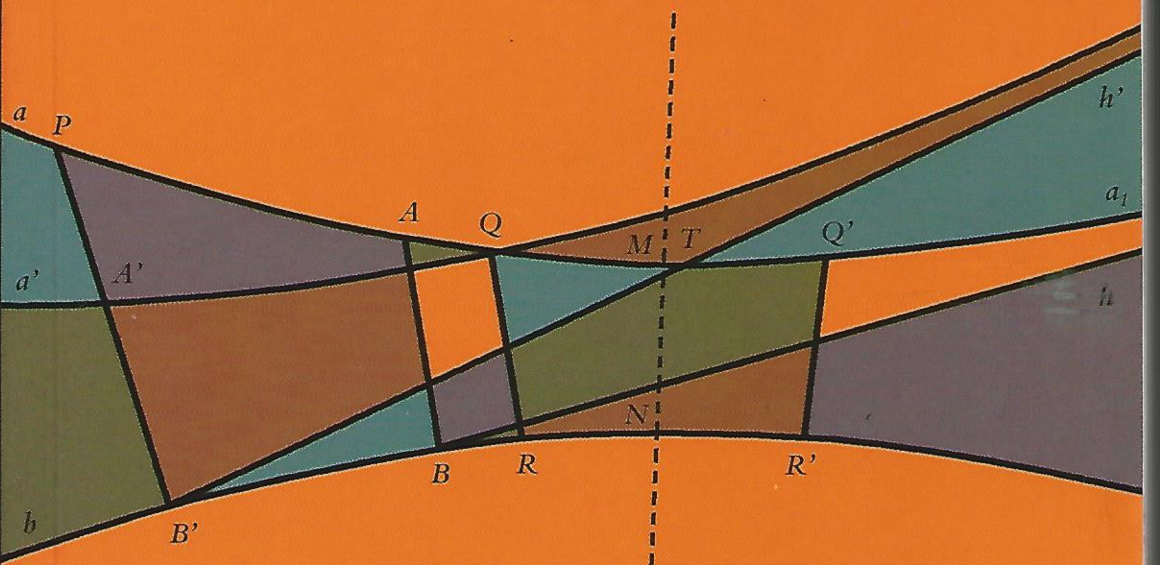
TRAJECTOS CIÊNCIA

FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA

DAVID HILBERT

Edição revista e coordenada por

A. J. FRANCO DE OLIVEIRA



Com apêndices do autor e suplementos por P. Bernays, F. Enriques e H. Poincaré

gradiva

«Não é este um livro de texto de geometria elementar, mas esta tradução é dedicada aos nossos professores da matéria e aos estudantes de matemática das nossas universidades. Os tradutores têm a esperança de que um cuidadoso estudo dos vários problemas deste livro contribuirá indirectamente para implantar neles a ideia de que, em geral, os males do ensino da geometria nas nossas escolas só superficialmente residem em deficiências de ordem pedagógica, mas antes se encontram na falta de contacto com os problemas vivos, actuais, da matéria que se ensina e do indispensável treino para a investigação desses problemas.»

MARIA DO PILAR RIBEIRO, JOSÉ DA SILVA PAULO (1951)

«Assim como a teoria dos conjuntos de G. Cantor (posteriormente axiomatizada por E. Zermelo em 1908) moldou decisivamente os conteúdos matemáticos do século XX, os *Fundamentos da Geometria* (1.ª edição publicada em 1899), de D. Hilbert, moldaram definitivamente o método hipotético--dedutivo das teorias matemáticas modernas.»

PAULINO LIMA FORTES, A. J. FRANCO DE OLIVEIRA (2001)

«O trabalho de Hilbert teve importância capital na mudança da concepção da geometria e, em certo sentido, na da concepção idealística da verdade [...] Hilbert foi um gigante, e somos afortunados por podermos viver na sua sombra.»

HARRY GOHEEN

TRAJECTOS CIÊNCIA

ISBN 972-662-927-6

9 789726 629276

gradiva

Tradução baseada na 7.ª ed. de *Grundlagen der Geometrie,* de David Hilbert, Estugarda, B. G. Teubner Verlag, 1930, trad. do alemão por Leo Unger e rev. por P. Bernays (David Hilbert, *Foundations of Geometry,* Open Court Publishing Company, 1971): *Maria do Pilar Ribeiro* (col. de *J. da Silva Paulo*), *Paulino Lima Fortes* e *A. J. Franco de Oliveira* (col. de *A. Vaz Ferreira*)
Revisão científica e coordenação: *A. J. Franco de Oliveira*
Capa: *Armando Lopes*
Fotólitos, impressão e acabamento: *Multitipo — Artes Gráficas, L.da*

Rua Almeida e Sousa, 21, r/c, esq. — 1399-041 Lisboa
Telefs. 21 397 40 67/8 — 21 397 13 57 — 21 395 34 70
Fax 21 395 34 71 — Email: gradiva@ip.pt
URL: http://www.gradiva.pt
1.ª edição: *Setembro de 2003*
Depósito legal n.º 199 892/2003

gradiva
Editor: *Guilherme Valente*

PREÂMBULO

Todas as disciplinas matemáticas são historicamente determinadas. A geometria, em especial, teve um longo e turbulento desenvolvimento desde o tempo de Euclides e dos primeiros comentadores, passando pela Idade Média até aos tempos modernos. O trabalho de Hilbert teve importância capital na mudança da concepção da geometria e, em certo sentido, na da concepção idealística da verdade. A partir da primeira edição [1899] dos *Fundamentos da Geometria,* o livro de Hilbert sofreu alterações profundas, de tal modo que a última edição é praticamente irreconhecível da primeira. É por esta razão que se impunha tornar acessível aos estudantes universitários e aos professores liceais aquela última edição em língua inglesa.

