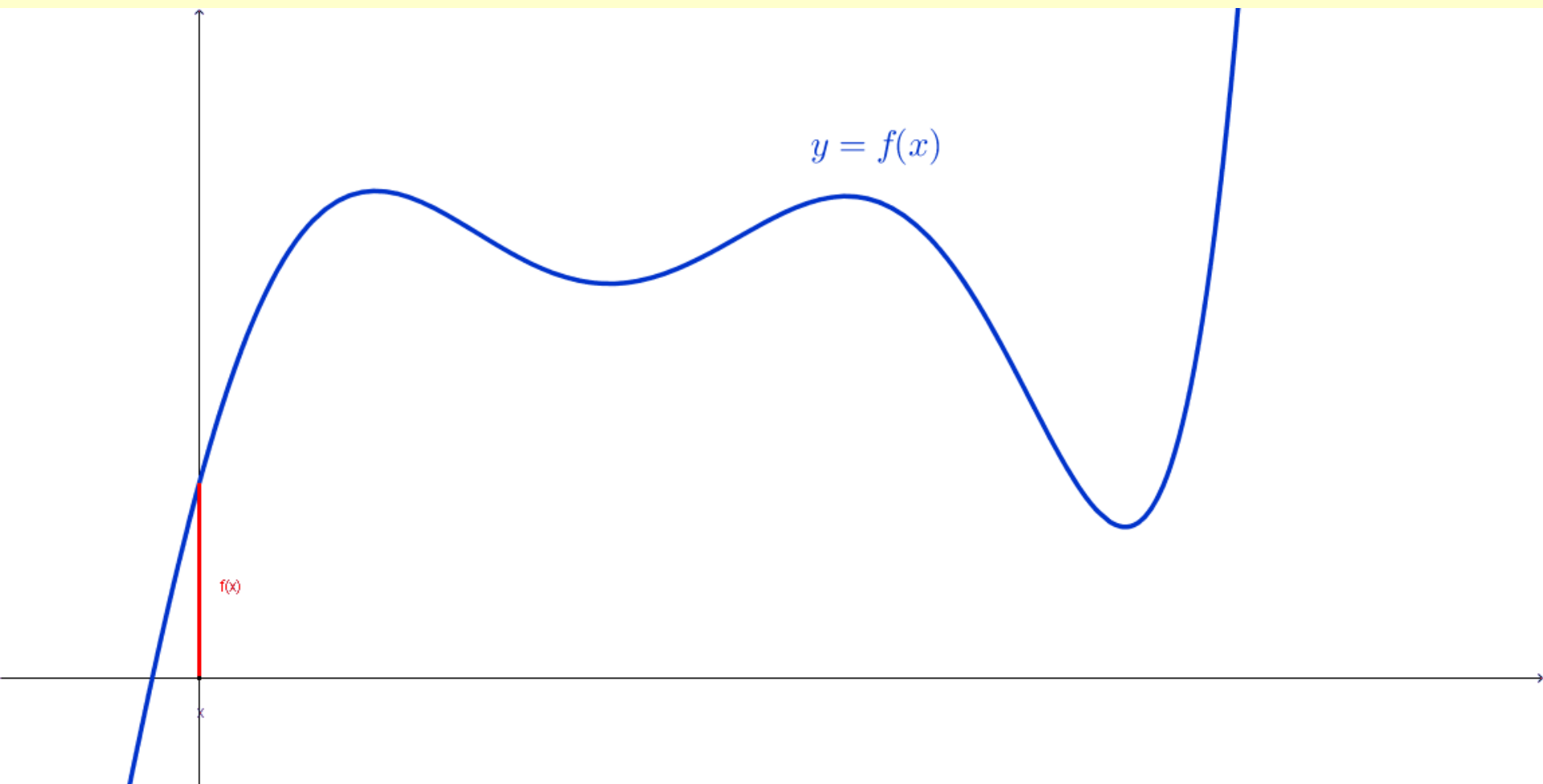
Como varia a área definida sob o gráfico de uma função?



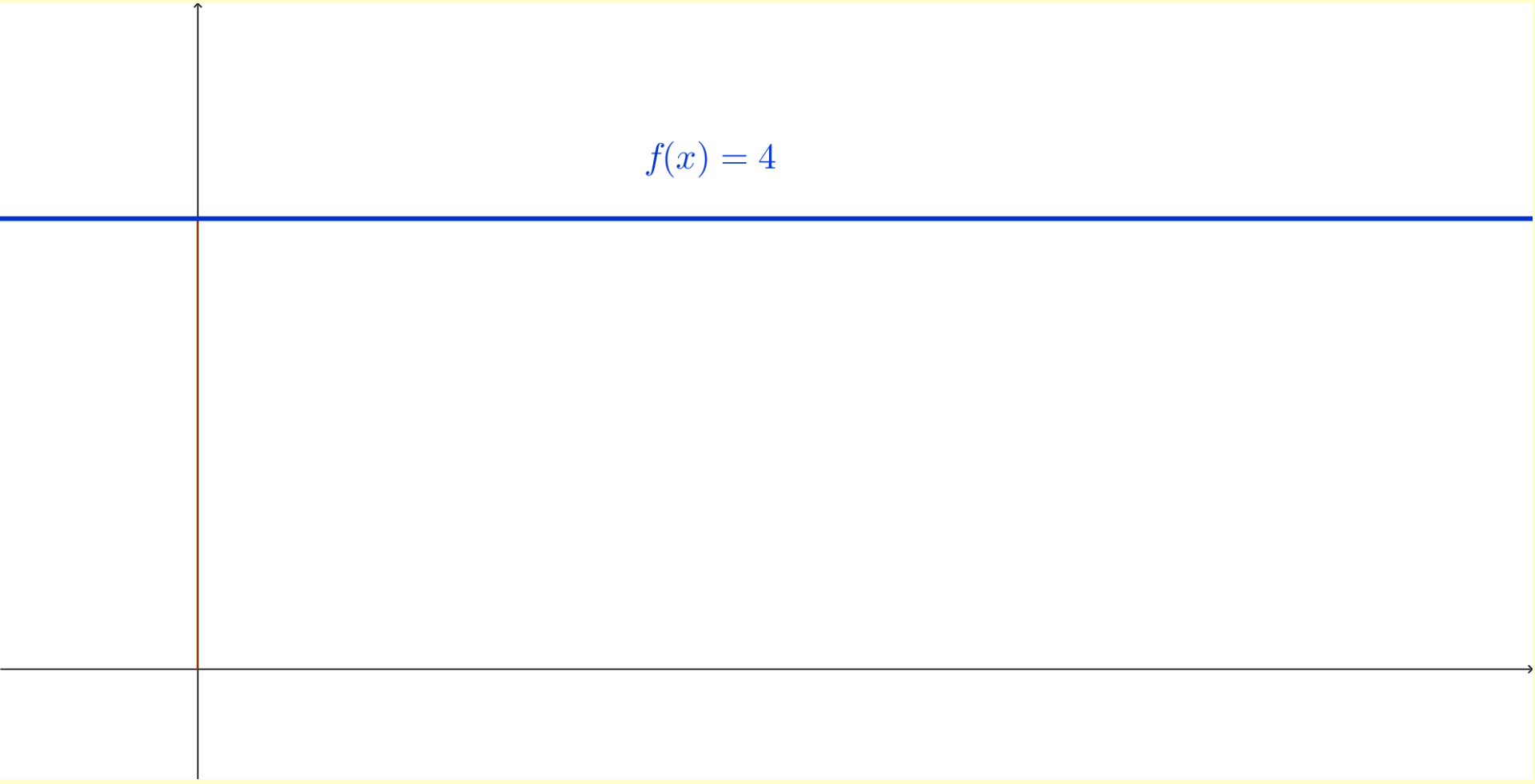
Como varia a área de definida sob o gráfico de uma função?



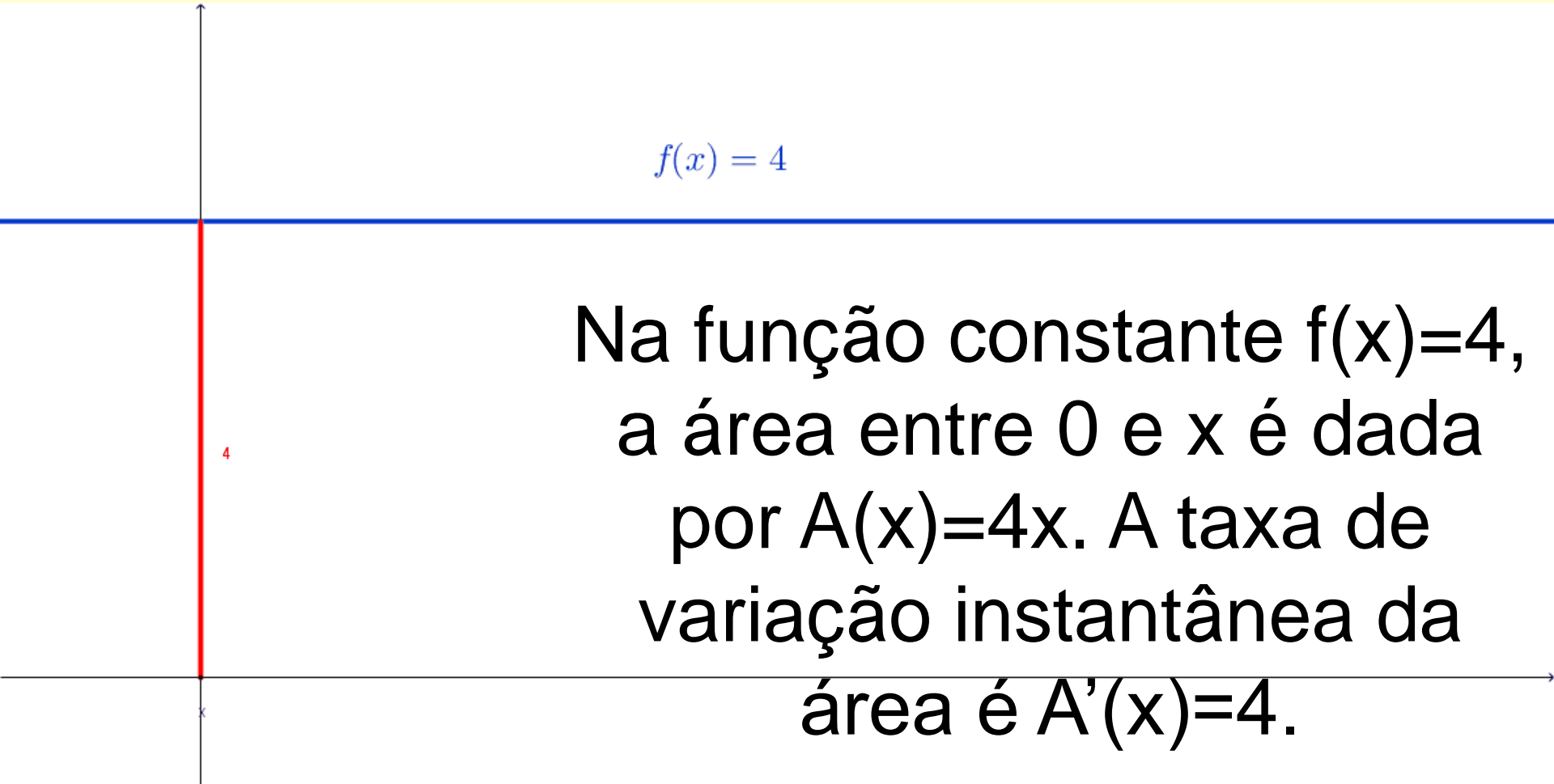
A variação instantânea da área $A(x)$ é
 $A'(x)=f(x)$.



Como varia a área de definida sob o gráfico de uma função?


$$f(x) = 4$$

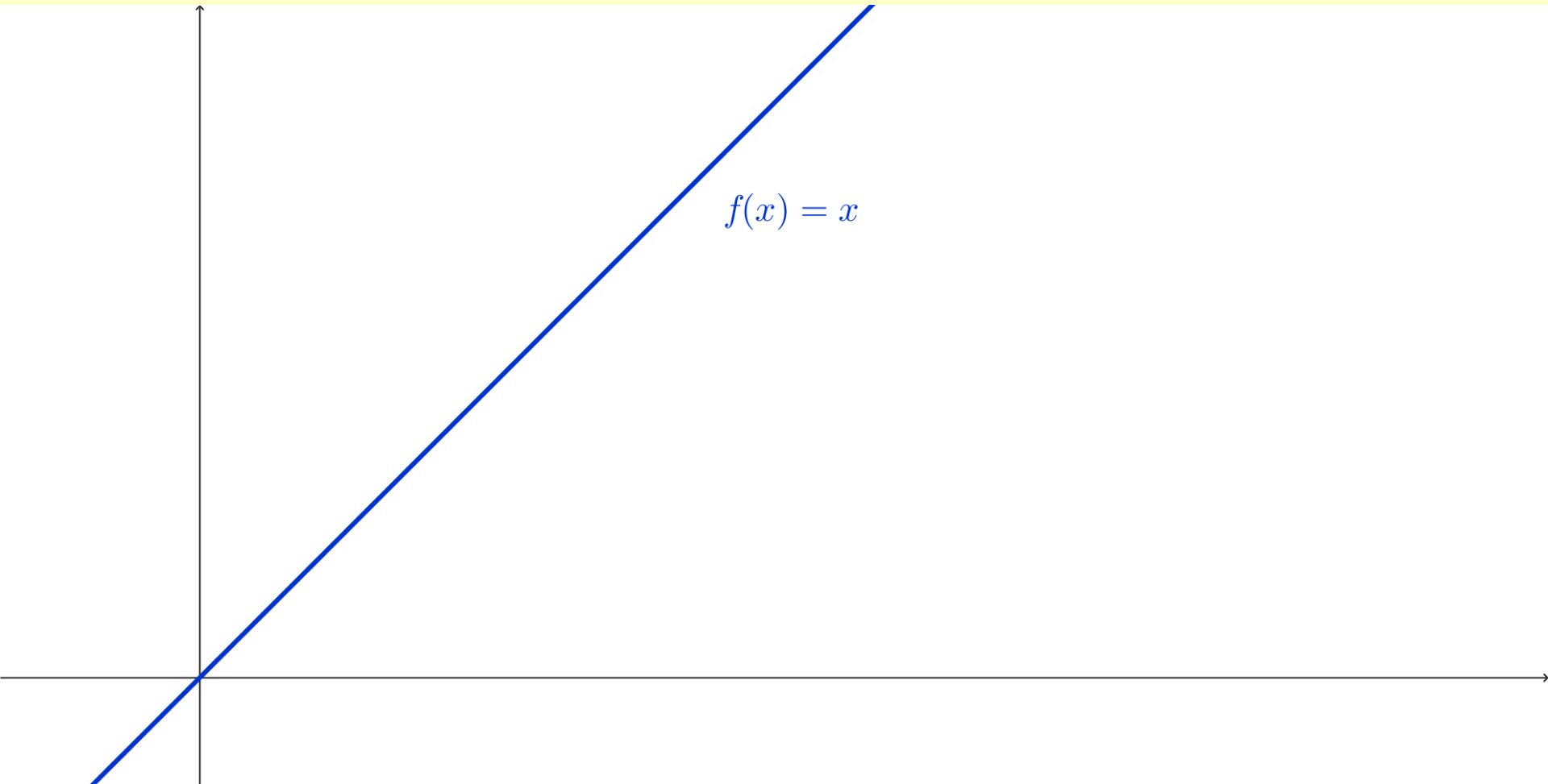
Como varia a área de definida sob o gráfico de uma função?


$$f(x) = 4$$

Na função constante $f(x)=4$, a área entre 0 e x é dada por $A(x)=4x$. A taxa de variação instantânea da área é $A'(x)=4$.

