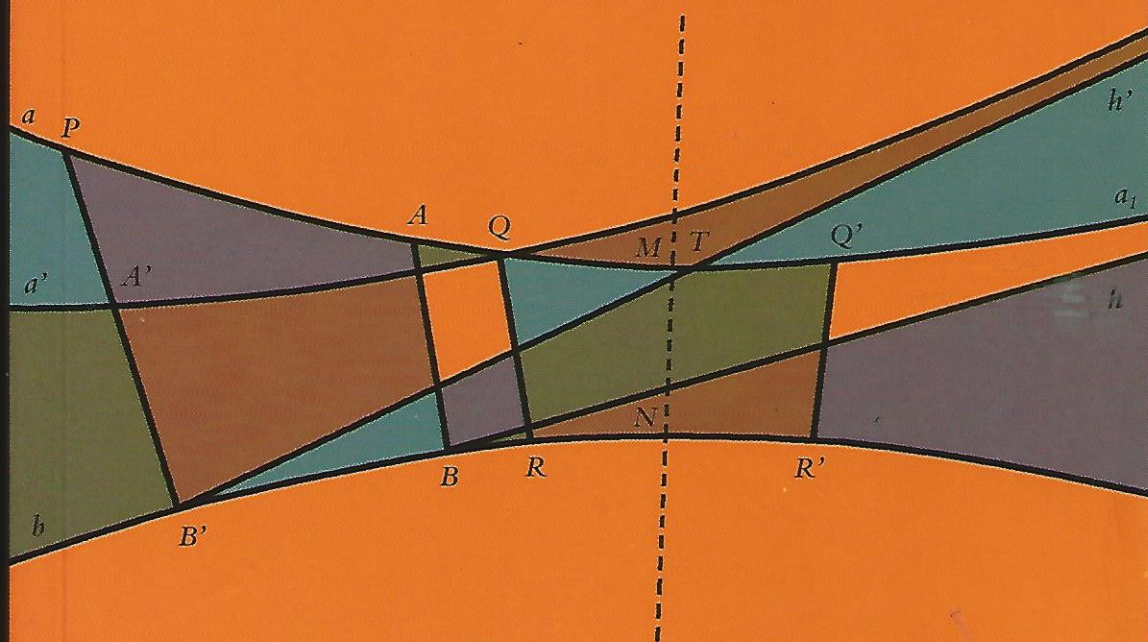


FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA

DAVID HILBERT

Edição revista e coordenada por
A. J. FRANCO DE OLIVEIRA



Com apêndices do autor
e suplementos por P. Bernays,
F. Enriques e H. Poincaré

«Não é este um livro de texto de geometria elementar, mas esta tradução é dedicada aos nossos professores da matéria e aos estudantes de matemática das nossas universidades. Os tradutores têm a esperança de que um cuidadoso estudo dos vários problemas deste livro contribuirá indirectamente para implantar neles a ideia de que, em geral, os males do ensino da geometria nas nossas escolas só superficialmente residem em deficiências de ordem pedagógica, mas antes se encontram na falta de contacto com os problemas vivos, actuais, da matéria que se ensina e do indispensável treino para a investigação desses problemas.»

MARIA DO PILAR RIBEIRO, JOSÉ DA SILVA PAULO (1951)

«Assim como a teoria dos conjuntos de G. Cantor (posteriormente axiomatizada por E. Zermelo em 1908) moldou decisivamente os conteúdos matemáticos do século xx, os *Fundamentos da Geometria* (1.^a edição publicada em 1899), de D. Hilbert, moldaram definitivamente o método hipotético-dedutivo das teorias matemáticas modernas.»

PAULINO LIMA FORTES, A. J. FRANCO DE OLIVEIRA (2001)

«O trabalho de Hilbert teve importância capital na mudança da concepção da geometria e, em certo sentido, na da concepção idealística da verdade [...] Hilbert foi um gigante, e somos afortunados por podermos viver na sua sombra.»

HARRY GOHEEN

T R A J E C T O S  C I Ê N C I A

ISBN 972-662-927-6



9 789726 629276 >

gradiva

© *Paulino Lima Fontes, A. J. Franco de Oliveira/Gradiva — Publicações, L.^{da}*

Tradução baseada na 7.^a ed. de *Grundlagen der Geometrie*, de David Hilbert, Estugarda, B. G. Teubner Verlag, 1930, trad. do alemão por Leo Unger e rev. por P. Bernays (David Hilbert, *Foundations of Geometry*, Open Court Publishing Company, 1971): *Maria do Pilar Ribeiro* (col. de *J. da Silva Paulo*), *Paulino Lima Fontes* e *A. J. Franco de Oliveira* (col. de *A. Vaz Ferreira*)

Revisão científica e coordenação: *A. J. Franco de Oliveira*

Capa: *Armando Lopes*

Fotólitos, impressão e acabamento: *Multitipo — Artes Gráficas, L.^{da}*

Reservados os direitos para Portugal por: *Gradiva — Publicações, L.^{da}*

Rua Almeida e Sousa, 21, r/c, esq. — 1399-041 Lisboa

Telefs. 21 397 40 67/8 — 21 397 13 57 — 21 395 34 70

Fax 21 395 34 71 — Email: gradiva@ip.pt

URL: <http://www.gradiva.pt>

1.^a edição: *Setembro de 2003*

Depósito legal n.º 199 892/2003

gradiva

Editor: *Guilherme Valente*

Visite-nos na Internet
<http://www.gradiva.pt>

PREÂMBULO

Todas as disciplinas matemáticas são historicamente determinadas. A geometria, em especial, teve um longo e turbulento desenvolvimento desde o tempo de Euclides e dos primeiros comentadores, passando pela Idade Média até aos tempos modernos. O trabalho de Hilbert teve importância capital na mudança da concepção da geometria e, em certo sentido, na da concepção idealística da verdade. A partir da primeira edição [1899] dos *Fundamentos da Geometria*, o livro de Hilbert sofreu alterações profundas, de tal modo que a última edição é praticamente irreconhecível da primeira. É por esta razão que se impunha tornar acessível aos estudantes universitários e aos professores liceais aquela última edição em língua inglesa.