Muitos matemáticos exprimiram a opinião de que este trabalho de Hilbert é de menor importância, está cheio de erros e despido de significância moderna. Sem desrespeito por todos aqueles que assim se exprimiram, devo todavia enfatizar a grande importância da tentativa de desenvolver um tratamento completo e consistente dos axiomas da geometria e de sintetizar estes axiomas no contexto da análise dos números reais. Tendo partilhado com muitos de vós algumas dúvidas quando confrontados, pela primeira vez, com a geometria analítica, após a geometria sintética dos cursos secundários, também eu indaguei durante anos qual seria a relação entre as duas. Hilbert ultrapassou essa perplexidade muito antes de mim, ao demonstrar que na análise dos números reais e, em particular, na álgebra tridimensional real está um modelo possível dos axiomas da geometria por si revistos. Mais do que isso, ele mostrou como estabelecer que este modelo é essencialmente único, isto é, que qualquer modelo lhe é isomorfo.

Há alguma confusão na linguagem que Hilbert utiliza na primeira edição, e parte desta confusão estende-se até esta última edição. Devem tomar-se como primitivos não somente os termos ponto, recta, plano e a relação de estar entre, mas também a relação de incidência de rectas com pares de pontos diferentes, bem como a distinta relação de incidência de planos com triplos de pontos não colineares, a relação de congruência de segmentos e a distinta relação de congruência de ângulos.

Coisas deste tipo são importantes; todavia elas não retiram demasiada utilidade a este texto, sobretudo para o leitor avisado à partida de que o rigor no passado era o bastante. Hilbert foi um gigante, e somos afortunados por poder viver na sua sombra.

Harry Goheen

Professor de Matemática

Universidade Estadual de Oregon

David Hilbert
(1862-1942)

«Assim começou, portanto, todo o conhecimento humano, com intuições, passando daqui a noções e acabando com ideias.»

Kant, *Crítica da Razão Pura,* "Elementos de Transcendentalismo", Segunda Parte, II.

INTRODUÇÃO

A geometria, do mesmo modo que a aritmética, só precisa para a sua edificação lógica subsequente de poucas e simples proposições fundamentais. Estas proposições fundamentais chamam-se *axiomas* da geometria. O enunciado dos axiomas da geometria e o exame das suas relações mútuas é um problema que, desde o tempo de Euclides, tem sido discutido em numerosos e excelentes tratados da literatura matemática. O problema acabado de indicar tem o seu ponto de partida na análise lógica da nossa intuição espacial.

O presente trabalho é uma nova tentativa para dar o enunciado dum sistema de axiomas *completo e tão simples quanto possível* para a geometria, e deduzir dele os teoremas geométricos mais importantes de tal modo que fique também claramente em evidência o significado dos diferentes grupos de axiomas e a projecção de cada um dos axiomas nas consequências que deles depois se tiram.

Capítulo III

A TEORIA DAS PROPORÇÕES

§13. Sistemas de números complexos[28]

No início deste capítulo trataremos antes do mais, de tópicos sobre os sistemas de números complexos que nos serão úteis mais tarde, especialmente para facilitar a exposição.

Os números reais constituem no seu conjunto um sistema de objectos com as seguintes propriedades:

PROPOSIÇÕES DE COMPOSIÇÃO (1–6):

1. Do número a e do número b resulta por «adição» um determinado número c, em símbolos

$$a+b=c \quad \text{ou} \quad c=a+b.$$

2. Se a e b são números dados, então existem sempre um e só um número x e também um e só um número y, tais que é respectivamente

$$a+x=b, \quad y+a=b.$$

3. Há um determinado número — chama-se-lhe 0 —, tal que para cada a se tem ao mesmo tempo

$$a+0=a \quad \text{e} \quad 0+a=a.$$

4. Dos números a e b ainda resulta, doutra maneira, por «multiplicação» um determinado número c, em símbolos:

$$ab=c \quad \text{ou} \quad c=ab.$$

---

[28] V. também o Suplemento I 2. [Na 1.ª edição portuguesa, esta secção tem o título «Sistema algébrico ordenado», aparentemente mais apropriado que o da edição inglesa, e a nota de rodapé remete para a conferência do autor referida no começo do Suplemento I 2, que na presente edição constitui o Apêndice VI. No corpo do texto daquela edição é também utilizada a designação de «sistema algébrico ordenado» em vez de «sistema de números complexos» (v. Nota 29)]

5. Se a e b são números dados quaisquer e a não é 0, então existe sempre um e um só número x e também um e só um número y tais que é, respectivamente,

$$ax = b, \quad ya = b.$$

6. Há um determinado número — chama-se-lhe 1, — tal que para cada a é ao mesmo tempo

$$a \cdot 1 = a \quad \text{e} \quad 1 \cdot a = a.$$

REGRAS DE CÁLCULO (7–12):

Se a, b, c são números quaisquer, então valem sempre as seguintes leis de cálculo:

7. $a + (b + c) = (a + b) + c,$
8. $a + b = b + a,$
9. $a(bc) = (ab)c,$
10. $a(b + c) = ab + ac,$
11. $(a + b)c = ac + bc,$
12. $ab = ba.$

PROPOSIÇÕES DE ORDEM (13–16):

13. Se a, b são dois números diferentes quaisquer, então é sempre um e só um deles (por exemplo a) maior do que o outro: ao último chama-se então o menor, em símbolos:

$$a > b \quad \text{e} \quad b < a.$$

Para nenhum número a se tem $a > a$.

14. Se é $a > b$ e $b > c$, então é também $a > c$.

15. Se $a > b$, então é também sempre

$$a + c > b + c.$$

16. Se $a > b$ e $c > 0$, então é também sempre

$$ac > bc.$$

PROPOSIÇÕES DE CONTINUIDADE (17–18):

17. (Proposição de Arquimedes) Se $a > 0$ e $b > 0$, são dois números quaisquer, então é sempre possível adicionar a a si próprio um número tal de vezes, que a soma resultante é maior do que b, em símbolos:

$$a + a + a + \cdots + a > b.$$

18. (Proposição de completabilidade) Não é possível juntar ao sistema de números, um outro sistema, de objectos, de tal modo que também no sistema obtido por esta ampliação e mantendo-se as relações entre os números, sejam satisfeitos todos os teoremas 1–17; ou abreviadamente: os números constituem um sistema de objectos, o qual, com a manutenção de todas as relações e de todos os teoremas citados, já não é susceptível de nenhuma ampliação.