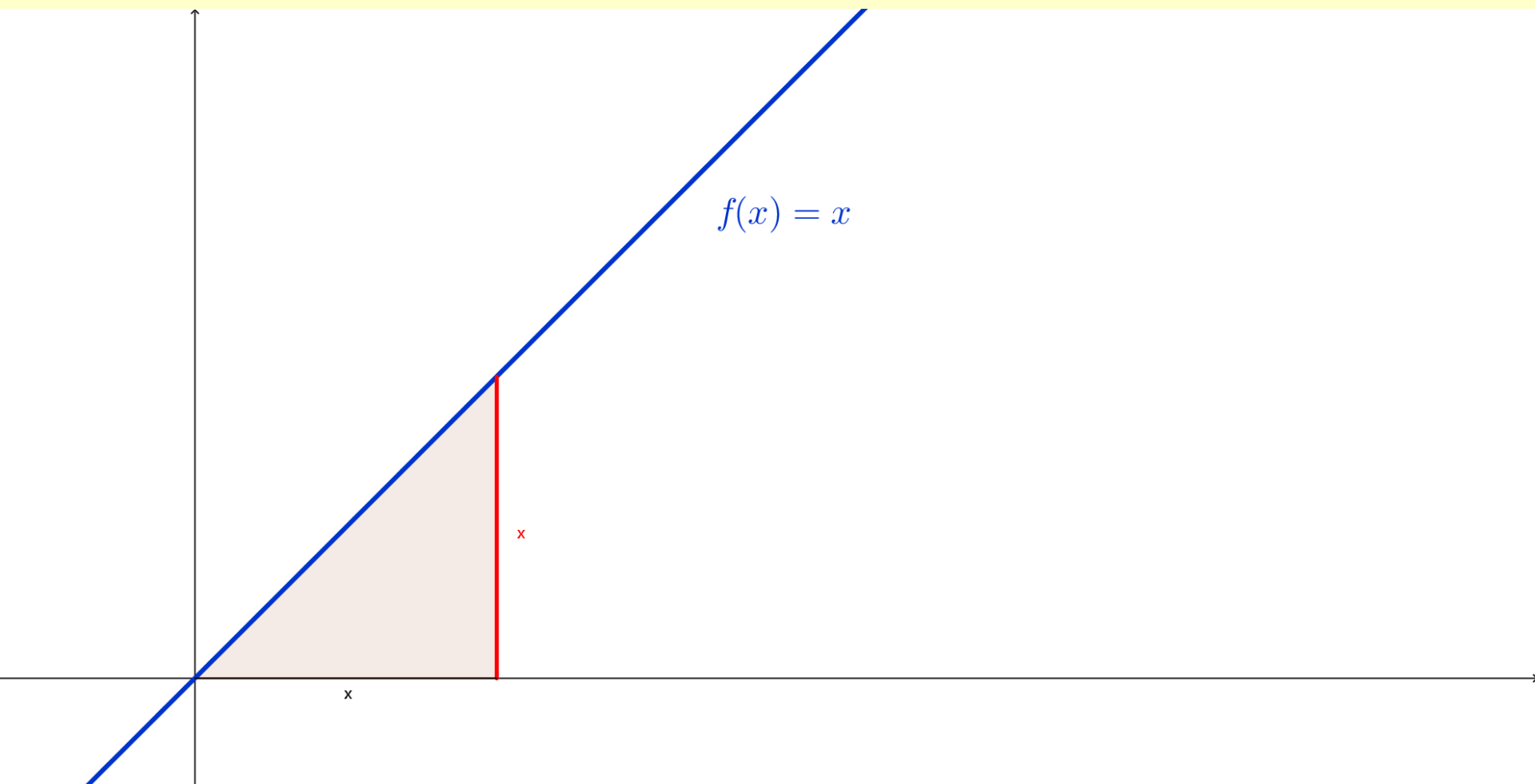
Na função linear $f(x)=x$, a área entre 0 e x

$$\text{é } A(x) = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}.$$



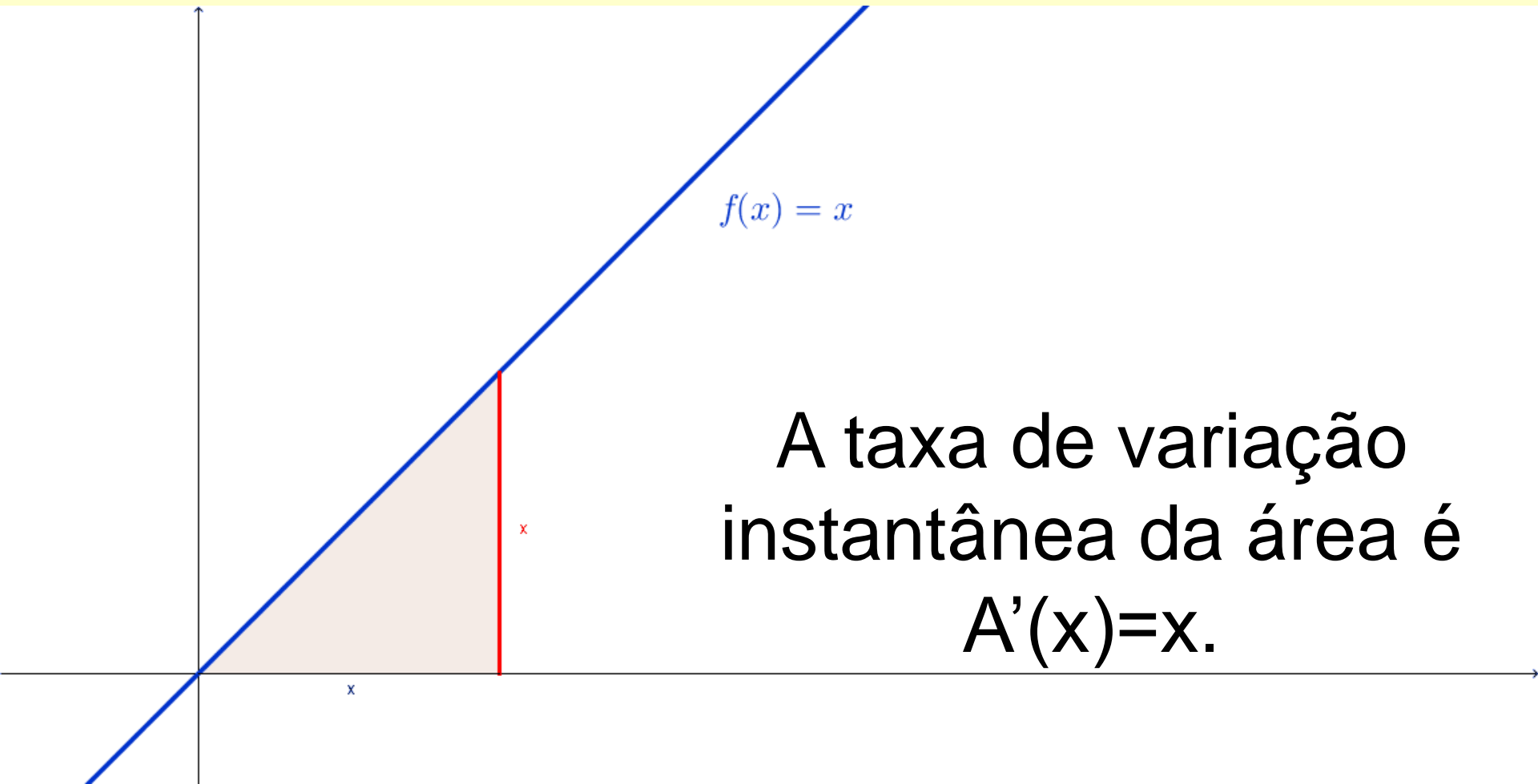
Na função linear $f(x)=x$, a área entre 0 e x

$$\text{é } A(x) = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}.$$



Na função linear $f(x)=x$, a área entre 0 e x

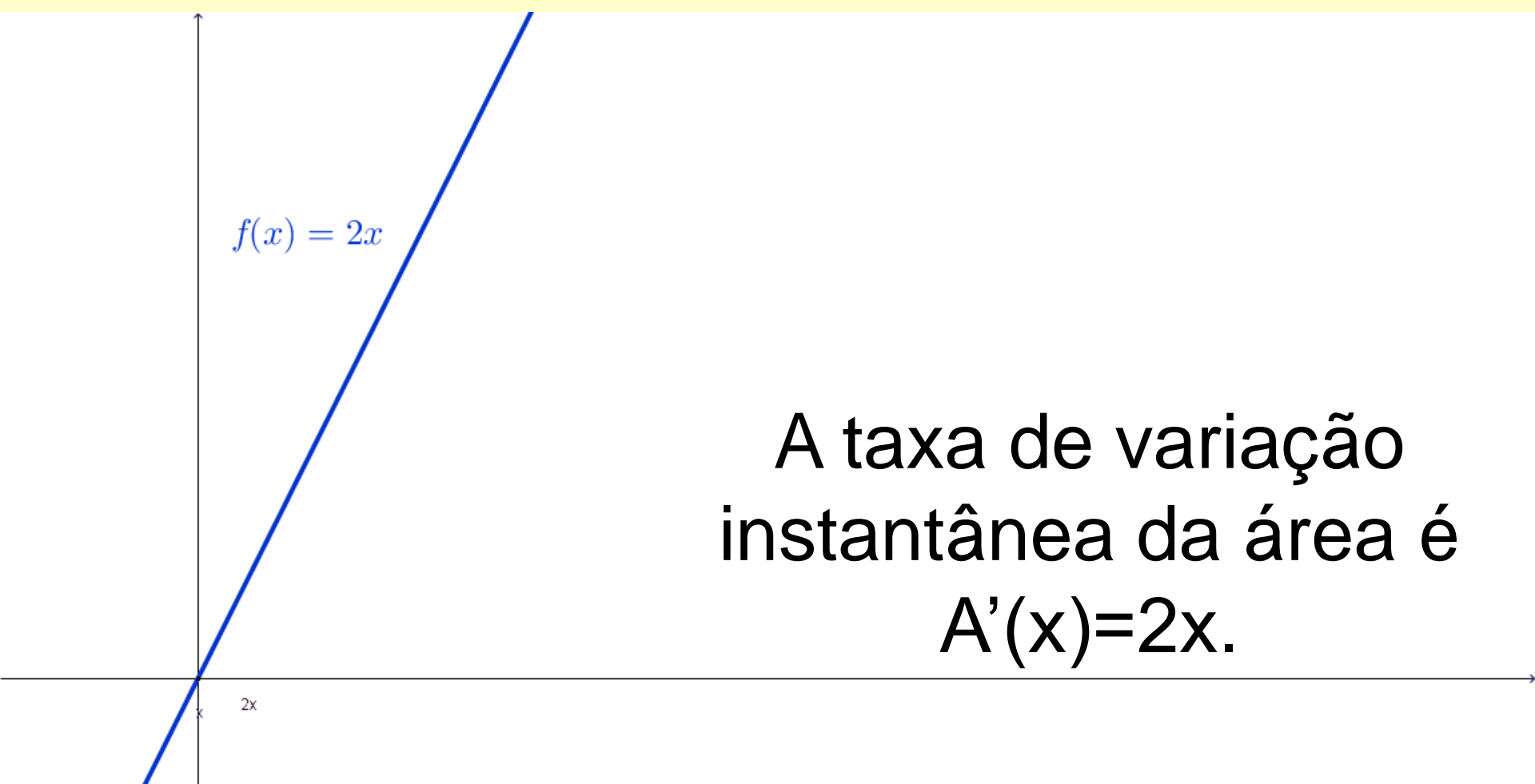
$$\text{é } A(x) = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}.$$



A taxa de variação instantânea da área é $A'(x)=x$.

Na função $f(x)=2x$, a área entre 0 e x é

$$A(x) = \frac{x \cdot 2x}{2} = x^2.$$

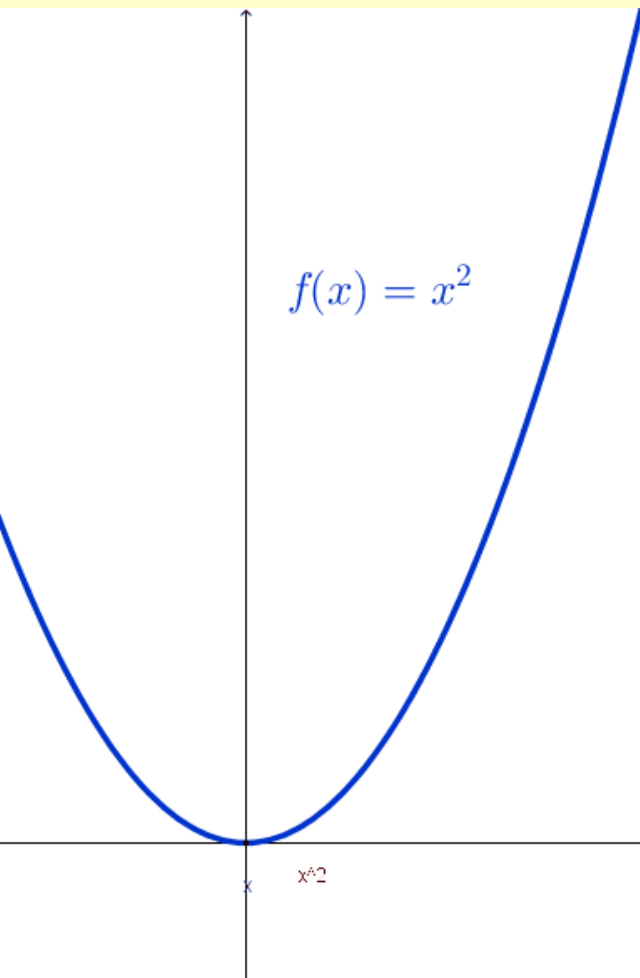


$f(x) = 2x$

A taxa de variação instantânea da área é

$$A'(x)=2x.$$

Na função $f(x) = x^2$, não conhecemos a área entre 0 e x .



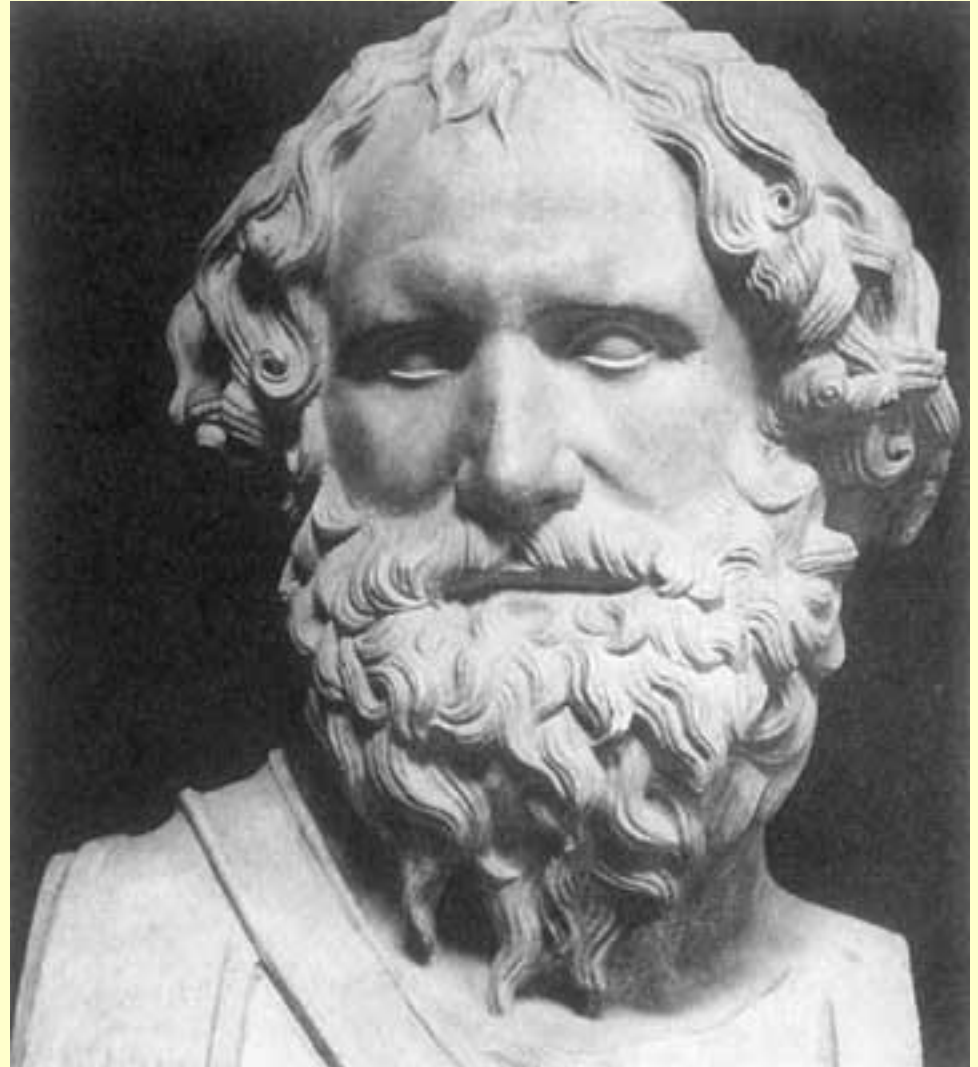
Mas conhecemos a taxa de variação instantânea dessa área:

$$A'(x) = x^2.$$

Descobrir a função área a partir da sua taxa de variação instantânea é integrar a função.



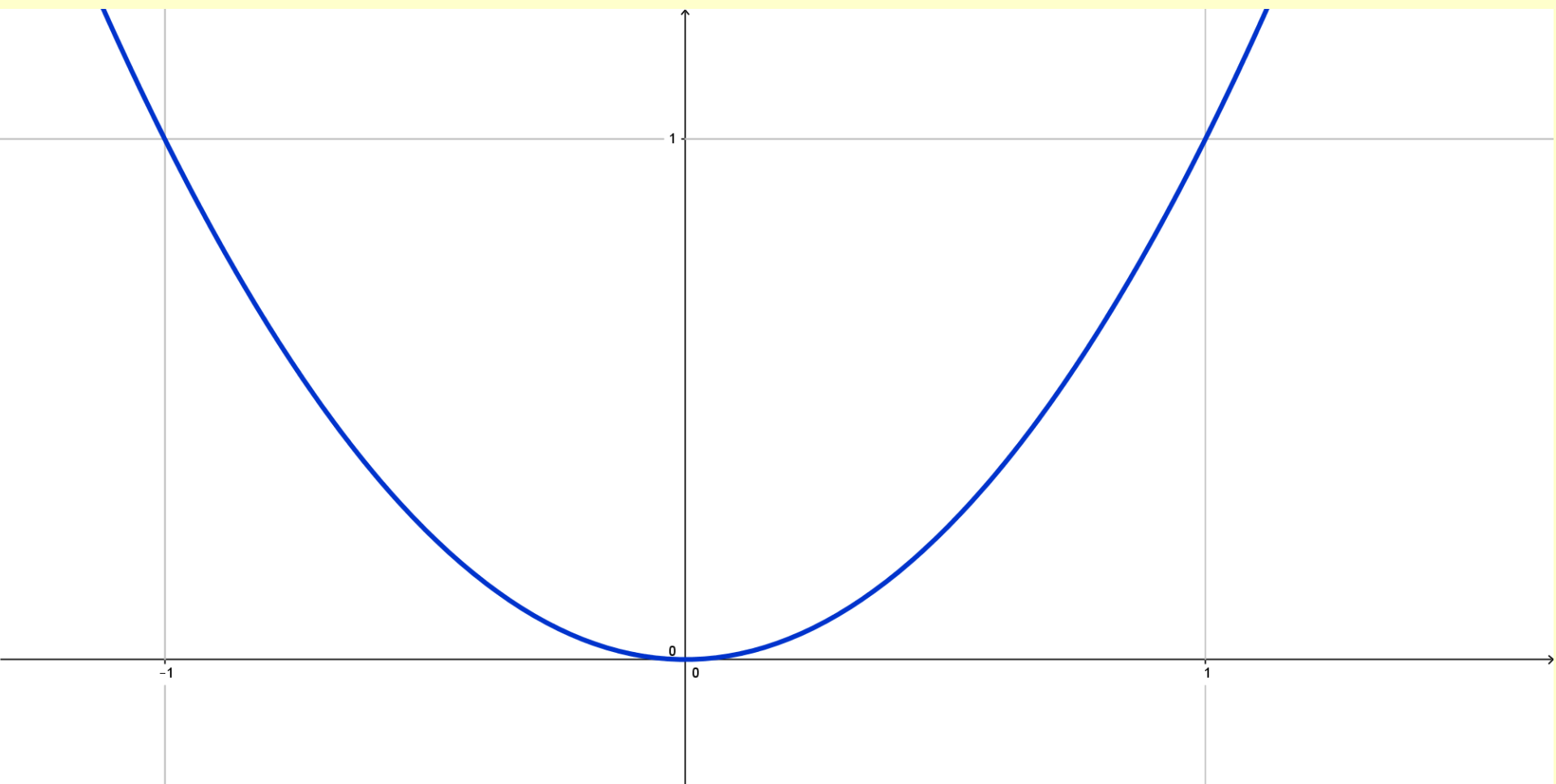
Arquimedes aplicou a ideia da decomposição e composição de figuras e calculou a primeira integral, da função
 $f(x) = x^2$.