Muitos matemáticos exprimiram a opinião de que este trabalho de Hilbert é de menor importância, está cheio de erros e despido de significância moderna. Sem desrespeito por todos aqueles que assim se exprimiram, devo todavia enfatizar a grande importância da tentativa de desenvolver um tratamento completo e consistente dos axiomas da geometria e de sintetizar estes axiomas no contexto da análise dos números reais. Tendo partilhado com muitos de vós algumas dúvidas quando confrontados, pela primeira vez, com a geometria analítica, após a geometria sintética dos cursos secundários, também eu indaguei durante anos qual seria a relação entre as duas. Hilbert ultrapassou essa perplexidade muito antes de mim, ao demonstrar que na análise dos números reais e, em particular, na álgebra tridimensional real está um modelo possível dos axiomas da geometria por si revistos. Mais do que isso, ele mostrou como estabelecer que este modelo é essencialmente único, isto é, que qualquer modelo lhe é isomorfo.

Há alguma confusão na linguagem que Hilbert utiliza na primeira edição, e parte desta confusão estende-se até esta última edição. Devem tomar-se como primitivos não somente os termos ponto, recta, plano e a relação de estar entre, mas também a relação de incidência de rectas com pares de pontos diferentes, bem como a distinta relação de incidência de planos com tripos de pontos não colineares, a relação de congruência de segmentos e a distinta relação de congruência de ângulos.

Coisas deste tipo são importantes; todavia elas não retiram demasiada utilidade a este texto, sobretudo para o leitor avisado à partida de que o rigor no passado era o bastante. Hilbert foi um gigante, e somos afortunados por poder viver na sua sombra.

Harry Goheen

Professor de Matemática
Universidade Estadual de Oregon



David Hilbert
(1862-1942)

«Assim começou, portanto, todo o conhecimento humano, com intuições, passando daqui a noções e acabando com ideias.»

Kant, *Crítica da Razão Pura*, “Elementos de Transcendentalismo”, Segunda Parte, II.

INTRODUÇÃO

A geometria, do mesmo modo que a aritmética, só precisa para a sua edificação lógica subsequente de poucas e simples proposições fundamentais. Estas proposições fundamentais chamam-se *axiomas* da geometria. O enunciado dos axiomas da geometria e o exame das suas relações mútuas é um problema que, desde o tempo de Euclides, tem sido discutido em numerosos e excelentes tratados da literatura matemática. O problema acabado de indicar tem o seu ponto de partida na análise lógica da nossa intuição espacial.

O presente trabalho é uma nova tentativa para dar o enunciado dum sistema de axiomas *completo e tão simples quanto possível* para a geometria, e deduzir dele os teoremas geométricos mais importantes de tal modo que fique também claramente em evidência o significado dos diferentes grupos de axiomas e a projecção de cada um dos axiomas nas consequências que deles depois se tiram.

Capítulo I

OS CINCO GRUPOS DE AXIOMAS

§1. Os elementos da geometria e os cinco grupos de axiomas

DEFINIÇÃO. Imaginemos três sistemas diferentes de objectos: aos objectos do *primeiro* sistema chamemos pontos e representemo-los por A, B, C, \dots ; aos objectos do *segundo* sistema chamemos rectas e representemo-los por a, b, c, \dots ; aos objectos do *terceiro* sistema chamemos planos e representemo-los por $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Os pontos chamam-se também os *elementos da geometria linear*, os pontos e rectas os *elementos da geometria plana* e os pontos, rectas e planos os *elementos da geometria do espaço* ou do *espaço*.

Imaginemos os pontos, rectas e planos como tendo certas relações mútuas e indiquemos estas relações por palavras tais como «estar situado», «entre», «congruente»; a descrição precisa e, para fins matemáticos, completa destas relações, é dada por meio dos *axiomas da geometria*.

Podemos dividir os axiomas da geometria em cinco grupos; exprimindo, cada um destes grupos, por si só, certos factos fundamentais da nossa intuição que estão naturalmente associados. Designamos do seguinte modo estes grupos de axiomas:

- | | | |
|-----|-----|----------------------------------|
| I | 1-8 | Axiomas da <i>Incidência</i> |
| II | 1-4 | Axiomas da <i>Ordem</i> |
| III | 1-5 | Axiomas da <i>Congruência</i> |
| IV | | Axioma das <i>Paralelas</i> |
| V | 1-2 | Axiomas da <i>Continuidade</i> . |

§2. O I grupo de axiomas: axiomas da incidência

Os axiomas deste grupo estabelecem entre os objectos atrás referidos, pontos, rectas e planos, uma incidência e enunciam-se como segue:

I 1. *Para cada dois pontos A, B há sempre uma recta a que está associada com cada um dos dois pontos A, B .*

I 2. *Para dois pontos A, B não há mais do que uma recta que está associada com cada um dos dois pontos A, B .*

Aqui, como no que segue, por dois, três, ... pontos, rectas, planos, entende-se sempre, respectivamente, pontos, rectas, planos, *diferentes*.

Em lugar de «estar associados» empregaremos também outras expressões como por exemplo: *a passa por A e por B ; a liga A e, ou com B ; A está sobre a ; A é um ponto de a ; o ponto A existe sobre a , etc.* Quando A está sobre a recta a e, além disso, sobre uma recta b , utilizaremos também as expressões: *as rectas a e b cortam-se em A , têm em comum o ponto A , etc.*

I 3. *Sobre uma recta há sempre, pelo menos, dois pontos. Há pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma recta.*

I 4. *Para quaisquer três pontos A, B, C que não estão sobre uma mesma recta, há sempre um plano α , que está associado com qualquer dos três pontos A, B, C . Para cada plano há sempre um ponto que está associado com ele.*

Empregamos também as expressões: *A está em α ; A é ponto de α ; etc.*

I 5. *Para cada três pontos que não estão sobre uma mesma recta, não há mais do que um plano que está associado com qualquer dos três pontos A, B, C .*

I 6. *Se dois pontos A, B numa recta a estão num plano α , então cada ponto de a está no plano α .*

Neste caso dizemos: *a recta a está no plano α ; etc.*

I 7. *Se dois planos α, β têm um ponto comum A , então têm, pelo menos, mais um outro ponto comum.*

I 8. *Há, pelo menos, quatro pontos que não estão no mesmo plano.*

O axioma I 7, exprime que o espaço não tem mais do que três dimensões, o axioma I 8, pelo contrário, que o espaço não tem menos do que três dimensões.