Um sistema de objectos que possui só parte das propriedades 1–18, chama-se um sistema de números complexos [ou *sistema algébrico ordenado*[29]]. Um sistema de números complexos diz-se *arquimediano* ou *não-arquimediano* conforme satisfaz ou não a condição 17.

Algumas das propriedades 1–18 são consequências das restantes. Põe-se o problema de investigar a dependência lógica destas propriedades.[30] Responderemos no sexto capítulo, §32 e §33, a duas determinadas perguntas deste tipo, em virtude do seu significado geométrico; mas aqui, a este respeito, desejamos simplesmente indicar que em cada caso a condição 17 não é consequência lógica das propriedades que a precedem, visto que, por exemplo, o sistema algébrico ordenado $\Omega(t)$ considerado no §12, possui todas as propriedades 1–16, mas não verifica a condição 17.

E no que diz respeito aos teoremas de continuidade (17–18) são válidas as observações correspondentes, tais como foram feitas no §8 sobre os axiomas geométricos de continuidade.

§14. Demonstração do Teorema de Pascal

Neste e no capítulo seguinte baseamos o nosso estudo nos axiomas do *plano* de todos os grupos com excepção do axioma de continuidade, isto é, nos axiomas I 1–3 e II–IV. No presente 3.º capítulo queremos fundamentar a teoria das proporções de Euclides, com os axiomas citados, isto é, *no plano e independentemente do axioma de Arquimedes.*

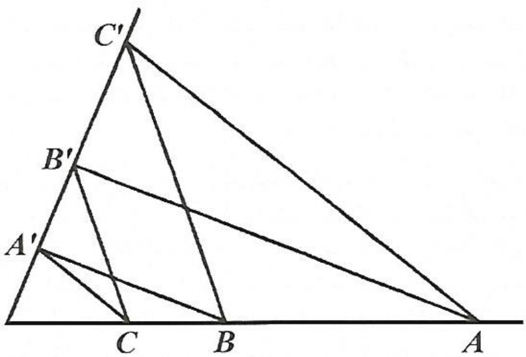
---

[29] [As propriedades 1–18 são, afinal de contas, as de *corpo ordenado arquimediano e completo,* sendo a completude entendida no sentido da propriedade 18.]

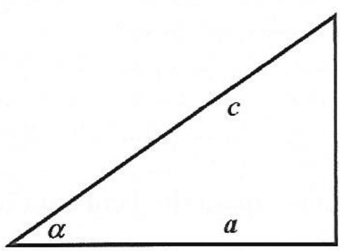
[30] V. Suplemento I 2 [e Apêndice VI].

Para este fim, demonstramos primeiramente uma proposição que é um caso particular do conhecido teorema de Pascal, da teoria das secções cónicas, e que, de futuro, abreviadamente, designaremos por teorema de Pascal. Este teorema diz:

TEOREMA 40. (Teorema de Pascal)[31] Sejam A, B, C, A' e B', C' dois ternos de pontos sobre cada uma de duas rectas que se intersectam num ponto distinto de qualquer daqueles pontos, respectivamente; se CB' é paralelo a BC' e CA' paralelo a AC', então é também BA' paralelo a AB'.



Para fazer a demonstração deste teorema, introduzamos primeiro as seguintes notações: É evidente que, num triângulo rectângulo, o cateto a é univocamente determinado pela hipotenusa c e pelo ângulo α da base, definido por a e c.



Pomos abreviadamente

$$a = \alpha c,$$

[31] F. Schur publicou uma demonstração interessante do teorema de Pascal, com base nos axiomas I–III do plano e espaço em *Math. Ann.,* Vol. 51; igualmente M. Dehn, *Math. Ann.*, Vol. 53. Depois J. Hjelmslev, apoiando-se nos resultados de G. Hessenberg (*Math. Ann.*, Vol. 61) conseguiu demonstrar o teorema de Pascal só com base nos axiomas I–III do plano ("Neue Begründung der ebenen Geometrie", *Math. Ann.*, Vol. 64), compare apêndice III deste livro.

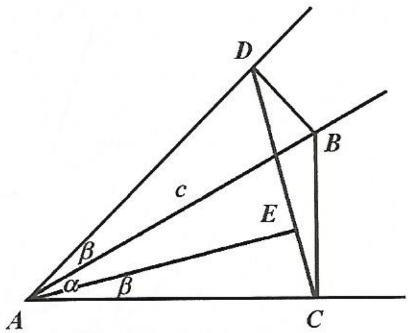
de modo que o símbolo αc significa sempre um determinado segmento, desde que c e α sejam, respectivamente, um segmento qualquer e um ângulo agudo qualquer, dados. Analogamente, dados um segmento qualquer a e um ângulo agudo qualquer α fica sempre univocamente determinado um segmento c por meio da igualdade $a = \alpha c$.

Mais ainda: se c designar um segmento qualquer e α, β designarem dois ângulos agudos quaisquer, afirmamos que se tem sempre a congruência de segmentos

$$\alpha\beta c \equiv \beta\alpha c,$$

e, consequentemente, que os símbolos α, β são sempre permutáveis entre si.

Para o demonstrar, tomemos o segmento $c = AB$ e desloquemos para cada um dos lados deste segmento, a partir de A, os ângulos α e β, respectivamente. Depois conduzamos de B, sobre os outros lados destes ângulos, as perpendiculares BC e BD, unamos C com D e conduzamos finalmente, a partir de A, a perpendicular AE a CD.