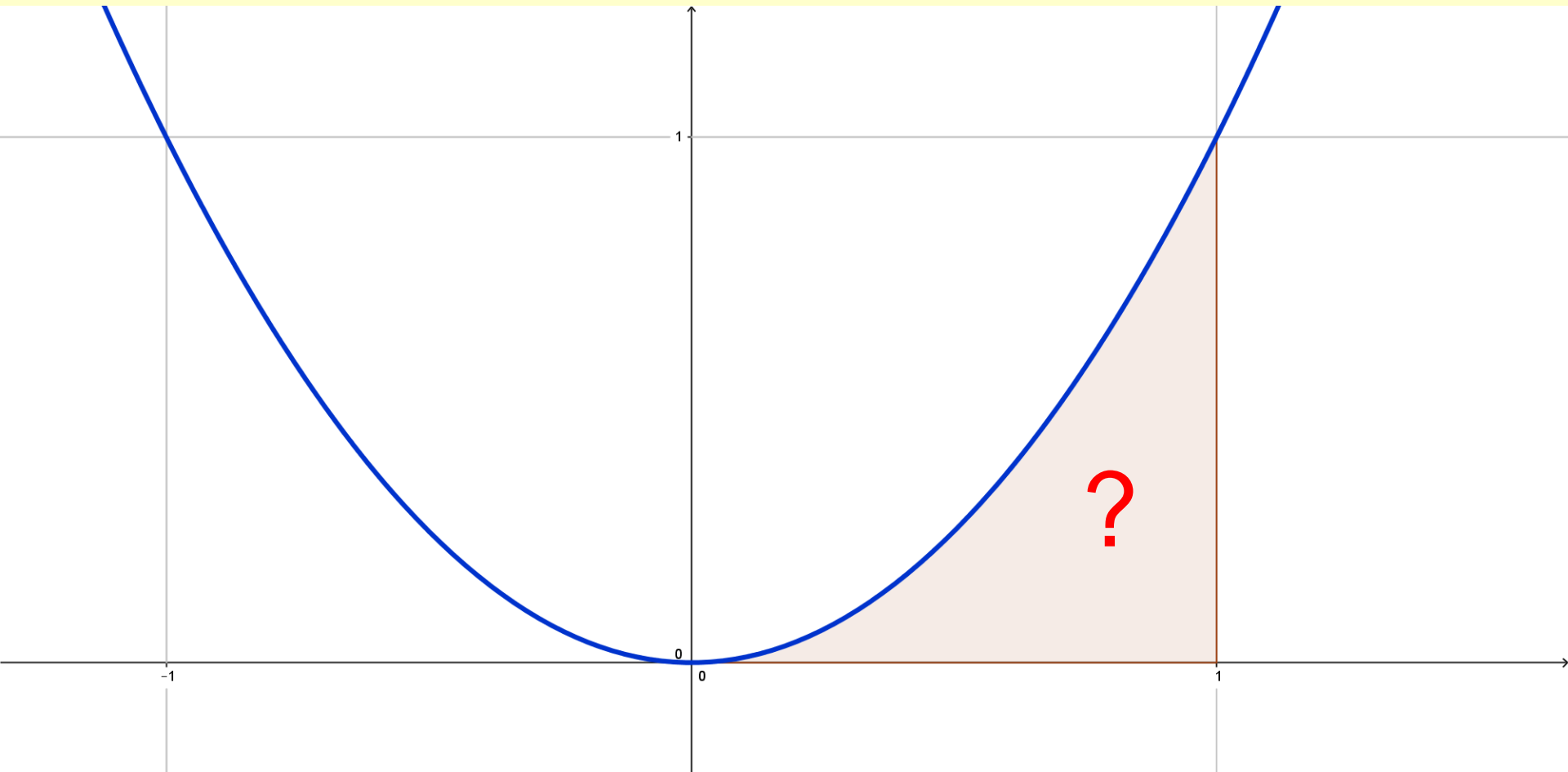
Arquimedes de Siracusa (287-212 aC)

O problema resolvido por Arquimedes
pode ser entendido como:

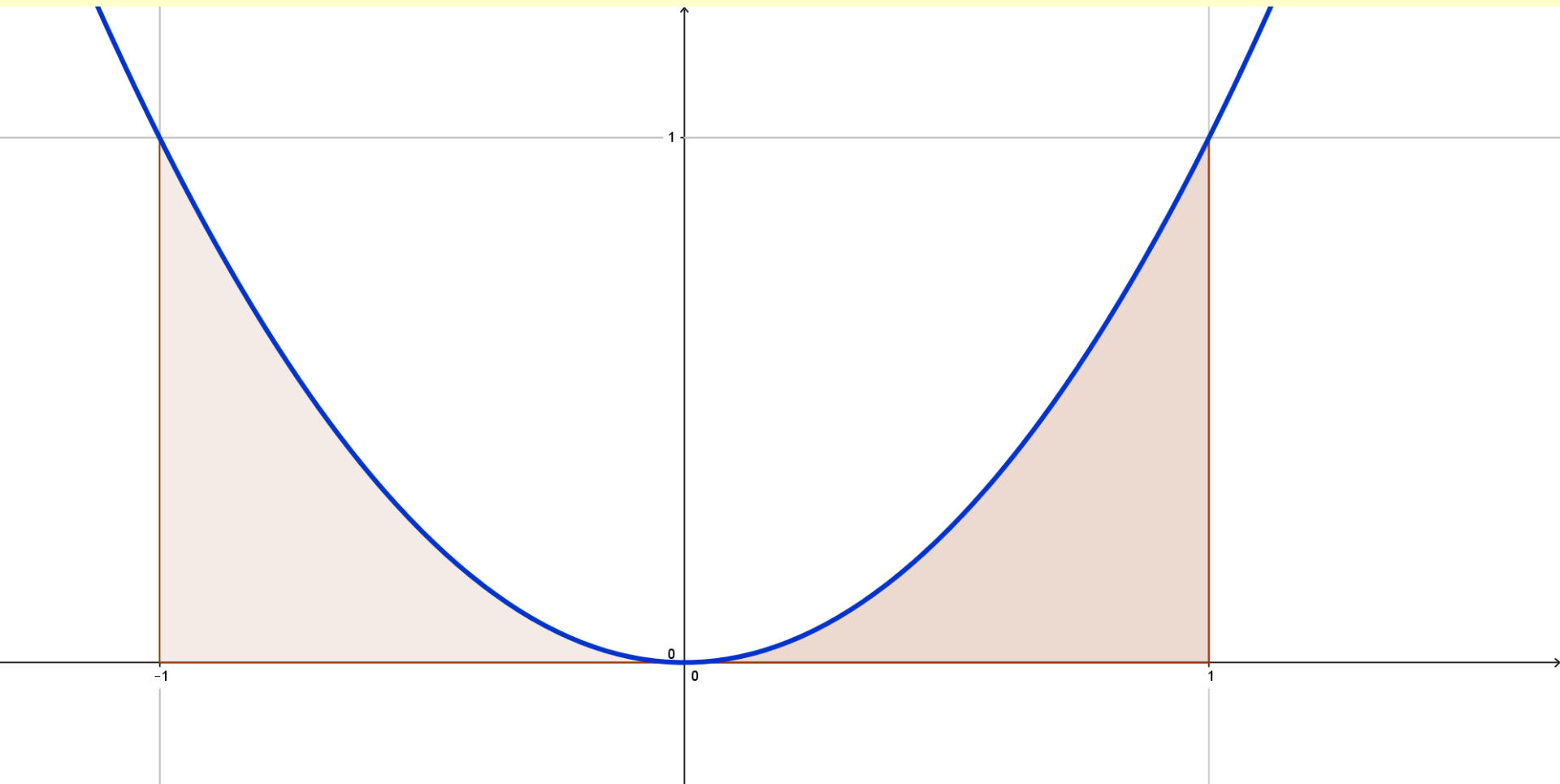
Sob o gráfico da função $f(x) = x^2$, qual a
área entre 0 e 1?



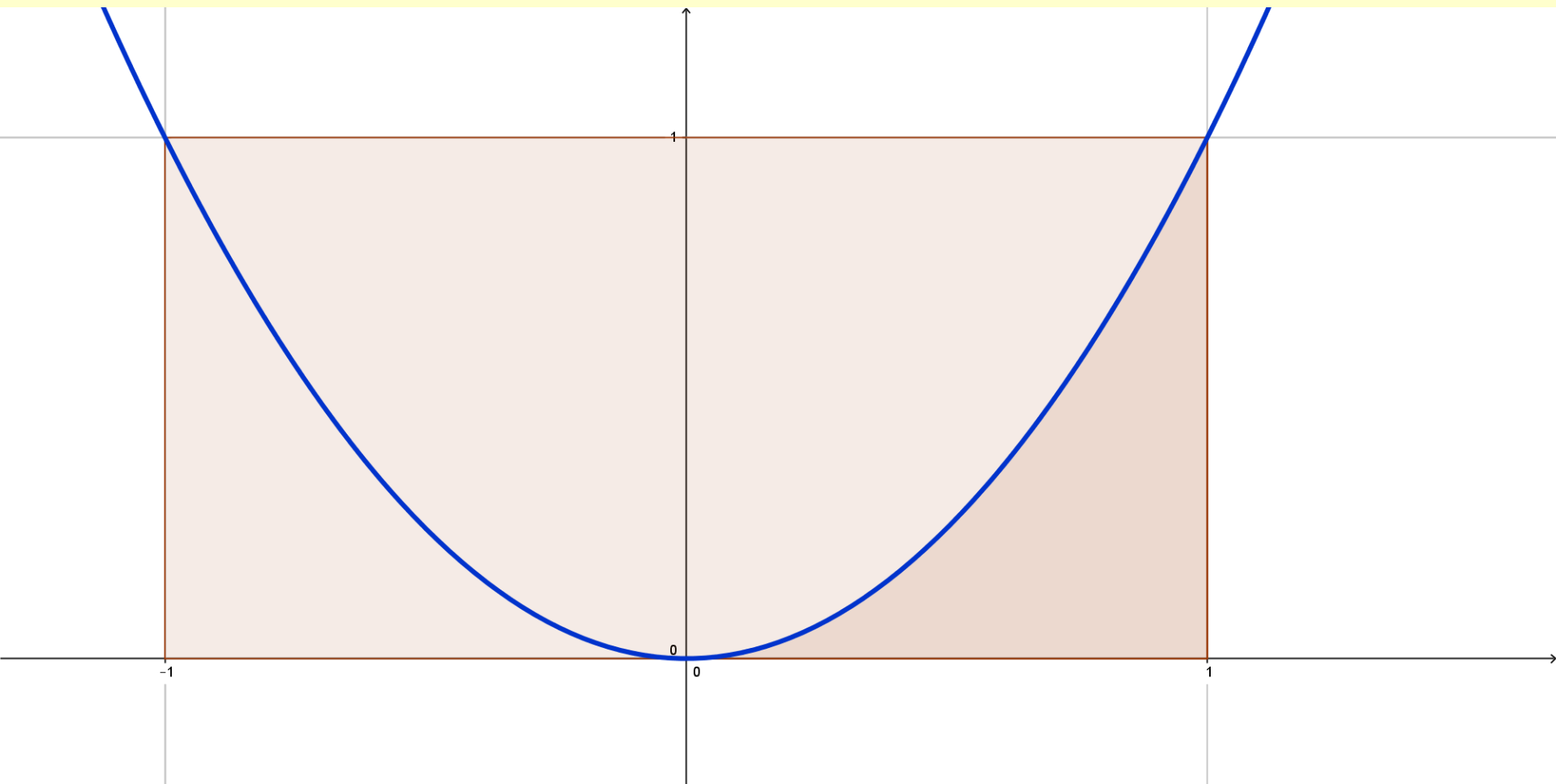
O problema resolvido por Arquimedes
pode ser entendido como:
Sob o gráfico da função $f(x) = x^2$, qual a
área entre 0 e 1?



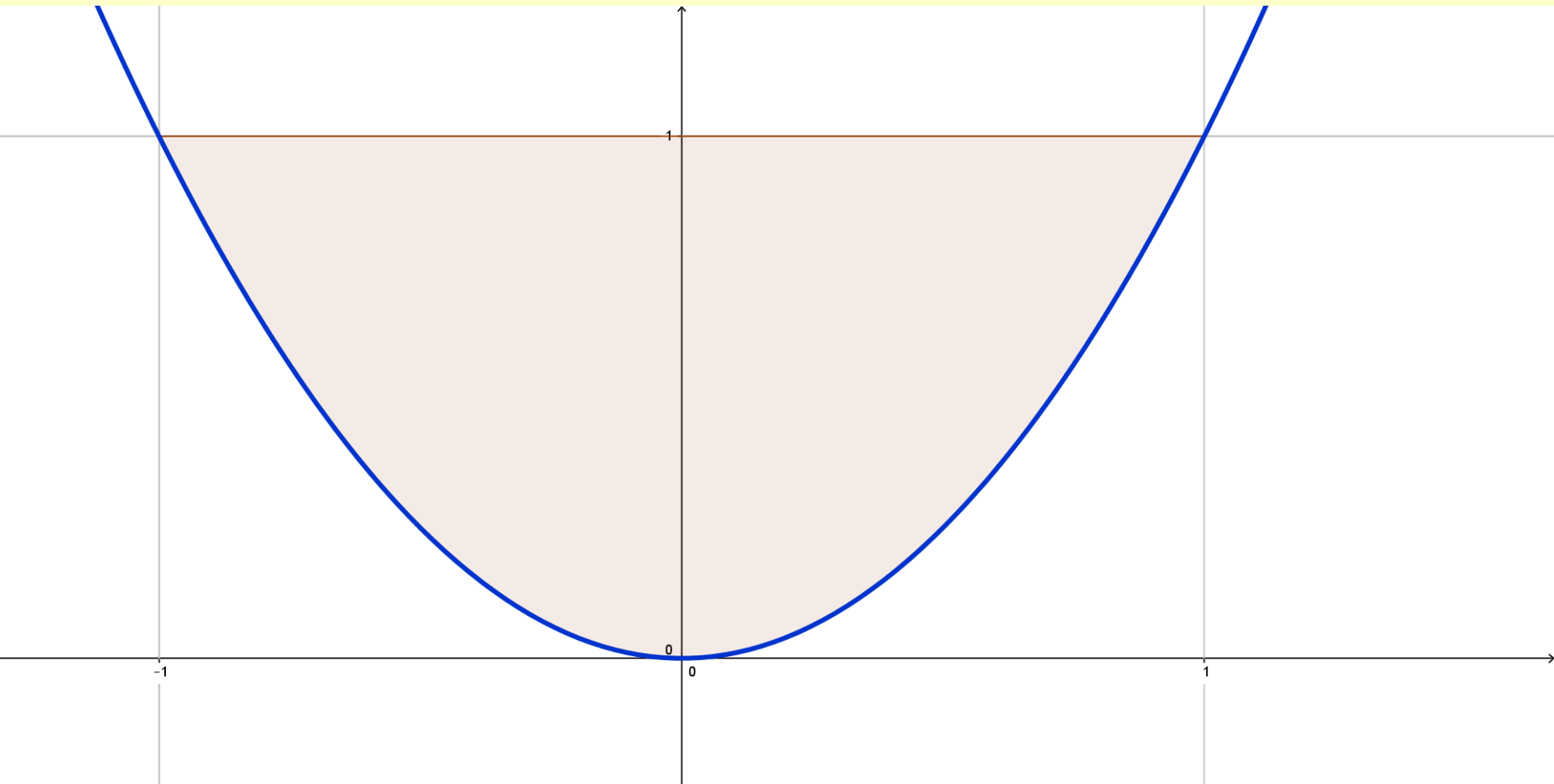
Por simetria, sabemos que a área entre 0 e 1 é igual à área entre -1 e 0.