Os axiomas I 1–3 poderão chamar-se *axiomas planos do 1.º grupo*, para distinguir dos axiomas I 4–8, que designamos como *axiomas do espaço do 1.º grupo*.

Dos teoremas que resultam dos axiomas I 1–8 mencionemos, só os dois seguintes:

TEOREMA 1. Duas rectas dum plano têm um ou nenhum ponto comum; dois planos ou não têm nenhum ponto comum, ou têm uma recta e mais nenhum ponto comum; um plano e uma recta que não existe nele, têm um ou nenhum, ponto comum.

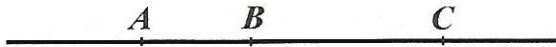
TEOREMA 2. Por uma recta e um ponto que não existe nela, bem como por duas rectas distintas com um ponto comum, passa sempre um plano e um só.

§3. O II grupo de axiomas: axiomas da ordem²

Os axiomas deste grupo definem a noção «entre» e tornam possível, com base nesta noção, a ordenação dos pontos sobre uma recta, num plano e no espaço.

DEFINIÇÃO. Os pontos duma recta dispõem-se com certas relações entre si, para cuja descrição nos serve, em particular, a palavra «entre».

II 1. *Se um ponto B está entre um ponto A e um ponto C, então A, B, C são três pontos distintos duma recta, e B está também entre C e A.*



II 2. *Para cada dois pontos A e C há sempre, pelo menos, um ponto B sobre a recta AC tal que C está entre A e B.*



II 3. *Dados três pontos quaisquer duma recta, não há mais do que um que está entre os outros dois.*

Além destes axiomas lineares de ordem servimo-nos ainda dum axioma de ordem para o plano.

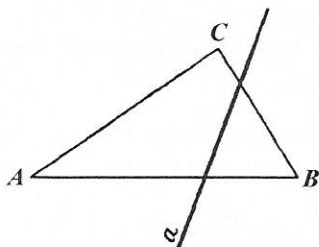
DEFINIÇÃO. Consideremos sobre uma recta a dois pontos A e B ; chamemos ao sistema dos dois pontos A e B , um *segmento* e

² Estes axiomas foram completamente investigados, pela primeira vez, por M. Pasch nas suas *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882. Em particular, o conteúdo do axioma II 4 é devido a M. Pasch.

representamo-lo por AB ou BA . Os pontos entre A e B chamam-se pontos do segmento AB , ou também *interiores* ao segmento AB ; os pontos A e B chamam-se pontos *extremos* do segmento AB . Todos os restantes pontos da recta a dizem-se *exteriores* ao segmento AB .

II 4. *Sejam A, B, C três pontos que não estão em linha recta e a uma recta no plano ABC , que não encontra nenhum dos pontos A, B, C ; se a recta a passa por um ponto do segmento AB , então, seguramente, passa também ou por um ponto do segmento AC ou por um ponto do segmento BC .*

Exprimindo-nos intuitivamente: quando uma recta entra no interior dum triângulo ela também sai. É então demonstrável que os dois segmentos AC e BC não podem ser ambos cortados pela recta a .

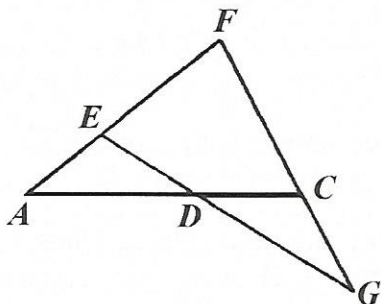


§4. Consequências dos axiomas de incidência e da ordem

Dos axiomas I e II resultam os seguintes teoremas:

TEOREMA 3. Para cada dois pontos A e C há sempre pelo menos um ponto D , sobre a recta AC , que está entre A e C .

Dem. Segundo o axioma I 3, há um ponto E exterior à recta AC e, segundo o axioma II 2, há sobre AE um ponto F tal que E é um ponto do segmento AF .



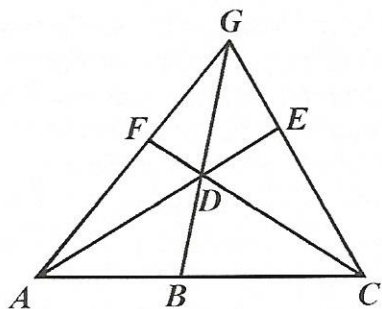
Ainda segundo o mesmo axioma e pelo axioma II 3, há sobre FC um ponto G que não está sobre o segmento FC . Em vista do axioma II 4, a recta EG deve portanto cortar o segmento AC num ponto D . Aplicando agora o axioma II 4, ao triângulo AEG e à recta CF , mostra-se que D está entre A e E , e pela aplicação do mesmo axioma ao triângulo AEC e à recta BG reconhece-se que B está entre A e C .

TEOREMA 4. Dados três pontos A, B, C , quaisquer, duma recta, há sempre um que está entre os outros dois.

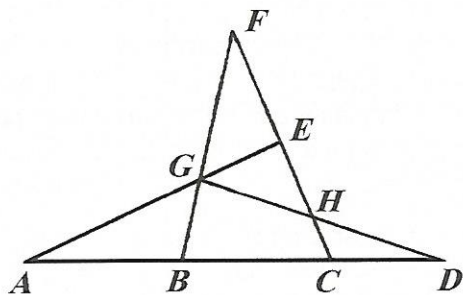
Dem.³ Suponhamos que A não está entre B e C , e que C também não está entre A e B . Unamos um ponto D , que não esteja sobre a recta AC , com B e escolhamos segundo o axioma II 2, um ponto G sobre a recta BD , tal que D esteja entre B e G [fig. (a) na pág. seguinte]. A aplicação do axioma II 4, ao triângulo BCG e à recta AD mostra que as rectas AD e CG se cortam num ponto E que está entre C e G ; do mesmo modo se vê que as rectas CD e AG se encontram num ponto F que está entre A e G .