Visto que os ângulos $\angle ACB$ e $\angle ADB$ são rectos, os quatro pontos A, B, C, D estão numa circunferência e, por isso, os dois ângulos $\angle ACD$ e $\angle ABD$, como ângulos inscritos numa circunferência sobre a mesma corda AD, são congruentes entre si. Ora, por um lado $\angle ACD$ e $\angle CAE$, e por outro lado $\angle ABD$ e $\angle BAD$ perfazem ângulos rectos, e consequentemente resulta que também os ângulos $\angle CAE$ e $\angle BAD$ são congruentes entre si, isto é,

$$\angle CAE \equiv \beta,$$

donde

$$\angle DAE \equiv \alpha.$$

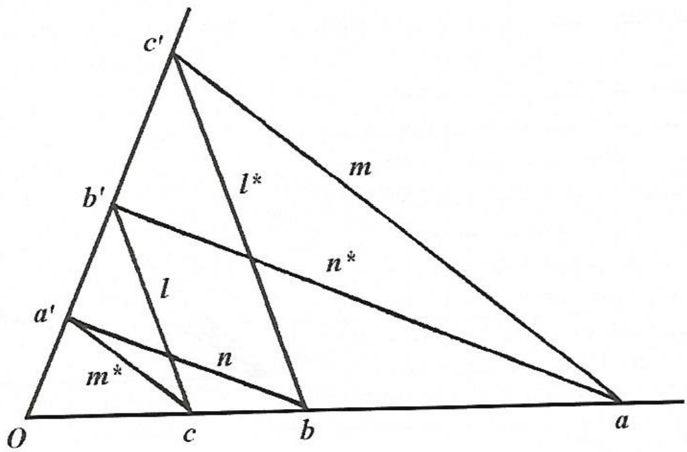
Obtemos agora imediatamente, as congruências de segmentos:

$$\begin{aligned} &\beta c \equiv AD, && \alpha c \equiv AC, \\ &\alpha\beta c \equiv \alpha(AD) \equiv AE, && \beta\alpha c \equiv \beta(AC) \equiv AE, \end{aligned}$$

e daqui resulta a validade da congruência que enunciámos.

Voltemos agora à configuração do teorema de Pascal e designemos o ponto de intersecção das duas rectas por O e os segmentos OA, OB, OC,

OA', OB', OC', CB', BC', AC', CA', BA', AB', respectivamente por a, b, c, a', b', c', l, l^*, m, m^*, n, n^*. Em seguida conduzamos de O perpendiculares a l, m^*, n; a perpendicular a l forma com as duas rectas OA, OA' os ângulos agudos λ', λ, e as perpendiculares a m^* e n construirão com as rectas OA e OA', respectivamente, os ângulos agudos μ', μ e ν', ν. Exprimindo de duas maneiras, esses segmentos das três perpendiculares, com o auxílio das hipotenusas e ângulos de base nos triângulos rectângulos correspondentes, seguindo as indicações precedentes, obtemos as seguintes três congruências de segmentos:



(1) $$\lambda b' \equiv \lambda' c,$$

(2) $$\mu a' \equiv \mu' c,$$

(3) $$\nu a' \equiv \nu' b.$$

Visto que, por hipótese, devem ser l paralelo a l^* e m paralelo a m^*, os segmentos das perpendiculares conduzidos de O respectivamente a l^* e m coincidem com os segmentos das perpendiculares a l e m^*, e obtém-se por consequência

(4) $$\lambda c' \equiv \lambda' b,$$

(5) $$\mu c' \equiv \mu' a.$$

Aplicando $\lambda' \mu$ a ambos os membros da congruência (3) e lembrando que, segundo o demonstrado anteriormente os símbolos de que se trata agora são permutáveis entre si, obtemos

$$\nu \lambda' \mu \, a' \equiv \nu' \mu \lambda' b.$$

Façamos agora intervir, nesta congruência, a congruência (2) para o lado esquerdo e a (4) para o lado direito; então fica

$$\nu\lambda'\mu'c \equiv \nu'\mu\lambda c',$$

ou

$$\nu\,\mu'\lambda'c \equiv \nu'\lambda\mu c'.$$

Aqui façamos intervir a congruência (1) no lado esquerdo e a (5) no lado direito; então virá

$$\nu\mu'\lambda b' \equiv \nu'\lambda\mu' a,$$

ou

$$\lambda\mu'\nu b' \equiv \lambda\mu'\nu' a.$$

Com base numa das propriedades dos nossos símbolos indicada na pág. 53, deduzimos imediatamente, da última congruência

$$\mu'\nu b' \equiv \mu'\nu' a,$$

e daqui

(6) $$\nu b' \equiv \nu' a.$$

Imaginando agora a perpendicular de O a n e conduzindo de A a B' perpendiculares a ela, a congruência (6) mostra que os pés das duas últimas perpendiculares coincidem, isto é, o segmento de recta $n^* = AB'$ faz com a perpendicular a n um ângulo recto e é consequentemente paralelo a n. Com isto fica concluída a demonstração do teorema de Pascal.

Para fundamentar a teoria das proporções utilizamos, no que segue, unicamente aquele caso especial do teorema de Pascal no qual se tem a congruência dos segmentos

$$OC \equiv OA',$$

e, por conseguinte, também

$$OA \equiv OC',$$

e em que os pontos A, B, C estão no mesmo raio a partir de O. Neste caso especial, chega-se à demonstração duma maneira particularmente simples, do seguinte modo:

Deslocamos para OA' a partir de O o segmento OB até D', de tal modo que a recta de ligação BD' fica paralela a CA' e a AC'. Por causa da congruência dos triângulos $OC'B$ e OAD' é

(1†) $$\angle OC'B \equiv \angle OAD'.$$

Visto que CB' e BC' são, por hipótese, paralelas entre si, então é

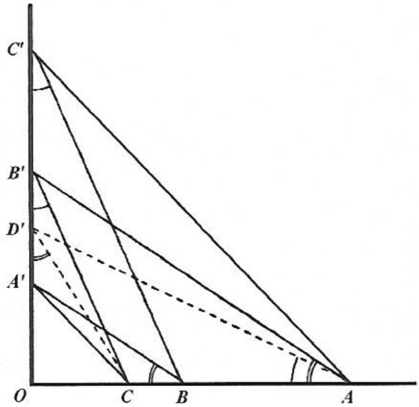
(2†) $$\angle OC'B \equiv \angle OB'C.$$