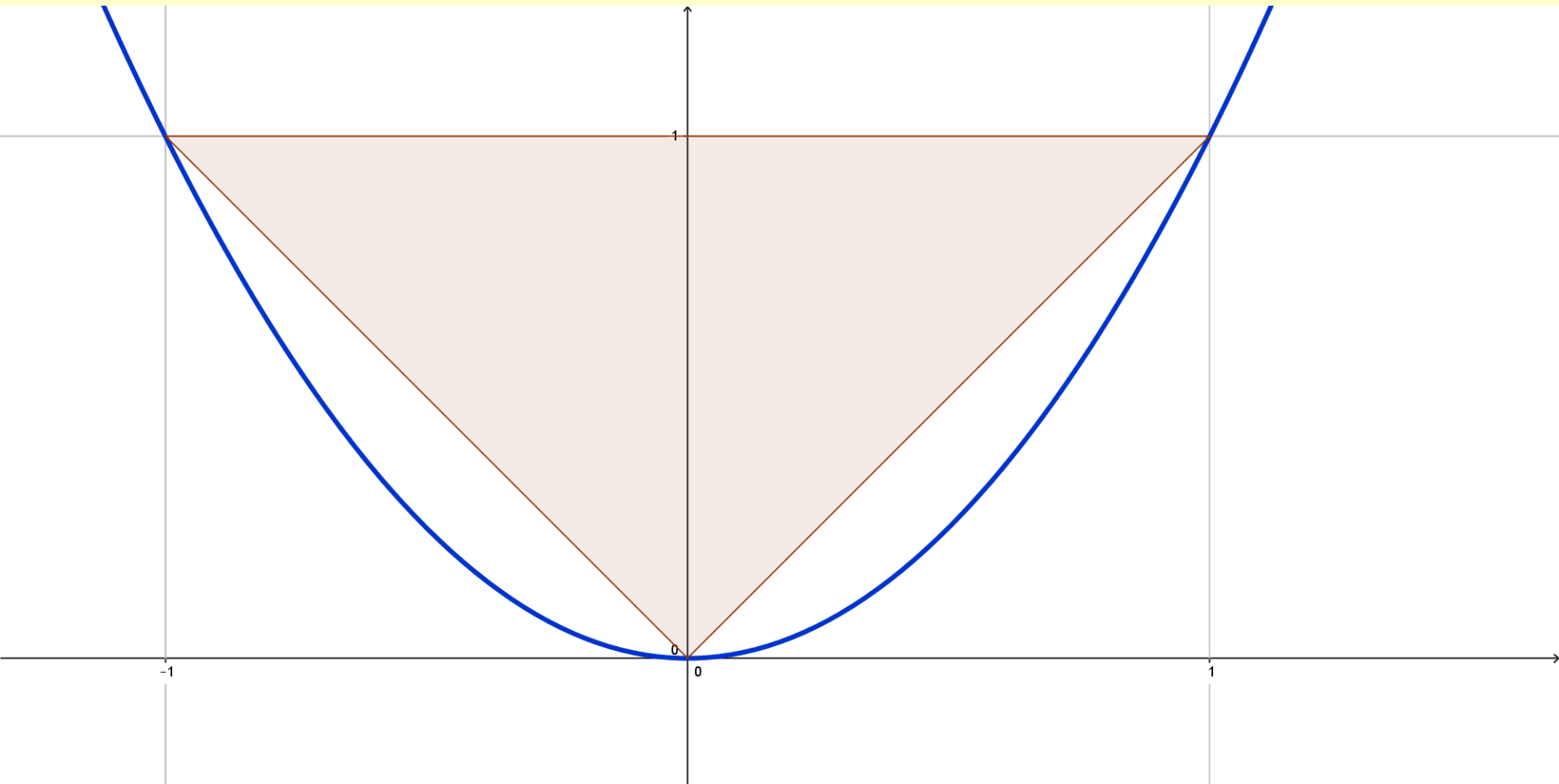
O retângulo abaixo tem área 2.



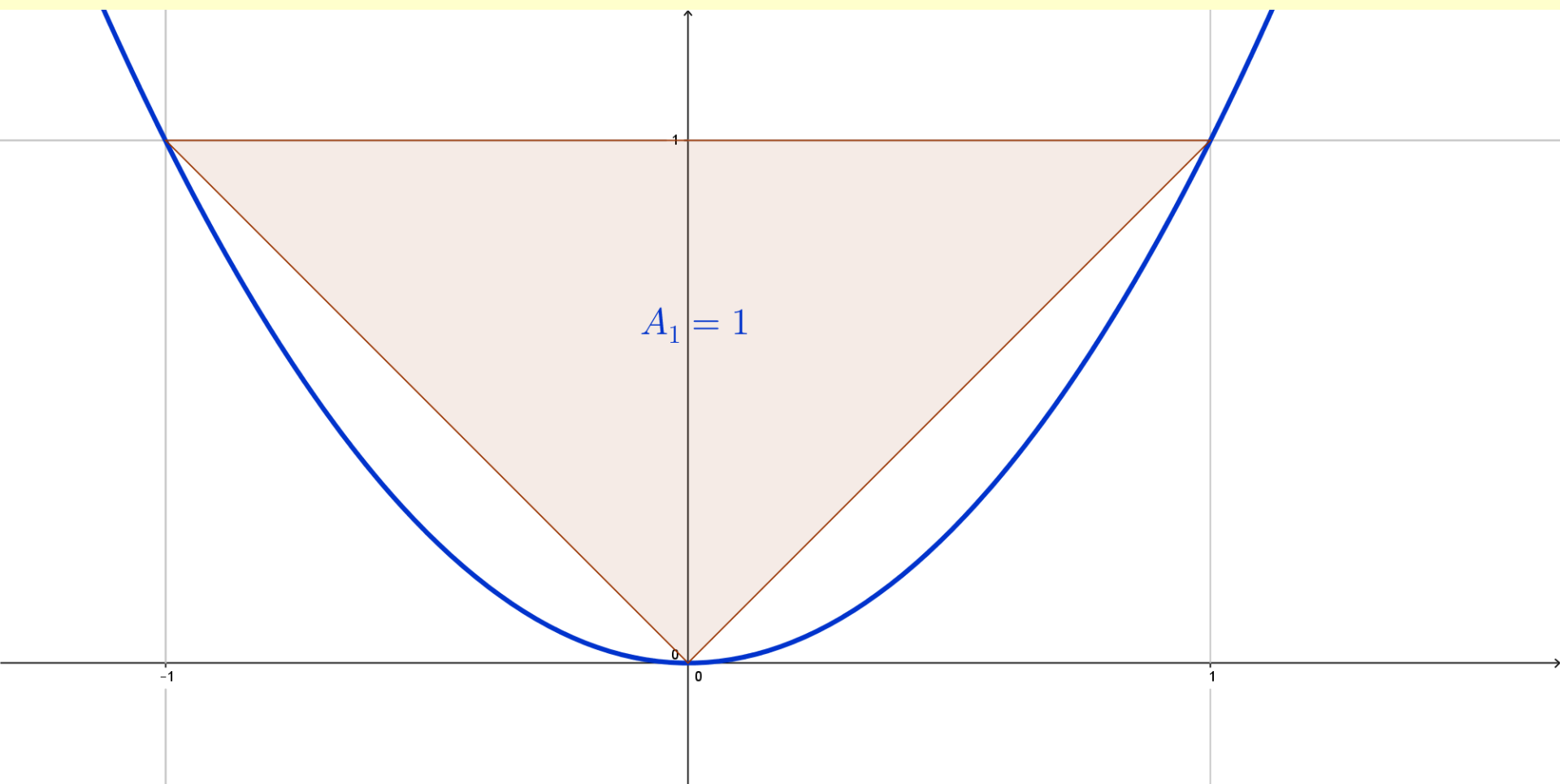
Para encontrar a área sob o gráfico basta encontrar a área da forma abaixo, chamada de segmento parabólico.



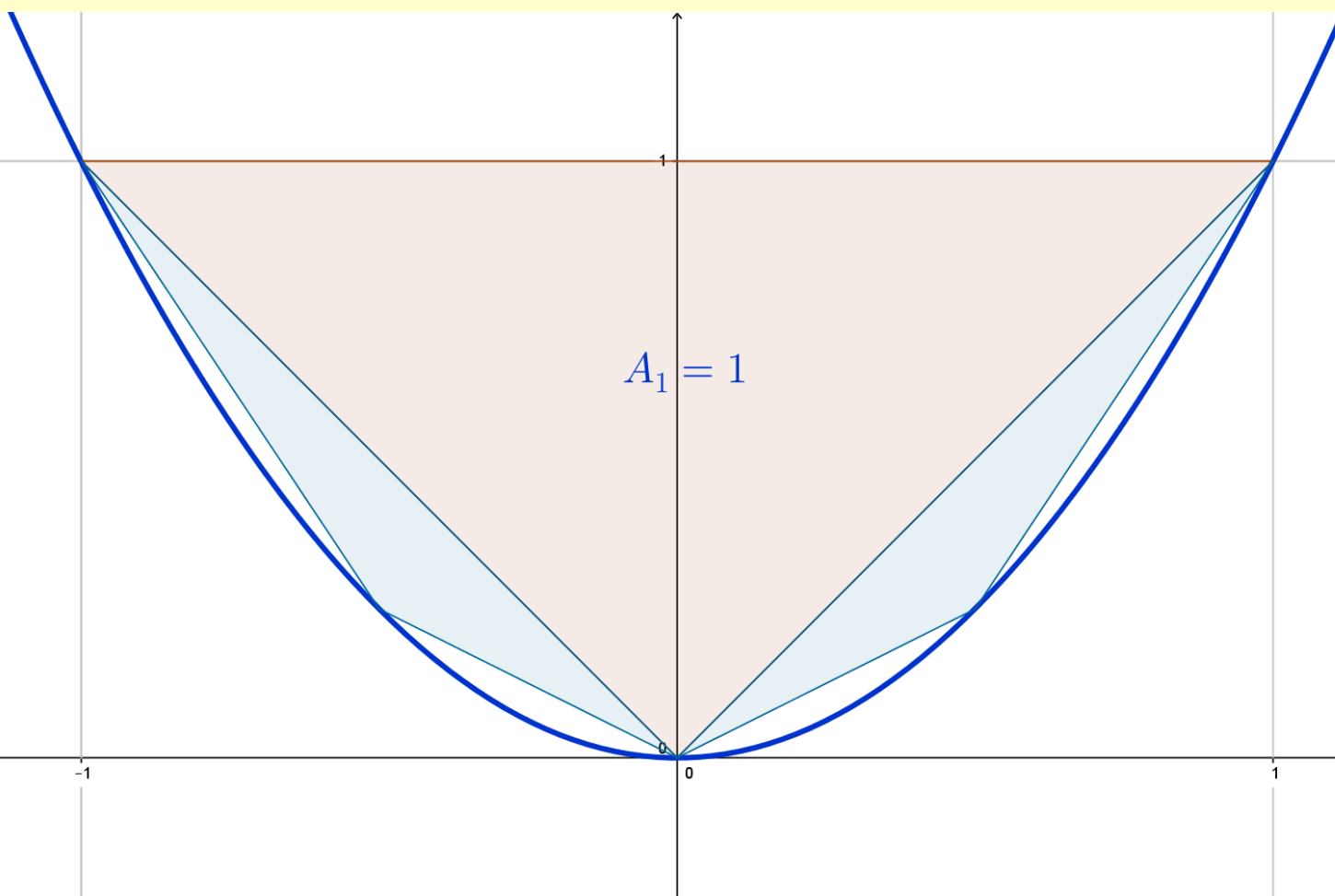
Como Arquimedes resolveu isso?
Inserindo um triângulo no segmento
parabólico.



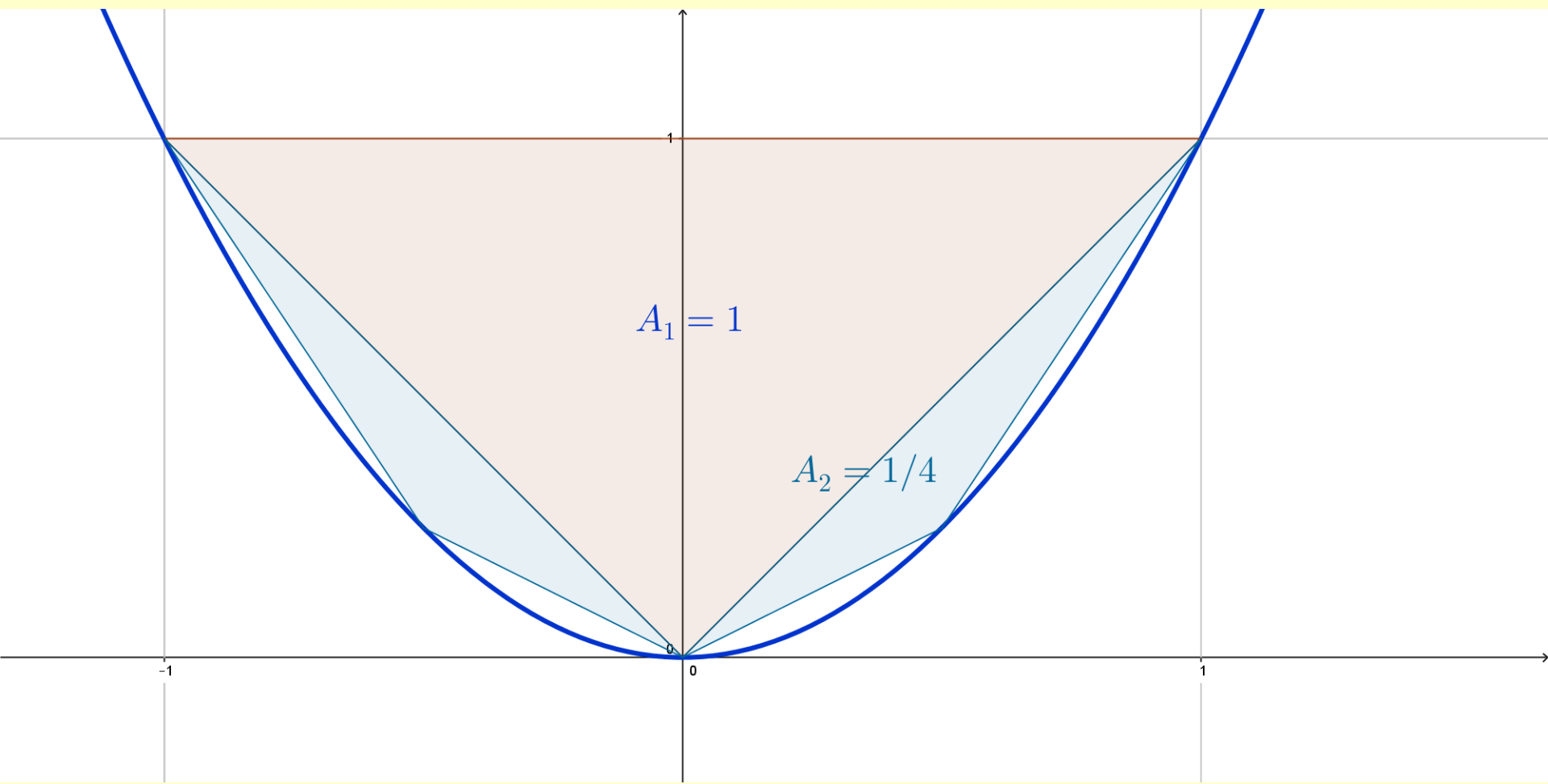
Esse triângulo tem área 1, pois é metade do retângulo de área 2.



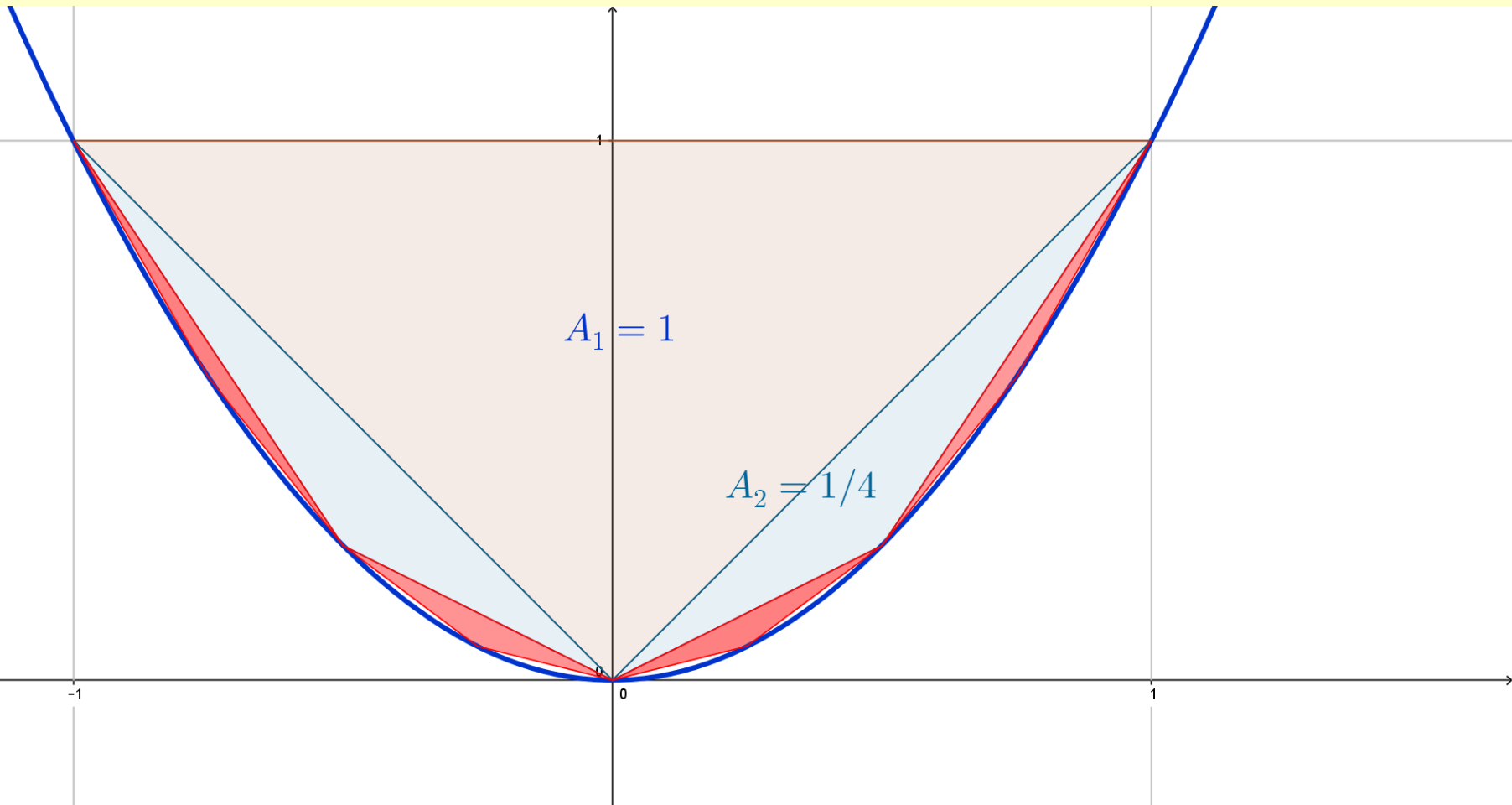
Falta ainda um pedaço da área do segmento. Arquimedes inseriu mais dois triângulos ali.