TEOREMA 5. Dados quatro pontos quaisquer sobre uma recta eles podem designar-se sempre por A, B, C, D , de modo que o ponto designado por B esteja entre A e C e também entre A e D , e além disso o ponto designado por C esteja entre A e D e também entre B e D .⁴

Dem. Sejam A, B, C, D quatro pontos de uma recta g . Demonstremos em primeiro lugar:



(a)



(b)

³ Demonstração devida a A. Wald.

⁴ Este teorema, apresentado na 1ª edição como axioma, foi reconhecido por E. H. Moore, *Trans. Am. Math. Soc.*, 1902, como uma consequência dos axiomas planos de incidência e ordem já expostos. Comparem-se também os trabalhos, sobre este assunto, de Veblen, *Trans. Am. Math. Soc.*, 5, 1904, Schweitzer *American Journal*, 1909. Uma análise introdutória sobre sistemas independentes de axiomas lineares de ordem que fixa a ordem sobre a recta, encontra-se em E. v. Huntington, "A new set of postulates for betweenness with proof of complete independence", *Trans. Am. Math. Soc.*, 1924, compare-se também *Trans. Am. Math. Soc.*, 1917.

1. Se B está sobre o segmento AC e C sobre o segmento BD , então os pontos B e C estão também sobre o segmento AD . Escolhamos, de acordo com os axiomas I 3 e II 2, um ponto E que não esteja sobre g e um ponto F tal que E esteja entre C e F [fig. (b) acima]. Por repetida aplicação dos axiomas II 3 e 4, resulta que os segmentos AE e BF se encontram num ponto G , e mais, que a recta CF encontra num ponto H o segmento GD . Visto que, assim, H está sobre o segmento GD e, pelo contrário, pelo axioma II 3, E não está sobre o segmento AG , pelo axioma II 4, a recta EH encontra o segmento AD , o que quer dizer que C está no segmento AD . Do mesmo modo se demonstra, simetricamente, que B também está neste segmento.

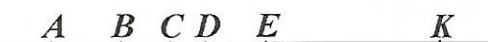
2. Se B está no segmento AC e C no segmento AD então também C está no segmento BD e B no segmento AD . Escolhamos um ponto G fora de g e um outro ponto F tal que G está no segmento BF . Segundo os axiomas I 2 e II 3 a recta CF não encontra nem o segmento AB nem o segmento BG , portanto, segundo o axioma II 4, também não encontra o segmento AG . Mas como C está no segmento AD , a recta CF encontra o segmento GD num ponto H . De novo, pelo axiomas II 3 e 4, a recta FH encontra o segmento BD . Portanto, C está no segmento BD . O resto da tese 2, resulta como consequência de 1.

Sejam dados agora quatro pontos quaisquer numa recta. Escolhamos três destes pontos e designemos aquele dentre eles que, segundo o teorema 4 e o axioma II 3, está entre os outros dois, por Q ; os outros dois por P e R , e finalmente o último dos quatro pontos dados por S . Então baseando-nos outra vez no axioma II 3 e no teorema 4, podemos distinguir as seguintes cinco possibilidades para a posição de S :

- R está entre P e S ,
- ou P está entre R e S ,
- ou S está entre P e R e, ao mesmo tempo, Q entre P e S ,
- ou S está entre P e Q ,
- ou P está entre Q e S .

As primeiras quatro possibilidades dão a hipótese de 2, a última a de 1. Com isto fica demonstrado o teorema 5.

TEOREMA 6. (Generalização do teorema 5) Dado um número finito qualquer de pontos numa recta, então eles podem ser sempre designados por A, B, C, D, E, \dots, K , de tal modo que o ponto designado por B esteja entre A e C, D, E, \dots, K , o ponto C esteja entre A, B e D, E, \dots, K , assim como D esteja entre A, B, C e E, \dots, K , etc. Além deste modo de designação só há mais um, o modo de designação inversa K, \dots, E, D, C, B, A nas mesmas condições.

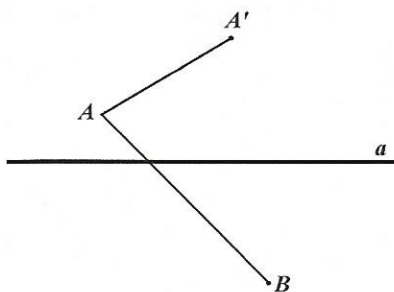


TEOREMA 7. Entre dois pontos quaisquer duma recta há sempre infinitos pontos.

TEOREMA 8. Cada recta a que está num plano α separa os pontos deste plano α que não existem nela, em dois domínios nas seguintes condições: cada ponto A dum domínio determina com cada ponto B do outro domínio um segmento AB no interior do qual está um ponto da recta a ; pelo contrário, dois pontos quaisquer A e A' dum mesmo domínio determinam um segmento AA' , o qual não contém nenhum ponto de a .

DEFINIÇÃO. Dizemos que os pontos A, A' estão no plano α dum mesmo lado da recta a e os pontos A, B estão no plano α em lados opostos da recta a .

DEFINIÇÃO. Sejam A, A', O, B quatro pontos duma recta a , de tal modo que O esteja entre A e B , mas não entre A e A' ; então diremos: os pontos A, A' estão na recta a do mesmo lado do ponto O , e os pontos A, B estão na recta a em lados opostos do ponto O . O conjunto de todos os pontos da recta a que estão no mesmo lado de O , chama-se também uma *semi-recta* com origem em O ; assim, cada ponto divide uma recta em duas semi-rectas.