De (1†) e de (2†) obtemos

$$\angle OAD' \equiv \angle OB'C;$$

mas então, do estudo da circunferência, $ACD'B'$ é um quadrilátero inscrito numa circunferência, e por isso vale, segundo um teorema conhecido sobre os ângulos de um quadrilátero inscrito numa circunferência, a congruência

(3†) $$\angle OD'C \equiv \angle OAB'.$$



Por outro lado, em vista da congruência dos triângulos $OD'C$ e OBA' é também

(4†) $$\angle OD'C \equiv \angle OBA'.$$

De (3†) e (4†) obtemos

$$\angle OAB' \equiv \angle OBA',$$

e esta congruência mostra que AB' e BA' são paralelas entre si, como pede o teorema de Pascal.

Se é dada uma recta qualquer, um ponto exterior a ela e um ângulo qualquer, então pode-se, evidentemente, encontrar por meio do deslocamento deste ângulo e do traçado duma paralela, uma recta que passa pelo ponto dado e que corta a recta dada sob um ângulo dado. Em virtude desta circunstância podemos, enfim, graças também a outros resultados, aplicar à demonstração do teorema do Pascal, mais geral, o seguinte processo simples:

Conduza-se por B uma recta que encontra OA' no ponto D' sob o ângulo $\angle OCA'$, de tal modo que seja válida a congruência

(1*) $$\angle OCA' \equiv \angle OD'B;$$

então, por um teorema conhecido do estudo da circunferência, $CBD'A'$ é um quadrilátero inscrito, e por consequência segundo o teorema da congruência de ângulos inscritos na mesma corda, é válida a congruência

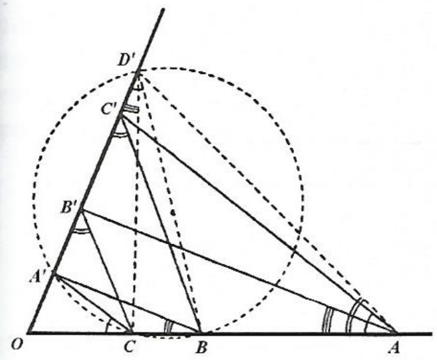
(2*) $$\angle OBA' \equiv \angle OD'C.$$

Visto que CA' e AC' são, por hipótese, paralelos entre si, é

(3*) $$\angle OCA' \equiv \angle OAC';$$

e de (1*) e (3*) resulta a congruência

$$\angle OD'B \equiv \angle OAC'.$$



Mas então é também $BAD'C'$ um quadrilátero inscrito, e pelo teorema dos ângulos dum quadrilátero inscrito, é válida a congruência

(4*) $\angle OAD' \equiv \angle OC'B.$

Visto que, além disso, por hipótese CB' é paralelo a BC', temos também

(5*) $\angle OB'C \equiv \angle OC'B,$

e de (4*) e (5*) resulta a congruência

$$\angle OAD' \equiv \angle OB'C.$$

Isto mostra, finalmente, que $CAD'B'$ é um quadrilátero inscrito e, por consequência que também é válida a congruência

(6*) $$\angle OAB' \equiv \angle OD'C.$$

De (2*) e (6*) resulta

$$\angle OBA' \equiv \angle OAB',$$

e esta congruência mostra que BA' e AB' são paralelos entre si, como pede o teorema de Pascal.

No caso em que D' coincida com um dos pontos A', B', C' ou no caso em que a ordem dos pontos A, B, C seja outra, então é necessária uma variação deste processo, a qual facilmente se obterá.[32]

---

[32] Teria interesse encontrar também a utilização do teorema do ponto de intersecção das alturas dum triângulo na fundamentação do teorema de Pascal e no estudo das proporções; comparem-se sobre o assunto F. Schur, *Math. Ann.*,

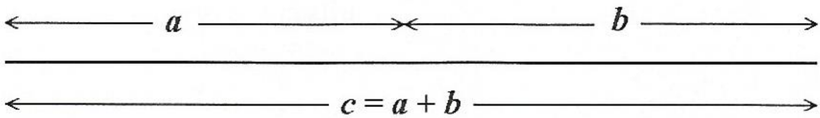
§15. O cálculo de segmentos com base no Teorema de Pascal

O teorema de Pascal, demonstrado na secção anterior, coloca-nos na situação de poder introduzir na geometria um cálculo de segmentos no qual são válidas, tais quais, todas as regras de cálculo para os números reais.

Em vez da palavra «congruente» e do sinal $\equiv$ servimo-nos no cálculo de segmentos da palavra «igual» e do sinal $=$.

Se três pontos A, B, C estão sobre uma recta e B está entre A e C, então representaremos por $c = AC$ a *soma* dos dois segmentos $a = AB$ e $b = BC$ e pomos:

$$c = a + b.$$



Os segmentos a e b dizem-se menores que c, simbolicamente

$$a < c, \quad b < c$$

e c diz-se maior do que a e b, simbolicamente

$$c > a, \quad c > b.$$

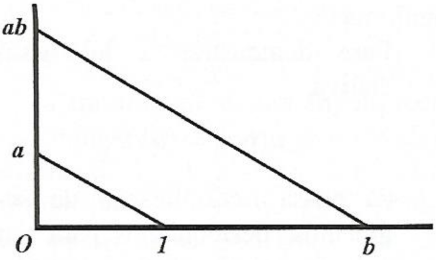
Dos axiomas lineares de congruência III 1–3 concluímos facilmente que para a adição de segmentos que acabámos de definir é válida a lei *associativa*

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

assim como a lei *comutativa* $a + b = b + a$.