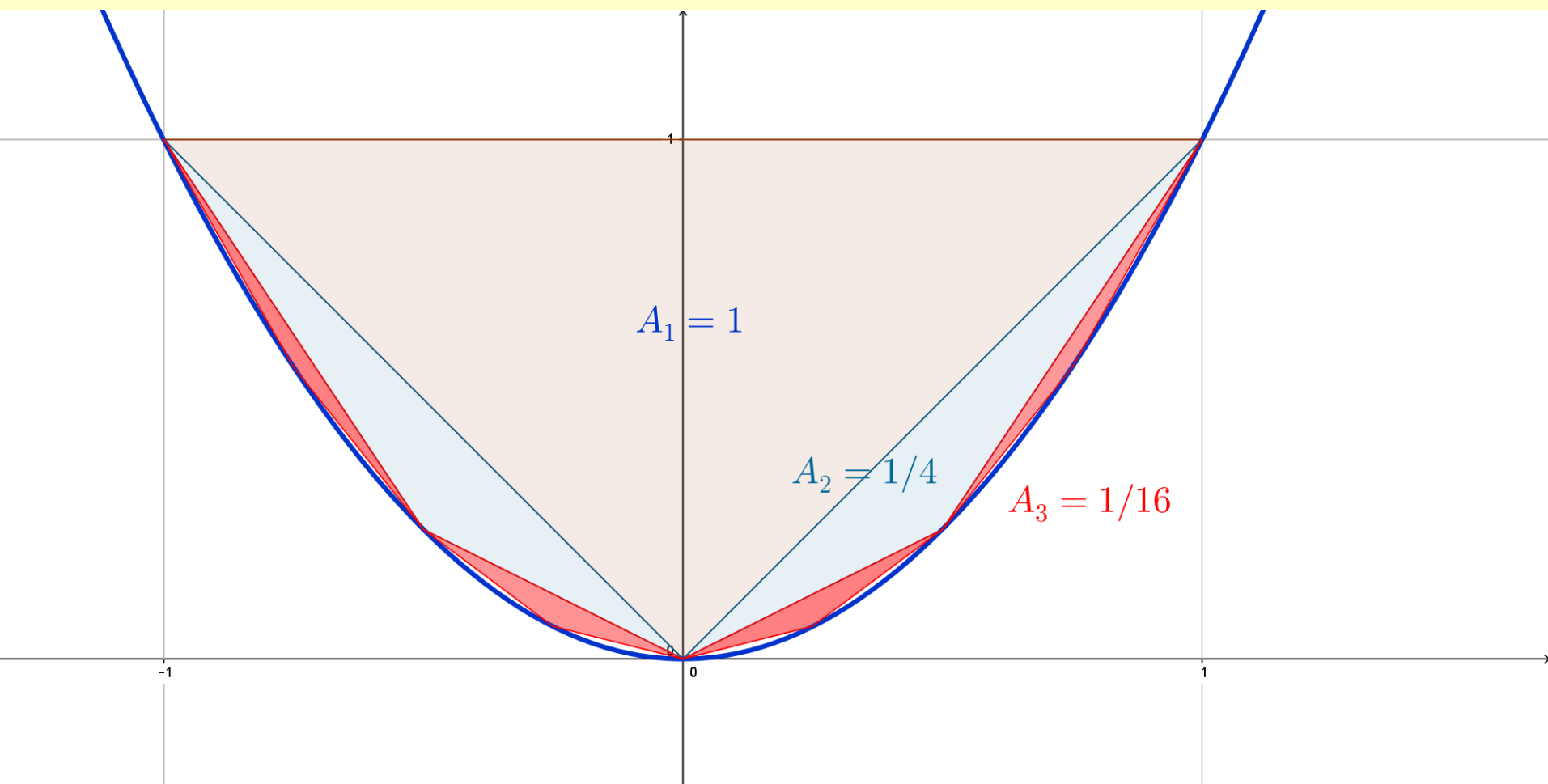
A soma das áreas desses triângulos é $\frac{1}{4}$
(pode-se mostrar isso).



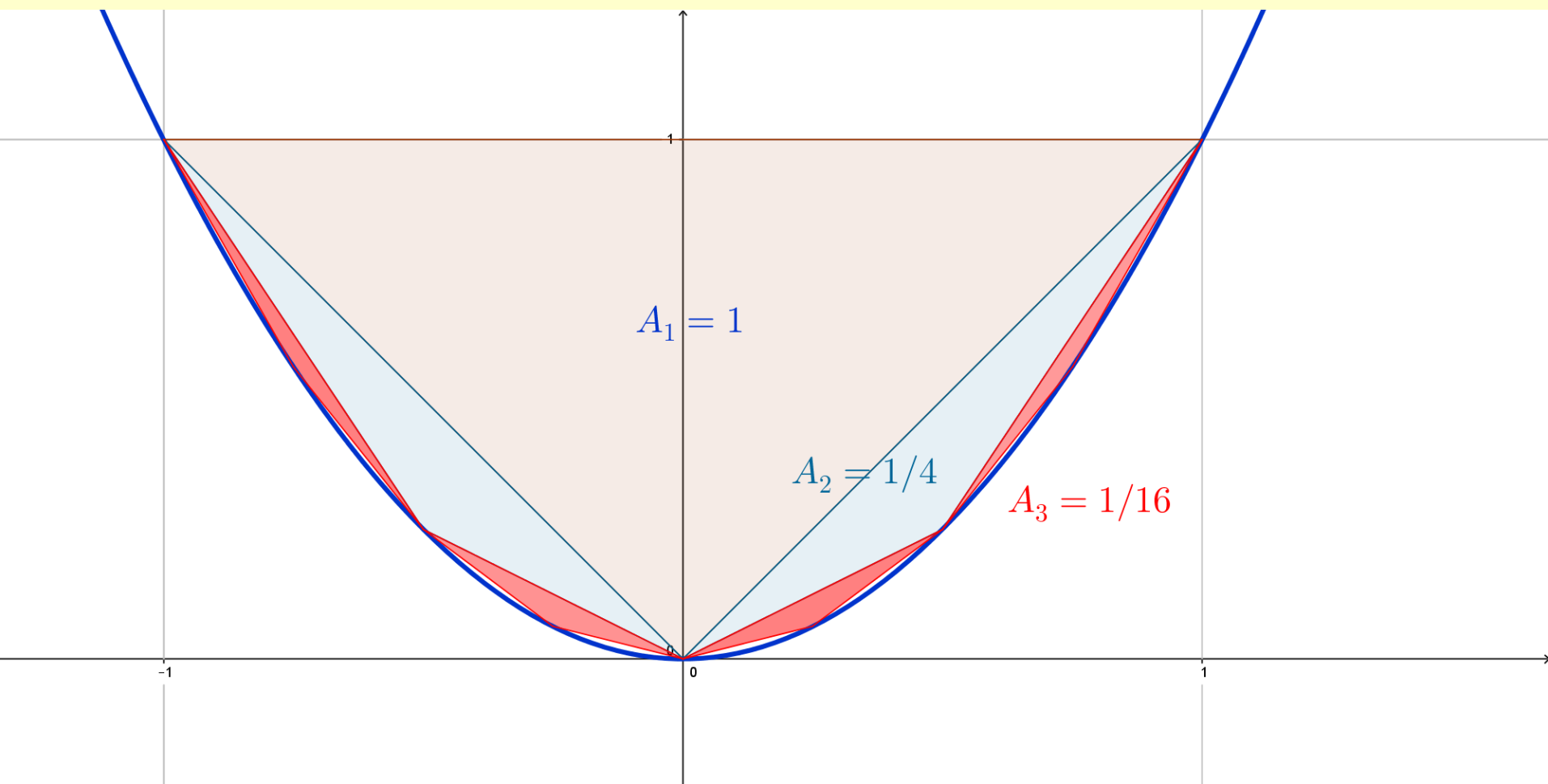
Ainda falta um pedaço da borda.
Arquimedes inseriu outros 4 triângulos.



Pode-se mostrar que a soma das áreas dos triângulos vermelhos é $1/16$.

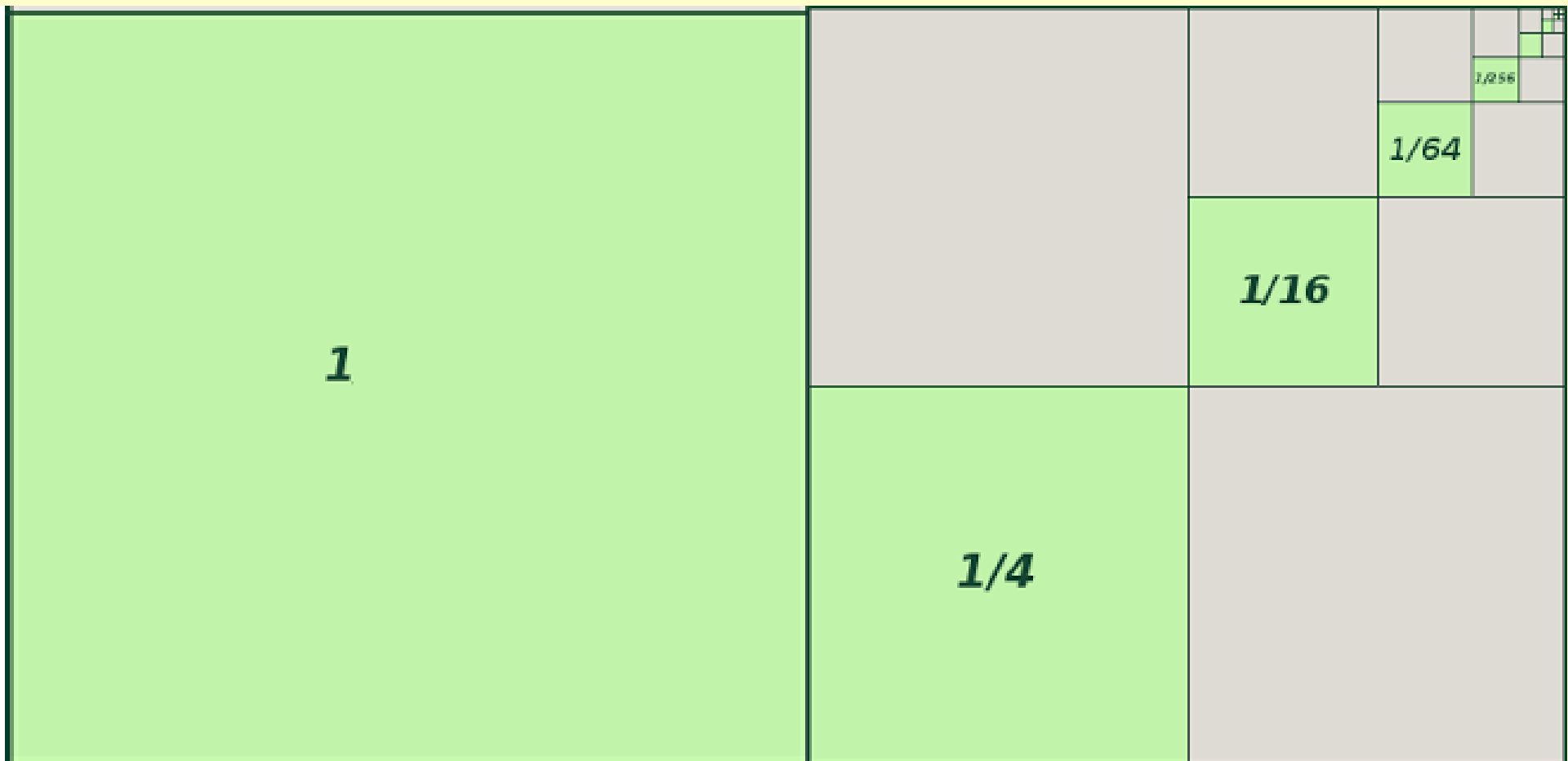


Arquimedes viu que que a área do segmento é dada pela soma de uma PG infinita.



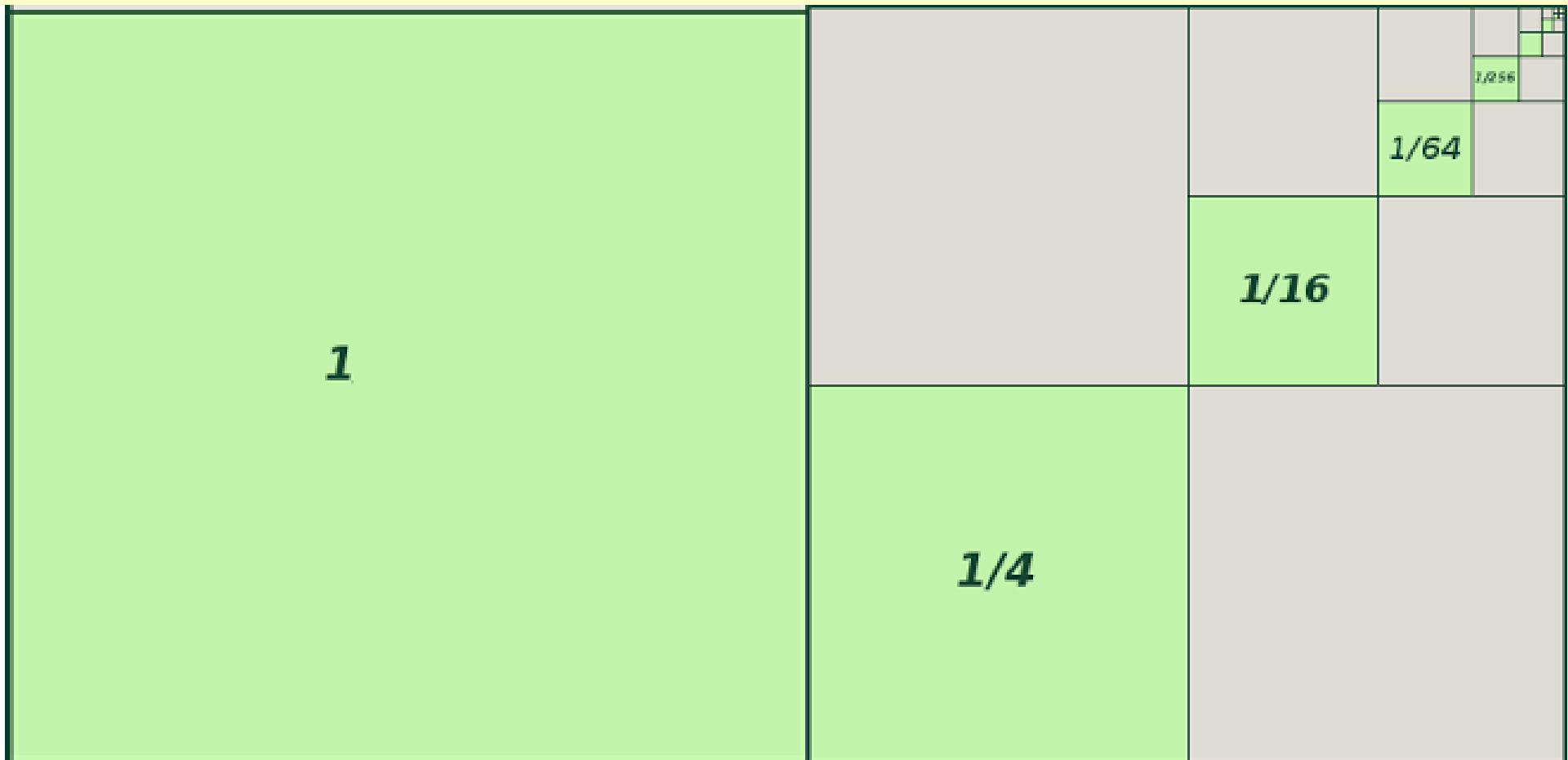
Arquimedes viu que que a área do segmento é dada pela soma de uma PG infinita:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots =$$