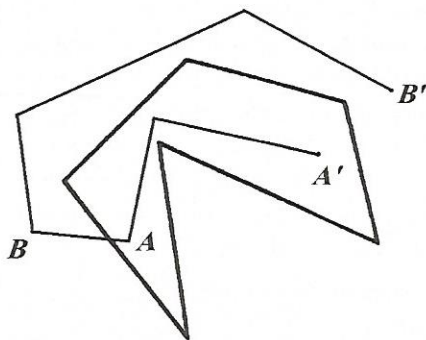
DEFINIÇÃO. Um sistema de segmentos AB, BC, CD, \dots, KL chama-se uma *poligonal* que une os pontos A e L ; esta poligonal também se designará abreviadamente por $ABCD\dots KL$. Os pontos do interior dos segmentos AB, BC, CD, \dots, KL , assim como os pontos A, B, C, D, \dots, K, L chamam-se, todos eles, os *pontos da poligonal*. Em particular, se os pontos A, B, C, D, \dots, K, L estão todos num plano e se, além disso, o ponto L coincide com o ponto A , então a poligonal chamar-se-á um *polígono* e designar-se-á por polígono $ABCD\dots K$. Os segmentos AB, BC, CD, \dots, KL chamam-se também os *lados do polígono*. Os pontos A, B, C, D, \dots, K chamam-se os *vértices do polígono*. Polígonos com 3,

4, ..., n vértices chamam-se *triângulos*, *quadriláteros*, ..., *polígonos com n vértices* [ou *n -ágonos*].

DEFINIÇÃO. Se os vértices dum polígono são todos distintos e nenhum deles fica sobre um lado, e, além disso, dois quaisquer lados do polígono não têm ponto algum comum, então o polígono chama-se *simples*.

Com o auxílio do teorema 8 obtemos, sem dificuldades consideráveis, os seguintes teoremas:⁵

TEOREMA 9. Cada polígono simples, que está num plano α separa os pontos do plano α que não pertencem à poligonal do polígono em dois domínios, um *interior* e um *exterior*, nas seguintes condições: Se A é um ponto do interior (*ponto interior*) e B um ponto do exterior (*ponto exterior*), então cada poligonal existente em α que ligue A com B tem, pelo menos, um ponto comum com o polígono; se, pelo contrário, A, A' são dois pontos do interior e B e B' dois pontos do exterior, então há sempre, pelo menos, duas linhas poligonais em α ,



uma ligando A com A' , e outra ligando B com B' , que não têm ponto algum comum com o polígono. Designando apropriadamente os dois domínios, há sempre rectas em α que existem completamente no exterior do polígono e, pelo contrário, não há nenhuma tal recta que exista completamente no interior do polígono.

TEOREMA 10. Cada plano α separa os restantes pontos do espaço em dois domínios nas seguintes condições: cada ponto A dum domínio determina com cada ponto B do outro domínio um segmento AB no

⁵ [V. bibliografia no final do Suplemento I 1. Em edições anteriores à 9ª edição, a frase era «Com o auxílio do teorema 8 obtemos, sem grande dificuldade, o seguinte teorema.» (Leo Unger).]

interior do qual está um ponto de α ; pelo contrário, dois pontos quaisquer A e A' dum mesmo domínio determinam sempre um segmento AA' que não contém nenhum ponto de α .

DEFINIÇÃO. Utilizando as mesmas notações deste teorema 10, diremos: os pontos A, A' estão no espaço *dum mesmo lado* do plano α ; e os pontos A, B estão no espaço *em lados opostos* do plano α .

Com o teorema 10 dá-se expressão às mais importantes verdades relativas à ordenação dos elementos no espaço. Estas verdades são por isso consequências, unicamente, dos axiomas considerados até agora, e no 2.º grupo não há necessidade de algum novo axioma no espaço.

§5. O III grupo de axiomas: axiomas da congruência

Os axiomas deste grupo definem o conceito de congruência e, com este, também o movimento.

DEFINIÇÃO. Os segmentos têm certas relações entre si, que descreveremos servindo-nos das palavras «congruente» ou «igual».

III 1. *Se A, B são dois pontos sobre uma recta a e se, além disso, A' é um ponto sobre a mesma ou outra recta a' , então pode encontrar-se sempre um ponto B' sobre um dado lado da recta a' , e a partir de A' , tal que o segmento AB é congruente com, ou igual, ao segmento $A'B'$, simbolicamente:*

$$AB \equiv A'B'.$$

Com este axioma exige-se a possibilidade da *construção* [ou *deslocamento*] de segmentos. A *unicidade* demonstrar-se-á mais tarde.

Um segmento foi definido simplesmente, como sistema de dois pontos A, B , e designado por AB ou BA . A ordem dos dois pontos não foi, portanto, tomada em conta na definição; consequentemente, as fórmulas:

$$\begin{aligned} AB &\equiv A'B', & AB &\equiv B'A', \\ BA &\equiv A'B', & BA &\equiv B'A' \end{aligned}$$

têm o mesmo significado.

III 2. *Se um segmento $A'B'$ e um segmento $A''B''$ são congruentes com o mesmo segmento AB , então, também o segmento $A'B'$ é congruente com o segmento $A''B''$; ou, abreviadamente: se dois segmentos são congruentes com um terceiro, então são congruentes entre si.*

Visto que a congruência, ou igualdade, se introduz na geometria por meio destes axiomas, não é, de modo algum, evidente que cada segmento seja congruente consigo mesmo; mas esta proposição resulta dos dois primeiros axiomas da congruência, se deslocarmos o segmento AB para uma semi-recta qualquer, obtendo a congruência do segmento com $A'B'$, e se em seguida aplicarmos o axioma III 2 às congruências $AB \equiv A'B'$, $AB \equiv A'B'$.

Com tais fundamentos, tem-se ainda, por aplicação do axioma III 2, a *simetria* e a *transitividade* da congruência de segmentos, isto é a validade dos teoremas:

Se $AB \equiv A'B'$, então também é $A'B' \equiv AB$;

se $AB \equiv A'B'$ e $A'B' \equiv A''B''$, então também é $AB \equiv A''B''$.

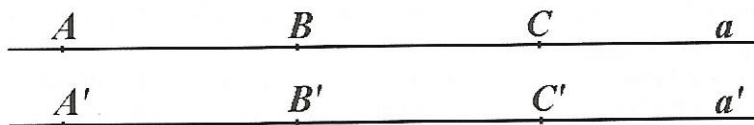
Como consequência da simetria da congruência de segmentos, podemos utilizar a seguinte maneira de dizer: dois segmentos são «congruentes entre si».