Para definir geometricamen o produto dum segmento a por um segmento b servimo-nos da seguinte construção: Escolhemos primeiramente um segmento qualquer, fixo em tudo o que segue, e designemo-lo por $\mathbf{1}$.

Vol. 57, e J. Mollerup, *Studier over den plane geometris Aksiomer*, Copenhaga, 1903.



Desloquemos para um dos lados dum ângulo recto e a partir do vértice O, o segmento **1** e, além disso também a partir de O, o segmento b; em seguida desloquemos para o outro lado o segmento a.

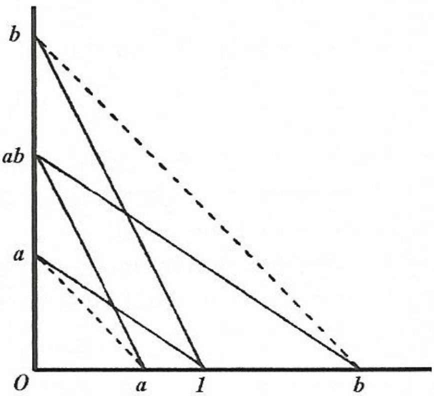
Unamos as extremidades dos segmentos **1** e a por uma recta e conduzamos uma paralela a esta recta pela extremidade do segmento b; esta determinará um segmento c no outro lado do ângulo: chamemos a este segmento c o *produto* do segmento a pelo segmento b e designemo-lo por

$$c = ab.$$

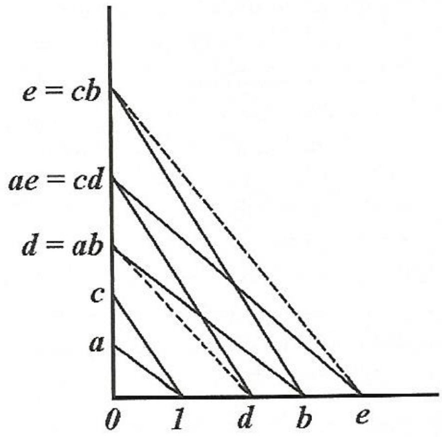
Demonstraremos, em primeiro lugar, que é válida a lei *comutativa*

$$ab = ba,$$

para a multiplicação de segmentos que se acabou de definir.



Para este fim construamos primeiramente, da maneira acima indicada, o segmento ab. Além disso, desloquemos o segmento a para o primeiro lado do ângulo recto e o segmento b para outro lado; unamos a extremidade do segmento **1** com a extremidade do segmento b, que está no outro lado, por meio duma recta, e tracemos uma paralela a esta recta pela extremidade de a que está no primeiro lado: esta paralela determina o segmento ba sobre o outro lado; e, de facto, este segmento ba coincide, como mostra a figura, com o segmento ab, anteriormente construído, em vista do paralelismo das linha auxiliares a tracejado, paralelismo que é consequência do teorema de Pascal (teorema 40). Também, reciprocamente, da lei comutativa no nosso cálculo de segmentos, resulta, como imediatamente se verá, que, o que na pág. 55 foi chamado o caso especial do teorema de Pascal, é seguramente válido para aquelas figuras onde as semi-rectas OA e OA' formam um ângulo recto.



Para demonstrar a lei associativa,

$$a(bc) = (ab)c,$$

da nossa multiplicação de segmentos, desloquemos para um lado do ângulo recto, e a partir de O, os segmentos $\mathbf{1}$ e b e para o outro lado, e do mesmo modo a partir de O, os segmentos a e c. Depois construamos os segmentos $d = ab$ e $e = cb$, e desloquemos estes segmentos d e e para o primeiro lado, a partir de O.

Em seguida construamos ae e cd; e então, novamente com base no teorema de Pascal, tem-se, como é evidente pela figura junta, que as extremidades destes segmentos, coincidem, isto é

$$ae = cd \quad \text{ou} \quad a(cb) = c(ab),$$

e daqui resulta, com o auxílio da lei comutativa, que é também

$$a(bc) = (ab)c.^{33}$$

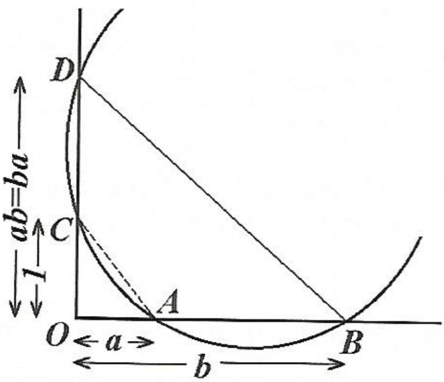
Como se vê, nas demonstrações apresentadas quer para a lei comutativa, quer para a associativa, utilizámos unicamente aquele caso especial do teorema de Pascal cuja demonstração nas páginas 55 e 56 (§14) se obtém dum modo particularmente simples, por uma aplicação do teorema do quadrilátero inscrito numa circunferência.

---

[33] Comparem-se, quanto a isto, "Methoden zur Begründung der Proportionlehre" de A. Kneser, *Archiv für Math. und Phys.*, Ser. III, Vol. 2, e J. Mollerup, *Math. Ann.*, Vol. 56, assim como *Studier over den plane geometris Aksiomer*, Copenhaga 1903, que entretanto foram publicados, e nos quais se parte da igualdade de proporções. F. Schur, "Zur Proportionlehre", *Math. Ann.*, Vol. 57, nota que já Kupffer, (*Sitzungsber der Naturforschergesellschaft zu Dorpat*, 1893) tinha demonstrado correctamente a lei comutativa da multiplicação. Contudo deve considerar-se insuficiente a última fundamentação da teoria das proporções de Kupffer.