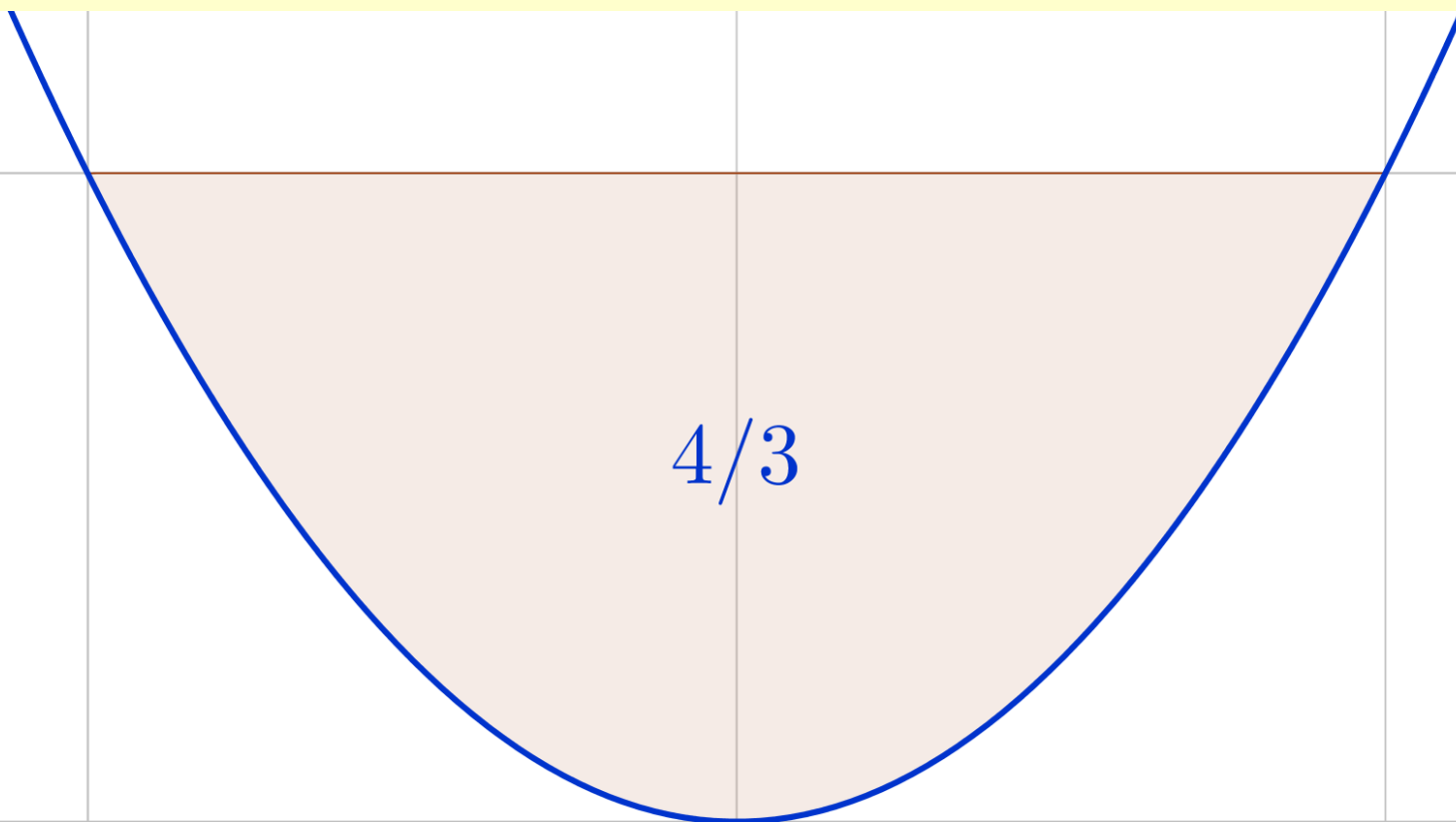


Arquimedes viu que que a área do segmento é dada pela soma de uma PG infinita:

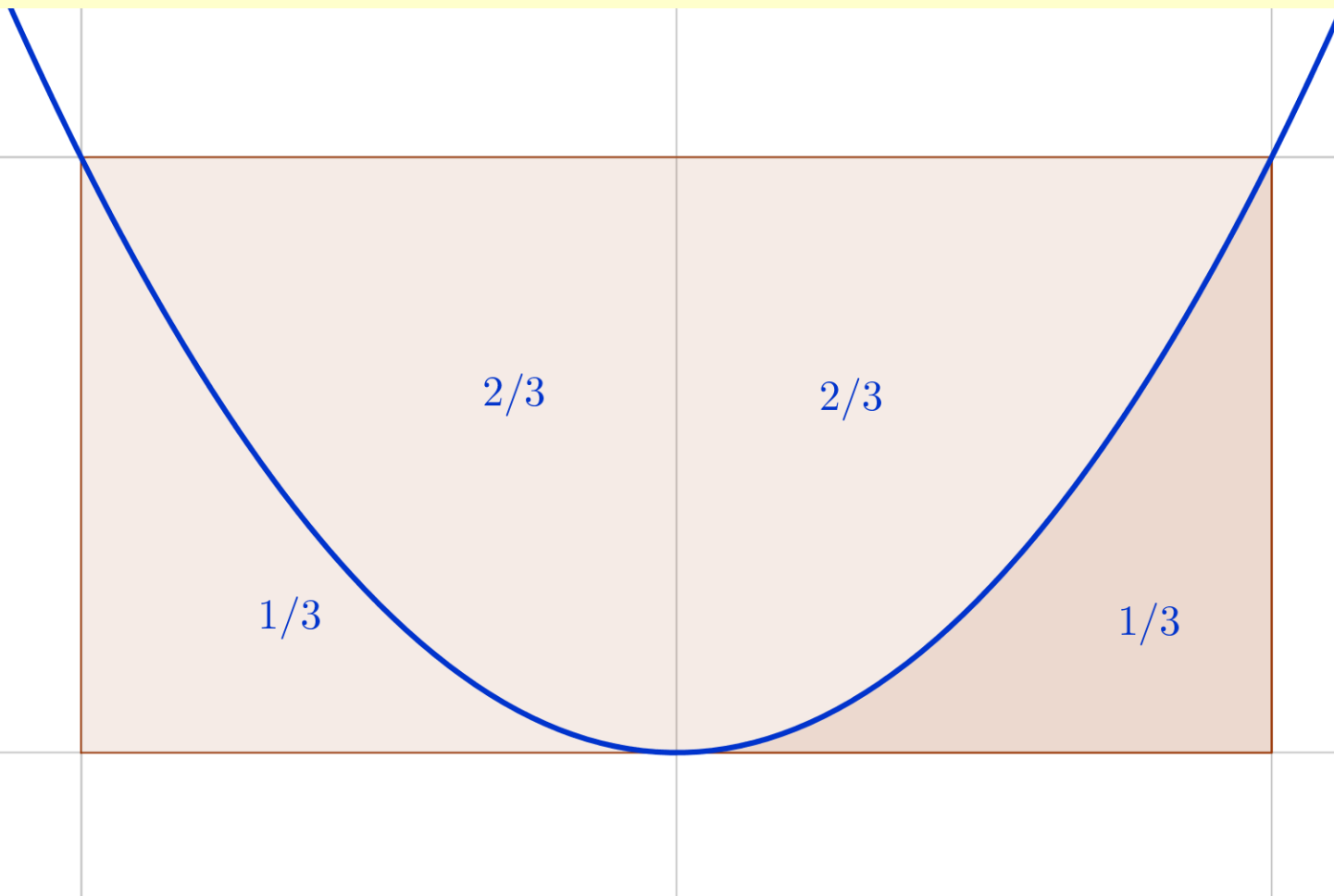
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = \frac{4}{3}$$



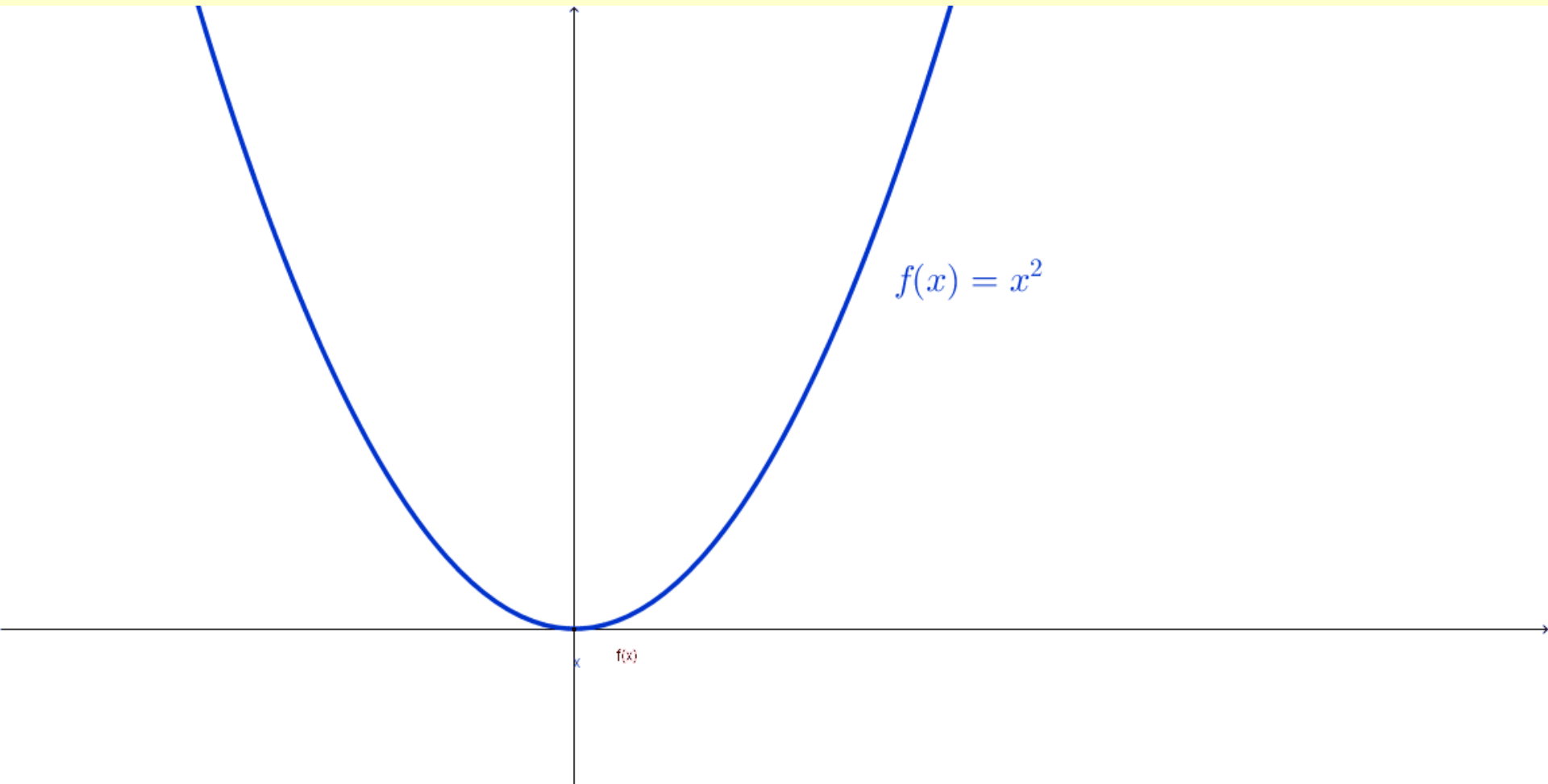
Logo, a área do segmento parabólico é



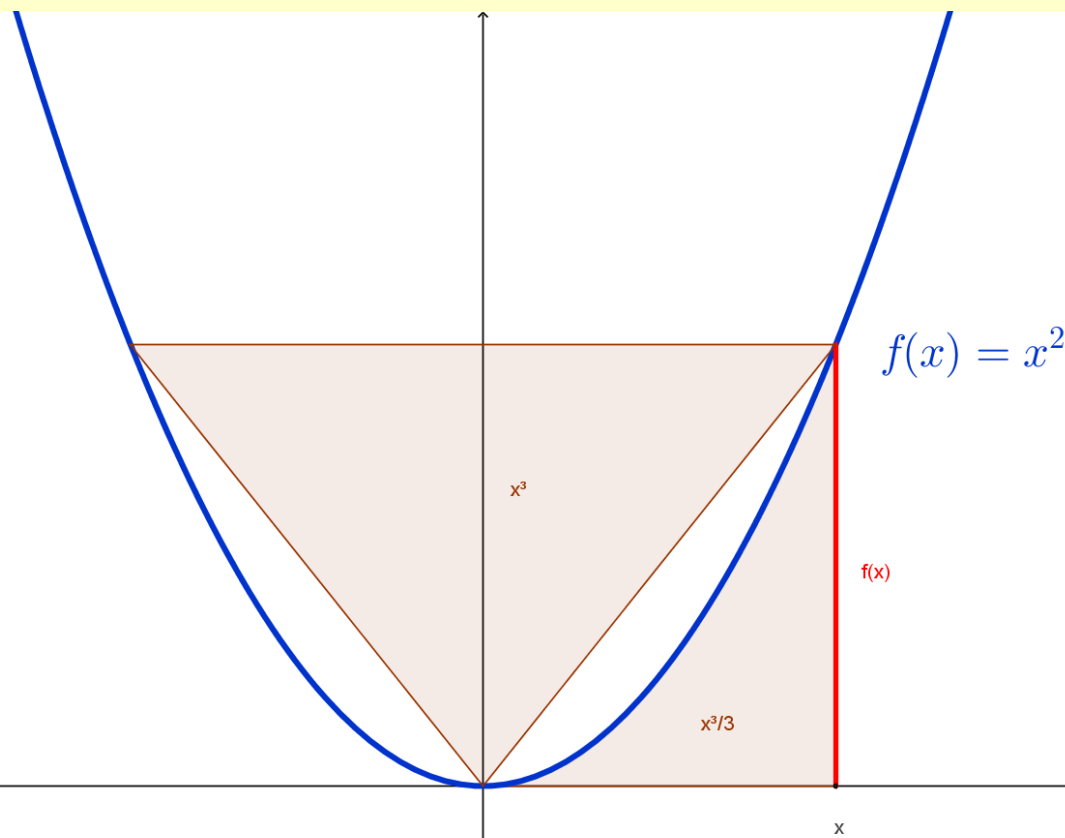
Podemos deduzir que as áreas sob o gráfico são iguais a $1/3$.



A área entre 0 e x sob a parábola de equação $y = x^2$ é igual a $1/3$ do triângulo inscrito no segmento parabólico.

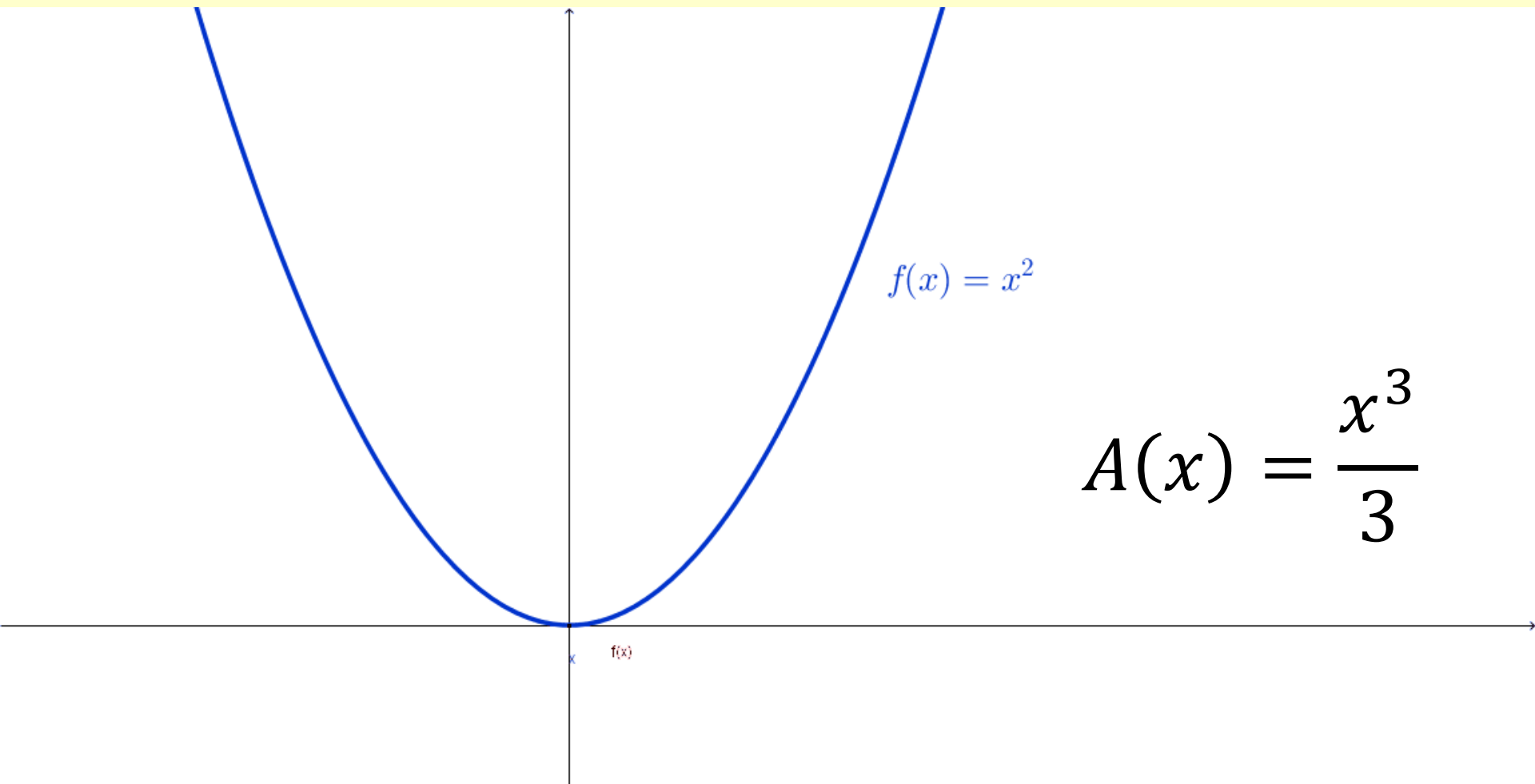


A área entre 0 e x sob a parábola de equação $y = x^2$ é igual a $1/3$ do triângulo inscrito no segmento parabólico.