III 3. *Sejam AB e BC dois segmentos, sem pontos comuns, sobre a recta a e sejam, além disso, $A'B'$ e $B'C'$ dois segmentos sobre a mesma ou sobre uma outra recta a' , e do mesmo modo sem pontos comuns; então se for:*

$$AB \equiv A'B' \text{ e } BC \equiv B'C',$$

será também

$$AC \equiv A'C'.$$



Com este axioma exprime-se o requisito da aditividade de segmentos.

Trataremos a construção [ou deslocamento] de ângulos precisamente como a construção de segmentos. Além da *possibilidade* da construção de ângulos, deveremos exigir também, sem dúvida axiomáticamente, a *unicidade*; mas, pelo contrário, a transitividade e a aditividade serão demonstráveis.

DEFINIÇÃO. Seja α um plano qualquer, e sejam h , k duas semi-rectas quaisquer, diferentes, no plano α , que partem do ponto O e que

pertencem a rectas distintas. Ao sistema destas semi-rectas h, k chamamos *ângulo* e representamo-lo por $\angle(h, k)$ ou por $\angle(k, h)$.

As semi-rectas h, k chamam-se *lados* do ângulo e o ponto O chama-se o *vértice* do ângulo.

Por esta definição são excluídos os ângulos raso e nulo.

Sejam \bar{h} a recta a que pertence a semi-recta h e \bar{k} a recta a que pertence a semi-recta k . As semi-rectas h e k tomadas juntamente com o ponto O repartem os restantes pontos do plano em dois domínios: de todos os pontos que estão com h do mesmo lado de \bar{k} e com k do mesmo lado de \bar{h} , diz-se que estão no *interior* do ângulo $\angle(h, k)$; de todos os outros pontos diz-se que estão fora ou no *exterior* deste ângulo.

Reconhece-se facilmente, com base nos axiomas I e II, que os dois domínios contêm pontos, e que um segmento que una dois pontos do interior do ângulo está inteiramente no interior desse ângulo. Com a mesma facilidade se demonstram as seguintes proposições: se um ponto H está sobre h e um ponto K sobre k , então o segmento HK está inteiramente no interior. Qualquer outra semi-recta que parta de O ou está inteiramente no interior ou está inteiramente no exterior do ângulo; se está no interior encontra o segmento HK .⁶ Se A é um ponto dum domínio e B um ponto do outro domínio, então cada poligonal que liga A e B ou passa pelo ponto O ou tem um ponto pelo menos, comum com h ou k ; se, pelo contrário, A, A' são pontos do mesmo domínio, então há sempre uma poligonal que liga A com A' e que nem passa pelo ponto O nem por ponto algum das semi-rectas h, k .

DEFINIÇÃO. Os ângulos têm certas relações entre si, que descreveremos servindo-nos também das palavras «congruente» ou «igual».

III 4. *Sejam dados um ângulo $\angle(h, k)$ num plano α e uma recta a' num plano α' assim como um determinado lado de a' em α' . Seja h' uma semi-recta da recta a' , que parta do ponto O' . Então há no plano α' uma, e uma só, semi-recta k' , tal que o ângulo $\angle(h, k)$ é congruente com, ou igual ao ângulo $\angle(h', k')$ e, ao mesmo tempo, tal que todos os pontos interiores do ângulo $\angle(h', k')$ estão no lado dado de a' ; simbolicamente:*

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k').$$

Cada ângulo é congruente a si próprio, isto é, tem-se sempre

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h, k).$$

⁶ [Esta última proposição é conhecida por *teorema da barra transversal*.]

Dizemos também abreviadamente: cada ângulo pode ser *construído* num dado lado duma recta num plano dado, e a partir duma semi-recta dessa recta, de uma única maneira.

Assim como para os segmentos, não consideramos nenhum sentido, também não consideramos, na definição de ângulo, nenhum sentido de rotação (orientação). Consequentemente, as designações $\angle(h, k)$, $\angle(k, h)$ têm o mesmo significado.

DEFINIÇÃO. Um ângulo com o vértice B tendo, sobre um qualquer dos lados, o ponto A e sobre o outro o ponto C designar-se-á também por $\angle ABC$ ou abreviadamente por $\angle B$. Os ângulos também se designarão com letras gregas minúsculas.

III 5. *Se para dois triângulos⁷ ABC e $A'B'C'$ são válidas as congruências*

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$

então é sempre verificada também a congruência

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'.$$

O conceito de triângulo está formulado na pág. 8. Por troca de símbolos, resulta, sob as hipóteses do axioma, que são sempre verificadas as duas congruências

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C' \text{ e } \angle ACB \equiv \angle A'B'C'.$$

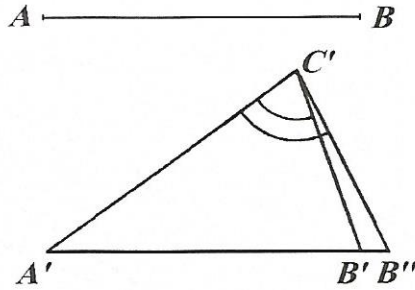
Os axiomas III 1–3 só contêm afirmações sobre a congruência de segmentos; pode por isso dizer-se que eles são os axiomas lineares do 3.º grupo. O axioma III 4 contém afirmações sob a congruência de ângulos. O axioma III 5 estabelece a ligação entre os conceitos de congruência de segmentos e de ângulos. Os axiomas III 4 e III 5 contêm afirmações sobre os elementos da geometria plana e pode por isso dizer-se que são os axiomas planos do 3.º grupo.

A *unicidade da construção de segmentos* resulta, com o auxílio do axioma III 5, da *unicidade da construção de ângulos*.