Resumindo o que ficou desenvolvido, chegamos à seguinte fundamentação das leis da multiplicação do cálculo de segmentos, que me parece ser a mais simples de todas as que até agora são conhecidas:

Para um lado de um ângulo recto, a partir do vértice O, desloquemos os segmentos $a = OA$ e $b = OB$ e além disso, para o outro lado, o segmento $\mathbf{1} = OC$. A circunferência que passa por A, B, C, corta o último lado num ponto D. O ponto D obtém-se facilmente, sem usar o compasso, e só com base nos axiomas de congruência, tomando o simétrico do ponto C relativamente à perpendicular a OC conduzida pelo centro da circunferência.



Pela igualdade dos ângulos $\angle OCA$ e $\angle OBD$ é, por definição de produto de dois segmentos (pág. 59),

$$OD = ab,$$

e, por causa da igualdade dos ângulos $\angle ODA$ e $\angle OBC$ é, pela mesma definição,

$$OD = ba.$$

A lei comutativa da multiplicação $ab = ba$, que daqui resulta, *demonstra* agora (segundo uma observação na pág. 59) que é válido o que na pág. 55 se chamou caso especial do teorema de Pascal, para os lados dum ângulo recto, e daqui ainda resulta, com o que ficou dito na pág. 60, a lei associativa da multiplicação

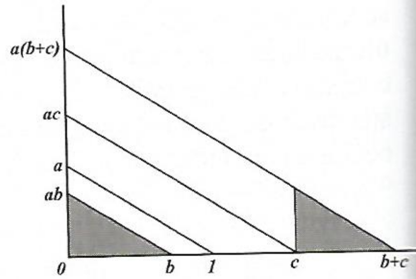
$$a(bc) = (ab)c.$$

Finalmente, a lei *distribuitiva*

$$a(b + c) = ab + ac,$$

também é válida no nosso cálculo de segmentos.

Para a demonstrar, construamos os segmentos ab, ac e $a(b + c)$ e conduzamos pela extremidade do segmento c (ver figura junta) uma paralela ao outro lado do ângulo recto. A congruência dos dois triângulos rectângulos, tracejados na figura, e a aplicação do teorema da igualdade dos lados opostos num paralelogramo, dá a demonstração desejada.



Se b e c são segmentos quaisquer, então há sempre um segmento a, tal que $c = ab$; este segmento representar-se-á por $\frac{c}{b}$ e chamar-se-á o *quociente* de c por b.

§16. As proporções e os teoremas da semelhança

Com o auxílio do cálculo de segmentos que acabámos de expor, pode fundamentar-se (sem obstáculos e sem o axioma de Arquimedes) a teoria de Euclides das proporções do seguinte modo:

DEFINIÇÃO. Se a, b, a', b' são quaisquer quatro segmentos a *proporção*:

$$a : b = a' : b'$$

significa unicamente a igualdade de segmentos

$$ab' = ba'.$$

DEFINIÇÃO. Dois triângulos dizem-se *semelhantes* quando os seus ângulos se podem fazer corresponder de tal modo que ângulos correspondentes são congruentes.

TEOREMA 41. Se a, b e a', b' são lados correspondentes em dois triângulos semelhantes, então tem-se a proporção

$$a : b = a' : b'.$$

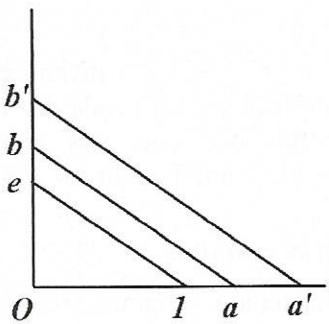
Dem. Consideremos primeiramente o caso particular em que os ângulos limitados por a, b e a', b' são rectos e suponhamos os dois triângulos inscritos num mesmo ângulo recto. Desloquemos para um lado, o segmento **1** a partir do vértice, e conduzamos pela extremidade deste segmento **1** a paralela às duas hipotenusas; esta determina no outro lado o segmento e; então pela nossa definição de produto de segmentos, é

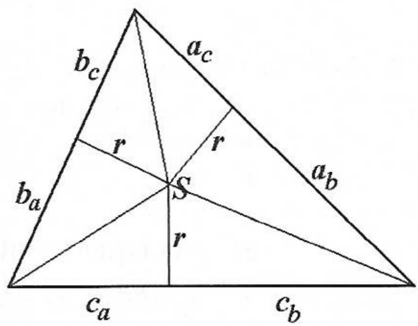
$$b = ea, \quad b' = ea';$$

donde, temos:

$$ab' = ba',$$

isto é,
$$a : b = a' : b'.$$





Regressemos agora ao caso geral. Construamos em cada um dos dois triângulos semelhantes os pontos S e S' de intersecção das bissectrizes dos três ângulos, cuja existência se obtém facilmente a partir do teorema 25, e conduzamos a partir destes pontos as três perpendiculares r e r', respectivamente, aos três lados dos triângulos. Designemos os segmentos obtidos nestes lados por

$$a_b, a_c, b_c, b_a, c_a, c_b \quad \text{e} \quad a'_b, a'_c, b'_c, b'_a, c'_a, c'_b,$$

respectivamente.

O caso especial do nosso teorema, demonstrado anteriormente, dá-nos, então, as proporções:

$$\begin{aligned} a_b : r &= a'_b : r' \qquad & b_c : r &= b'_c : r' \\ a_c : r &= a'_c : r' \qquad & b_a : r &= b'_a : r'; \end{aligned}$$

e destas, por meio da lei distributiva, obtemos:

$$a : r = a' : r', \quad b : r = b' : r',$$

e daqui

$$b'ar' = b'ra', \quad a'br' = a'rb'.$$

Estas igualdades dão, com o auxílio da lei comutativa da multiplicação:

$$a : b = a' : b'.$$

Do teorema 41 extraímos facilmente o teorema fundamental no estudo das proporções, que enunciamos como segue:

TEOREMA 42. Se duas paralelas intersectam nos lados dum ângulo qualquer os segmentos a, b, a', b', respectivamente, então é válida a proporção

$$a : b = a' : b'.$$

Reciprocamente, se quatro segmentos a, b, a', b' verificam esta proporção, e a, a' e b, b' são dois a dois deslocados para cada um dos lados dum ângulo qualquer, então as rectas que unem os pontos extremidades de a, b e a', b', respectivamente, são paralelas entre si.