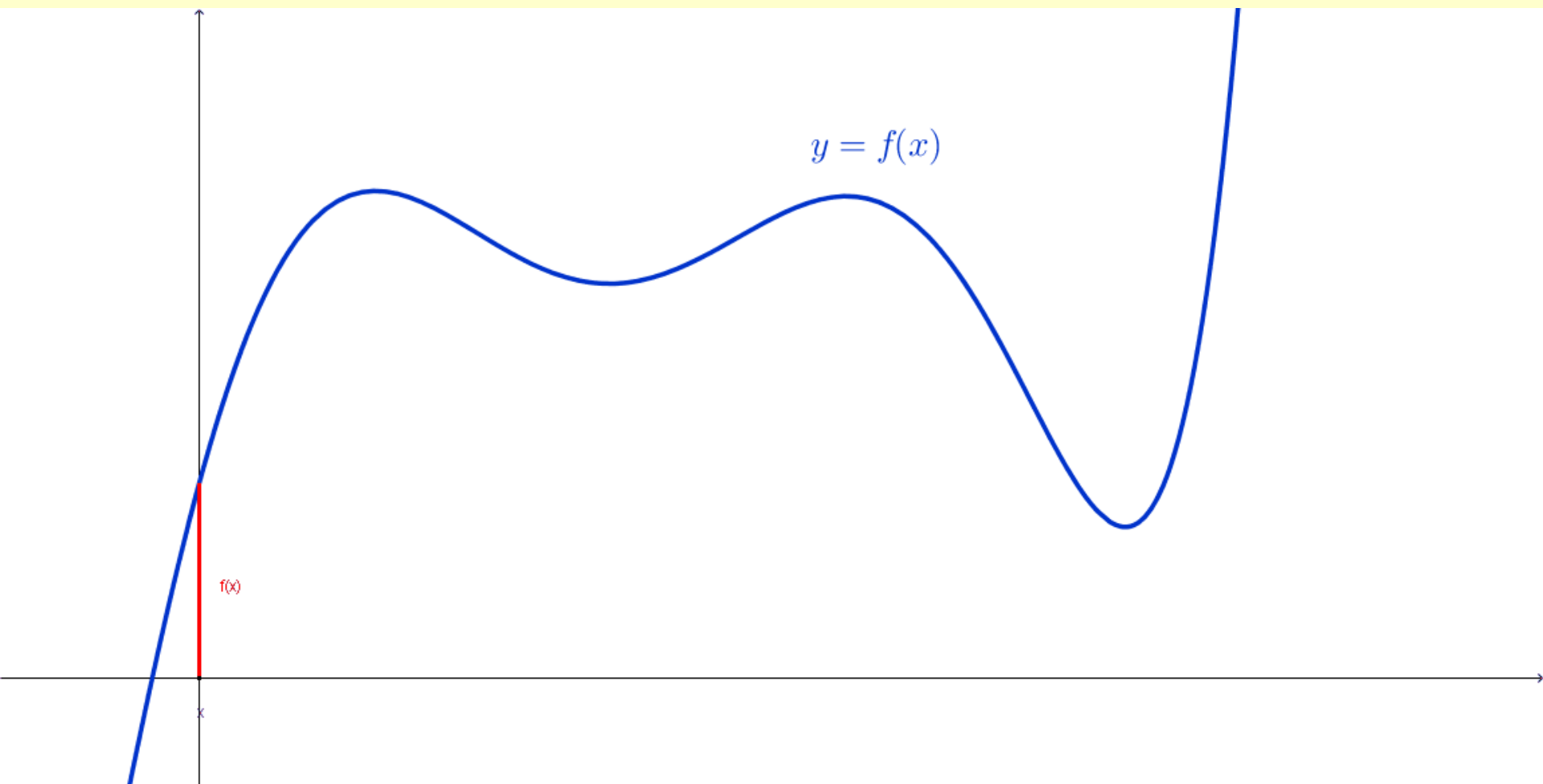


$$A(x) = \frac{x^3}{3}$$

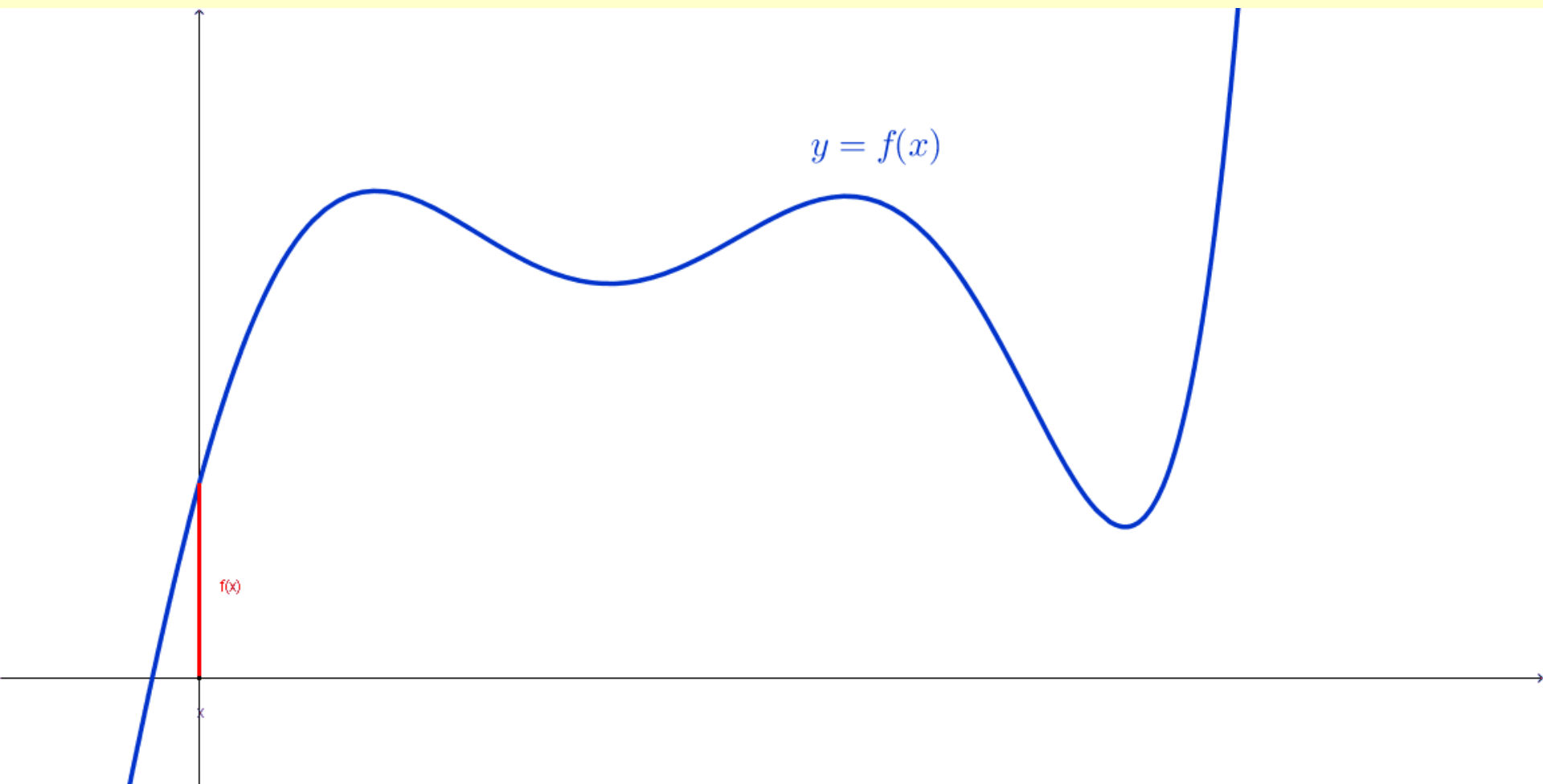
Essa é a primeira integral da história



A variação instantânea da área $A(x)$ é
 $A'(x)=f(x)$.



A derivada da função área $A(x)$ é a própria
função $f(x)$:
 $A'(x)=f(x)$.



Newton teria criado o Cálculo Diferencial e Integral entre 1665 e 1666, quando o Trinity College foi fechado por causa da peste.



Sir Isaac Newton (1642-1727)

Newton deixou cerca de 5000 páginas de manuscritos sem publicação.



Sir Isaac Newton (1642-1727)

Em 1673 Leibniz viajou a Londres, onde comprou um livro de Barrow e tornou-se membro da Royal Society. É possível que tenha lido manuscritos de Newton.



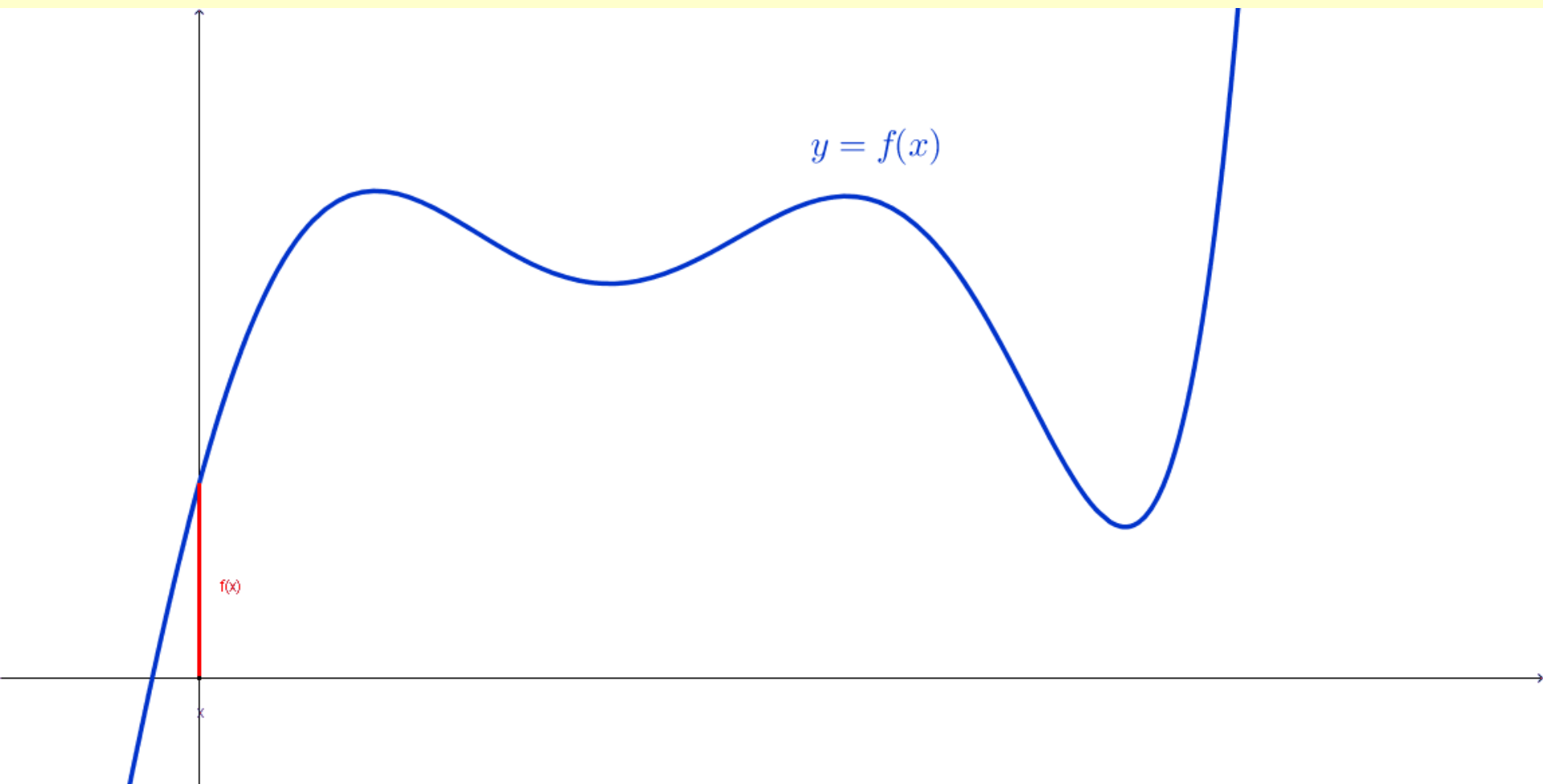
Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

Em 1676 Leibniz cria o Cálculo com uma notação bem diferente de Newton. Sua notação prevaleceu até hoje.

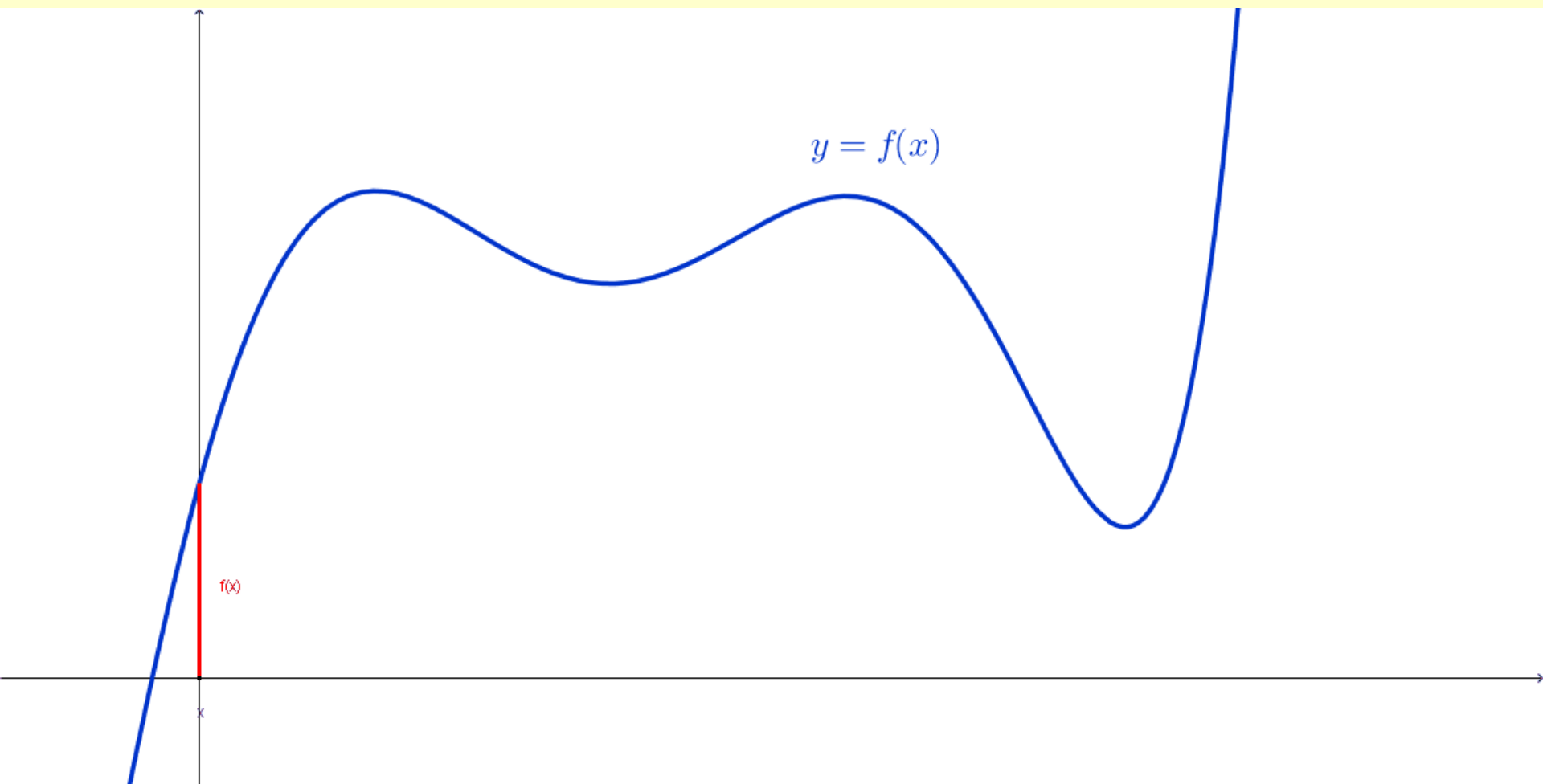


Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

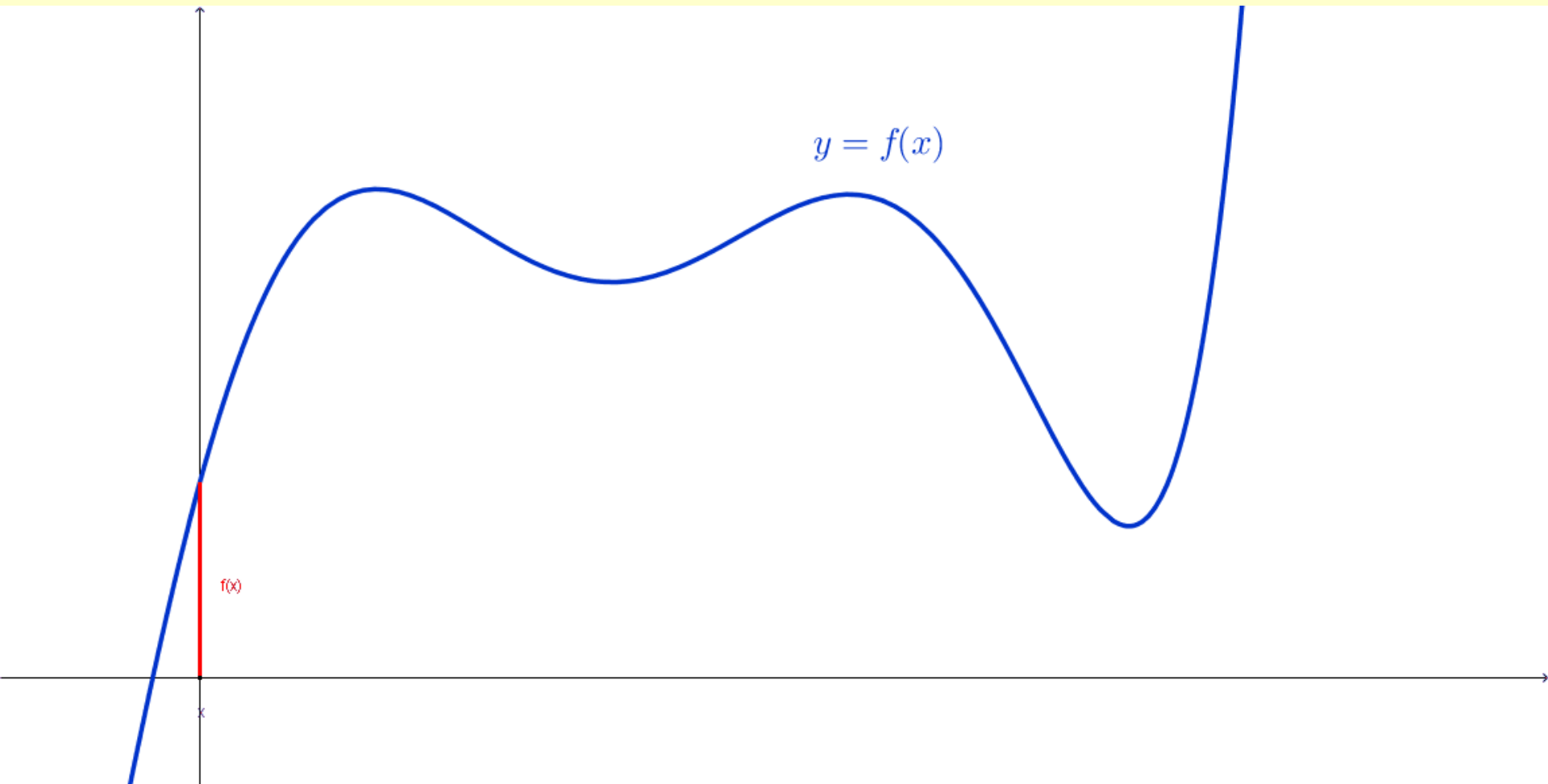
A variação instantânea da área $A(x)$ é
 $A'(x)=f(x)$.