Suponhamos que o segmento AB é deslocado a partir de A' para uma semi-recta que parte de A' , de duas maneiras, até B e até BB'' . Então, escolhendo um ponto C' fora da recta $A'B'$ obtemos as congruências:

$$A'B' \equiv A'B'', A'C' \equiv A'C', \angle B'A'C' \equiv \angle B''A'C',$$

⁷ Aqui, e no que segue, os vértices de um triângulo são sempre supostos não colineares.



e portanto, segundo o axioma III 5,

$$\angle A'C'B' \equiv \angle A'C'B'',$$

contradizendo a unicidade da construção de ângulos, exigida no axioma III 4.

§6. Consequências dos axiomas da congruência

DEFINIÇÃO. Dois ângulos que têm o vértice e um lado comuns e cujos lados não comuns constituem uma recta, chamam-se *ângulos adjacentes suplementares*. Dois ângulos com o vértice comum em que cada lado dum deles constitui com um dos lados do outro uma recta, chamam-se *ângulos verticalmente opostos*. Um ângulo que é congruente com um seu ângulo adjacente suplementar, chama-se um *ângulo recto*.

Demonstremos agora os seguintes teoremas:

TEOREMA 11.⁸ Num triângulo com dois lados congruentes, os ângulos opostos a esses lados são congruentes, ou abreviadamente: num triângulo isósceles os ângulos da base são iguais.

Este teorema resulta do axioma III 5 e da última parte do axioma III 4.

DEFINIÇÃO. Um triângulo ABC diz-se *congruente* com um triângulo $A'B'C'$, se são verificadas todas as congruências

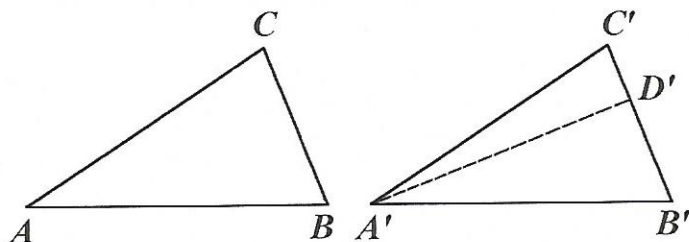
$$\begin{aligned} AB &\equiv A'B', AC \equiv A'C', BC \equiv B'C', \\ \angle A &\equiv \angle A', \angle B \equiv \angle B', \angle C \equiv \angle C'. \end{aligned}$$

TEOREMA 12. (1.^o teorema da congruência para triângulos) Um triângulo ABC é congruente com um triângulo $A'B'C'$ desde que se

⁸ [Este teorema é usualmente designado por *pons asinorum*.]

verifiquem as congruências

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', \angle A \equiv \angle A'.$$



Dem. Pelo axioma III 5 são verificadas as congruências

$$\angle B \equiv \angle B', \angle C \equiv \angle C',$$

e só precisamos verificar a validade da congruência $BC \equiv B'C'$. Suponhamos, pelo contrário, que não seja BC congruente com $B'C'$, e determinemos sobre $B'C'$ o ponto D' tal que $BC \equiv B'D'$; então afirma o axioma III 5, aplicado aos dois triângulos ABC e $A'B'D'$, que é $\angle BAC \equiv \angle B'A'D'$.

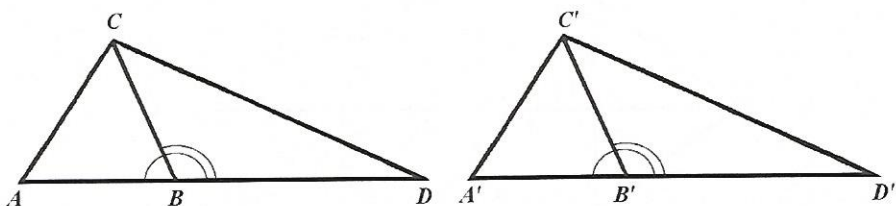
Seria portanto $\angle BAC$ congruente com $\angle B'A'D'$ e também com $\angle B'A'C'$; isto não é possível visto que cada ângulo só pode ser, duma *única* maneira, deslocado num plano, a partir duma semi-recta dada, para um dado lado. Com isto demonstrou-se que o triângulo ABC é congruente com o triângulo $A'B'C'$.

Do mesmo modo se demonstra facilmente o:

TEOREMA 13. (2.º teorema da congruência para triângulos) Um triângulo ABC é congruente com um outro triângulo $A'B'C'$ desde que se verifiquem as congruências

$$AB \equiv A'B', \angle A \equiv \angle A', \angle B \equiv \angle B'.$$

TEOREMA 14. Se um ângulo $\angle ABC$ é congruente com um outro ângulo $\angle A'B'C'$, então também o ângulo adjacente suplementar $\angle CBD$ é congruente com o ângulo adjacente suplementar $\angle C'B'D'$ do outro.



Dem. Escolhamos os pontos A' , C' , D' sobre os lados que partem de B' de tal modo que seja

$$AB \equiv A'B', CB \equiv C'B', DB \equiv D'B'.$$

Do teorema 12 resulta então que o triângulo ABC é congruente com o triângulo $A'B'C'$, isto é, são válidas as congruências

$$AC \equiv A'C' \text{ e } \angle BAC \equiv \angle B'A'C'.$$

Porque, além disso, pelo axioma III 3 o segmento AD é congruente com o segmento $A'D'$, resulta outra vez pelo teorema 12, que o triângulo CAD é congruente com o triângulo $C'A'D'$, isto é, são válidas as congruências

$$CD \equiv C'D' \text{ e } \angle ADC \equiv \angle A'D'C',$$

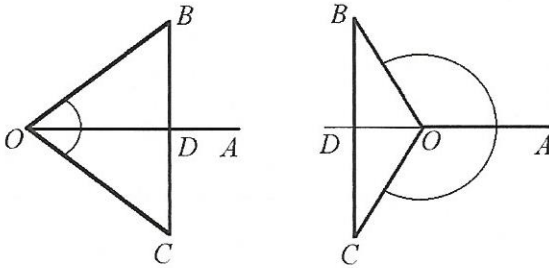
e daqui resulta segundo o axioma III 5, considerando os triângulos BCD e $B'C'D'$, que

$$\angle CBD \equiv \angle C'B'D'.$$

Uma consequência imediata do teorema 14 é o teorema da congruência de ângulos verticalmente opostos.