§17. As equações das rectas e planos

Ao sistema de segmentos até agora considerado juntamos ainda um outro tal sistema de segmentos. De facto, com base nos axiomas da ordem é possível distinguir com facilidade sobre uma recta um sentido «*positivo*» e um «*negativo*». Designemos agora, um segmento AB, (que até agora fosse designado por a) por a só quando B ficar no sentido positivo a partir de A, e em caso contrário designemo-lo por $-a$. Um ponto designamo-lo como o segmento 0. O segmento a chama-se «*positivo*» quando maior do que 0, simbolicamente: $a > 0$; o segmento $-a$ chama-se «*negativo*» quando menor do que 0, simbolicamente: $-a < 0$.

Então nesta extensão do cálculo de segmentos são válidas todas as regras de cálculo 1–16 que foram condensadas no §13 para os números reais. Fazemos ressaltar os seguintes factos especiais: Tem-se sempre

$$a \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot a = a \quad \text{e} \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Se $ab = 0$, então é, ou $a = 0$, ou $b = 0$. Se $a > b$ e $c > 0$, então resulta sempre $ac > bc$. Além disso, se $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$ são n pontos numa recta, então a soma dos segmentos A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 é igual a zero.

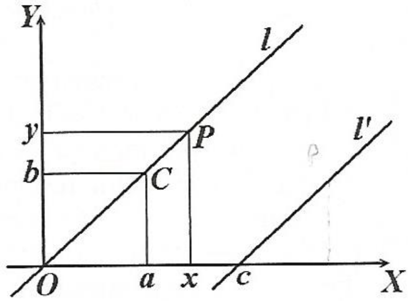
Tomemos agora como eixos ortogonais, num plano α, duas rectas perpendiculares entre si passando por O, e depois desloquemos segmentos quaisquer x, y para as duas rectas, a partir de O; em seguida conduzamos as perpendiculares pelas extremidades dos segmentos x, y e determinemos o ponto P de intersecção destas perpendiculares: os segmentos x, y chamam-se as *coordenadas* do ponto P. Cada ponto do plano α é univocamente determinado pelas suas coordenadas x, y que podem ser segmentos positivos, negativos ou 0.

Seja l uma qualquer recta do plano α, passando por O e por um ponto C com coordenadas a, b. Se x, y são as coordenadas dum ponto qualquer P de l, então encontramos facilmente, pelo teorema 42, como equação da recta l,

$$a : b = x : y, \quad \text{ou} \quad bx - ay = 0.$$

Se l' for uma paralela a l que intersecta no eixo dos x o segmento c, então obtemos a equação da recta l', substituindo o segmento x pelo segmento $x - c$ na equação da recta l; a equação desejada é, portanto,

$$bx - ay - bc = 0.$$



A partir destas considerações concluímos facilmente, dum modo que é independente do axioma de Arquimedes, que cada recta, num plano, se representa por uma equação linear nas coordenadas x, y, e reciprocamente, que cada equação linear representa uma recta, sendo os coeficientes segmentos na geometria em questão.

Os resultados correspondentes para a geometria do espaço demonstram-se também facilmente.

Daqui em diante, a edificação da geometria pode fazer-se seguindo os métodos que comummente se aplicam na geometria analítica. Até aqui, neste terceiro capítulo, nunca utilizámos o axioma de Arquimedes; supondo agora a sua validade, podemos fazer corresponder aos pontos duma recta qualquer no espaço, números reais, da maneira seguinte: Escolhamos sobre a recta dois pontos quaisquer e façamos corresponder a eles os números 0 e 1; depois dividamos ao meio o segmento 01 e designemos o ponto médio correspondente por $\frac{1}{2}$, em seguida o ponto médio do segmento $0\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{4}$ etc.; depois de ter usado n vezes este processo, chegamos a um ponto a que corresponde o número $\frac{1}{2^n}$. Desloquemos, agora, o segmento $0\frac{1}{2^n}$ partindo do ponto 0, quer para o lado do ponto 1 quer para o outro lado, por exemplo, m vezes, e dêmos aos pontos que se obtêm os valores numéricos $\frac{m}{2^n}$ e $-\frac{m}{2^n}$, respectivamente.

A partir do axioma de Arquimedes pode-se concluir facilmente (com base nesta correspondência) que a qualquer ponto da recta se pode fazer corresponder um número real, duma maneira unívoca, e de tal modo que esta correspondência tem a seguinte propriedade: se A, B, C são três pontos quaisquer da recta e α, β, γ, os correspondentes números reais e se B está entre A e C, então estes números satisfazem ou à desigualdade

$$\alpha < \beta < \gamma, \text{ ou a } \alpha > \beta > \gamma.$$

Dos desenvolvimentos do §9, no cap. II, resulta claramente que, para todo o número que ali pertence ao corpo de números algébricos Ω, deve necessariamente existir um ponto da recta a que ele corresponde. Se a cada outro número real também corresponde um ponto, isso depende de ser ou não válido o axioma de completabilidade V 2, na geometria em questão.

Pelo contrário, se numa geometria só se supõe a validade do axioma de Arquimedes, então é sempre possível ampliar o sistema de pontos, rectas e planos por meio de elementos «*irracionais*», de modo que para todo a recta da geometria resultante, a cada sistema de três números reais satisfazendo à equação dessa recta corresponda, sem excepção, um ponto. Por meio duma convenção apropriada, pode simultaneamente conseguir-se que na geometria ampliada sejam válidos *todos* os axiomas I–V. Esta geometria (ampliada pela introdução do elementos irracionais) não é outra senão a geometria analítica, cartesiana, ordinária, do espaço, na qual também é válido o axioma de completabilidade V 2.[34]

[34] Compare as notas no final do §8.