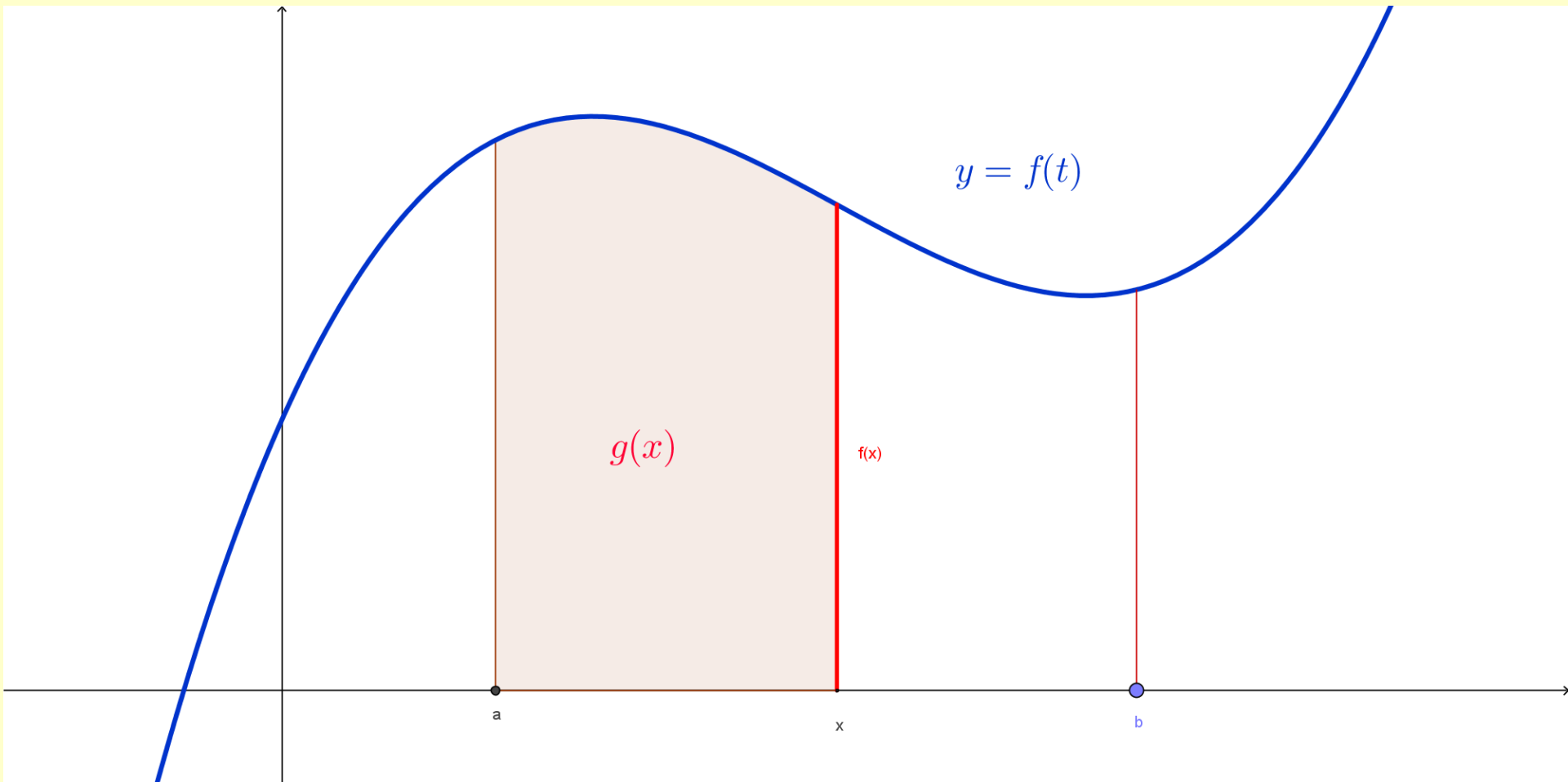
A derivada da função área $A(x)$ é a própria
função $f(x)$:
 $A'(x)=f(x)$.



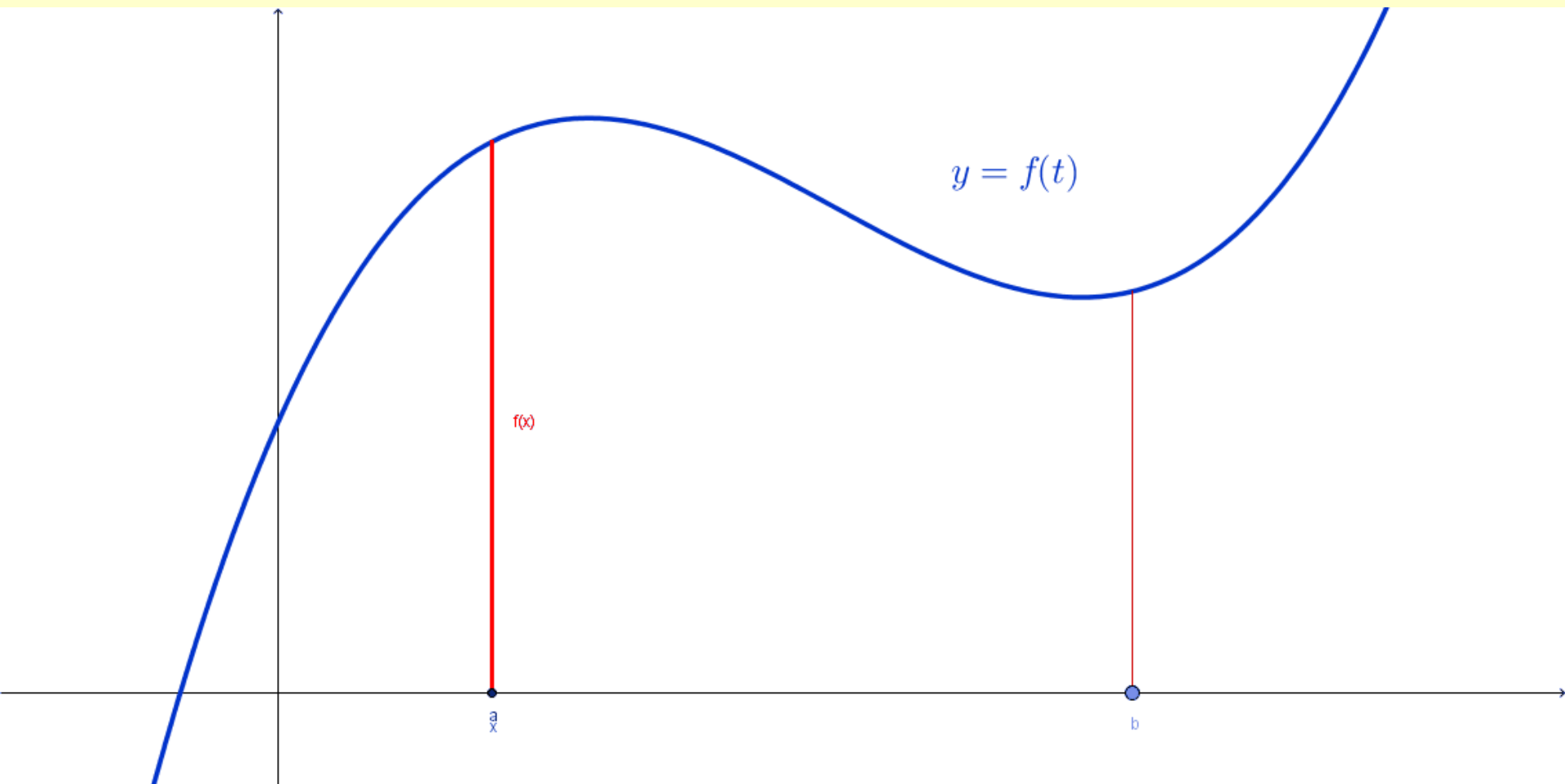
Se $A'(x) = f(x)$, (f é derivada de A)
então $A(x) = \int f(x)dx = F(x)$
(F é primitiva de f).



Dada uma função $y = f(t)$ contínua em $[a,b]$, definimos a função $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, tal que $g'(x) = f(x)$.



Dada uma função $y = f(t)$ contínua em $[a, b]$, definimos a função $g(x) = \int_a^x f(t) dt$, tal que $g'(x) = f(x)$.



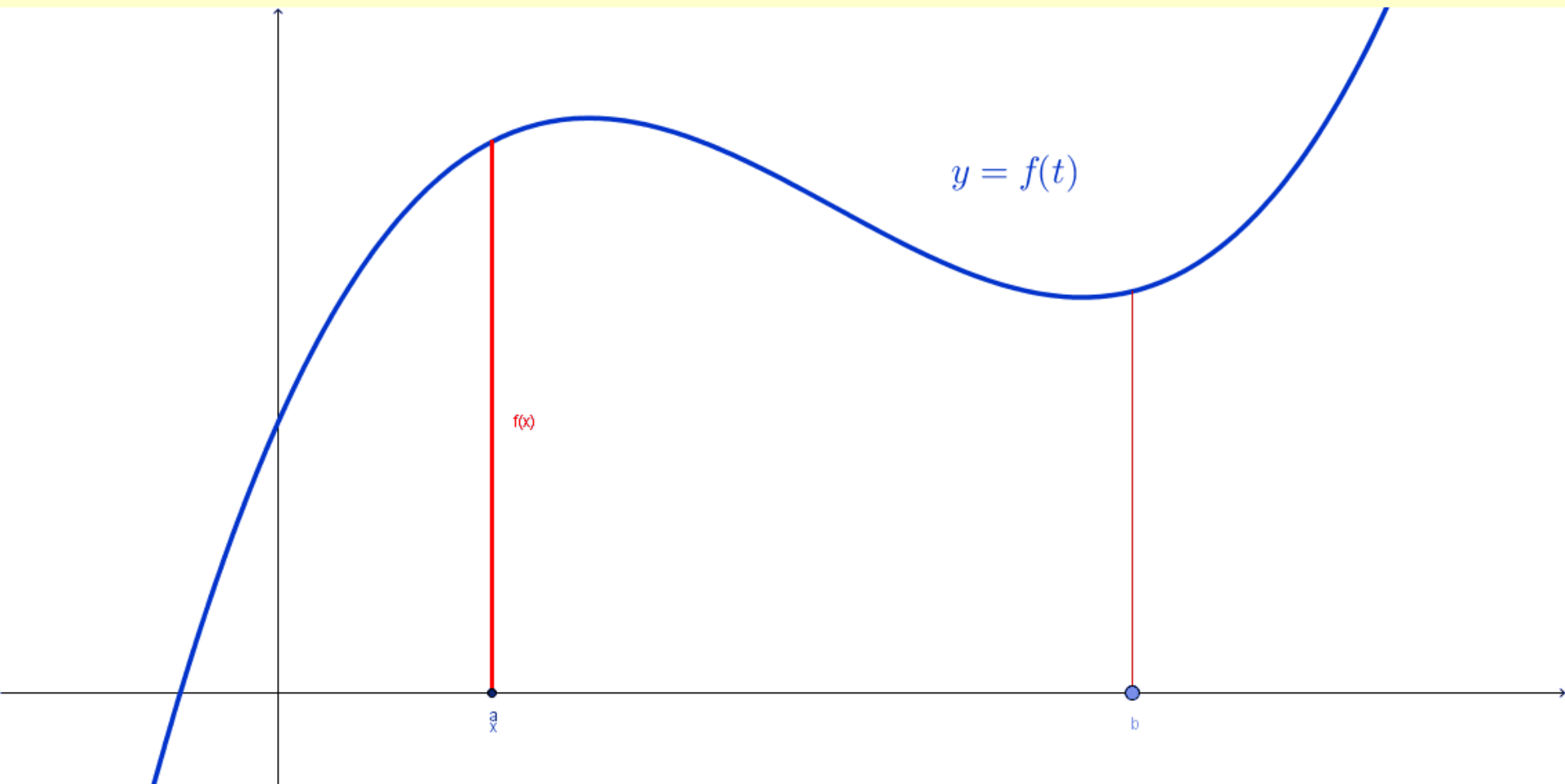
Teorema Fundamental do Cálculo (Parte I)

Dada uma função $y = f(t)$
contínua em $[a,b]$, então a função g
definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, a \leq x \leq b,$$

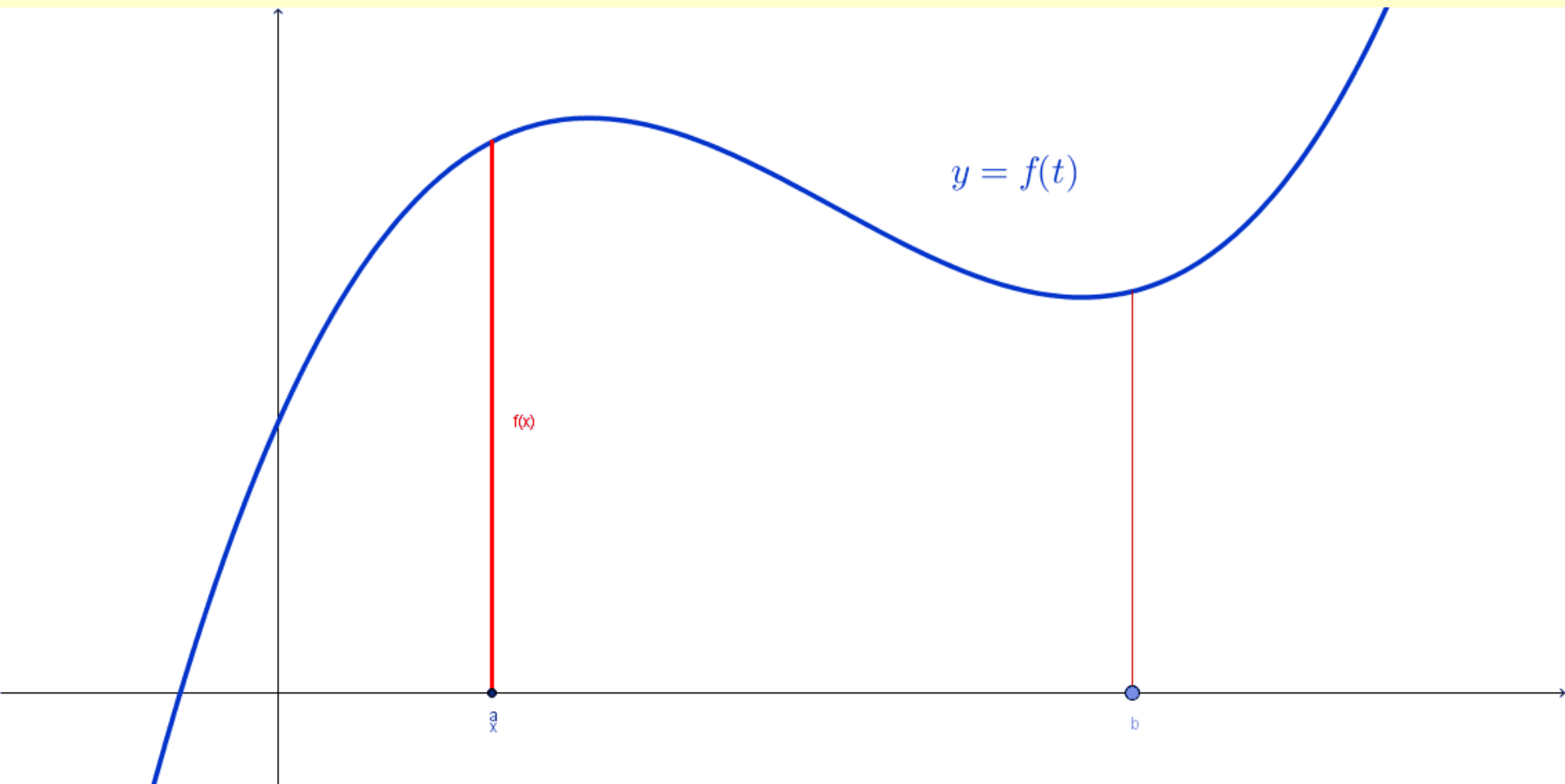
é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b)
e $g'(x) = f(x)$.

$$g(a) = \int_a^a f(t) dt = F(a)$$
$$e \ g(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b)$$



$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a),$$

onde $F'(x) = f(x)$.



Teorema Fundamental do Cálculo (Parte II):

Se f for contínua em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

onde $F'(x) = f(x)$.

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a),$$

onde $F'(x) = f(x)$.