Dele resulta ainda a existência de ângulos rectos (v. a definição da pág. 13).

De facto, se se desloca um ângulo qualquer para os dois lados duma semi-recta OA , a partir de O e se toma nos lados livres: $OB \equiv OC$, então o segmento BC corta a recta OA num ponto D . Se D cai em O , então $\angle BOA$ e $\angle COA$ são ângulos adjacentes suplementares iguais e, portanto, rectos. Se D está sobre a semi-recta OA então é, por construção: $\angle DOB \equiv \angle DOC$; e se D está sobre a outra semi-recta, então esta congruência resulta do teorema 13. Pelo axioma III 2 cada segmento é congruente consigo próprio: $OD \equiv OD$. Daqui resulta, em virtude do axioma III 5, que é $\angle ODB \equiv \angle ODC$.



TEOREMA 15. Sejam h, k, l , por um lado e h', k', l' , por outro, três semi-rectas que partem, respectivamente, dos pontos O e O' e estão, respectivamente, nos planos α e α' . Suponha-se ainda que as semi-rectas h, k e h', k' estão simultaneamente, ou do mesmo lado, ou então de lados diferentes de l e l' , respectivamente. Então, se são verificadas as congruências

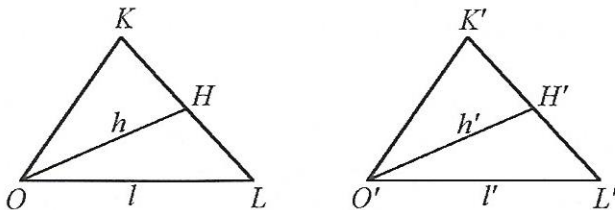
$$\angle(h, l) \equiv \angle(h', l') \text{ e } \angle(k, l) \equiv \angle(k', l'),$$

tem-se sempre também

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k').$$

A demonstração será indicada para o caso em que h e k estão do mesmo lado de l e, portanto, segundo a hipótese, também h' e k' estão do mesmo lado de l' .

O outro caso reduzir-se-á a este primeiro pela aplicação do teorema 14. Da definição da pág. 11, resulta que, ou h está inteiramente no ângulo $\angle(k, l)$ ou k está inteiramente no ângulo $\angle(h, l)$. Escolhamos agora as notações de modo que h esteja no ângulo $\angle(k, l)$. Escolhamos sobre os lados k, k', l, l' os pontos K, K', L, L' , tais que $OK \equiv O'K'$ e $OL \equiv O'L'$. Segundo uma proposição enunciada na pág. 11, h corta o segmento KL , num ponto H .



Determinemos H' sobre h' de modo que seja $OH \equiv O'H'$. Nos triângulos OLH e $O'L'H'$ e nos triângulos OLK e $O'L'K'$ verificam-se, pelo teorema 12, respectivamente as congruências

$$\begin{aligned} \angle OLH &\equiv \angle O'L'H', \quad \angle OLK \equiv \angle O'L'K', \\ LH &\equiv L'H', \quad LK \equiv L'K', \end{aligned}$$

e finalmente
$$\angle OKL \equiv \angle O'K'L'.$$

Visto que, pelo axioma III 4, cada ângulo só pode ser deslocado num plano duma única maneira, a partir duma dada semi-recta e para um dado lado, e visto que H' e K' estão, por hipótese, do mesmo lado de l' , então as duas primeiras citadas congruências de ângulos mostram que H' está sobre $L'K'$. Com isto, as duas citadas congruências de segmentos, dão facilmente, com base no axioma III 3, que $HK \equiv H'K'$. A partir das congruências $OK \equiv O'K'$, $HK \equiv H'K'$ e $\angle OKL \equiv \angle O'K'L'$, o axioma III 5 permite concluir a tese.

De um modo semelhante obtemos as seguintes proposições:

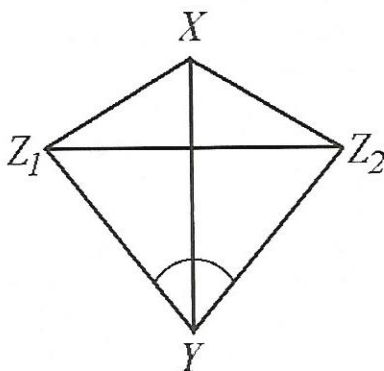
TEOREMA 16. Seja o ângulo $\angle(h, k)$ do plano α congruente com o ângulo $\angle(h', k')$ do plano α' , e seja l uma semi-recta do plano α que parte do vértice do ângulo $\angle(h, k)$ e está no interior deste ângulo. Então existe uma e uma só semi-recta l' no plano α' , que parte do vértice do $\angle(h', k')$ e está no interior deste ângulo, de tal modo que

$$\angle(h, l) \equiv \angle(h', l') \text{ e } \angle(k, l) \equiv \angle(k', l').$$

Para conseguir obter o terceiro teorema da congruência e a propriedade da simetria da congruência de ângulos demonstramos primeiramente, a partir do teorema 15, mais o seguinte teorema:

TEOREMA 17. Sejam Z_1 e Z_2 dois pontos que estão em lados diferentes duma recta XY e suponhamos válidas as congruências $XZ_1 \equiv XZ_2$ e $YZ_1 \equiv YZ_2$. Então, também o ângulo $\angle XYZ_1$ é congruente com o ângulo $\angle XYZ_2$.

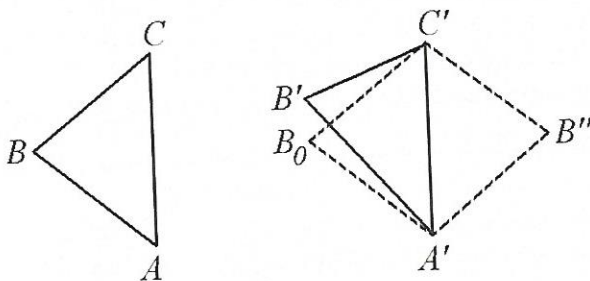
Dem. Pelo teorema 11 é $\angle XZ_1Z_2 \equiv \angle XZ_2Z_1$ e $\angle YZ_1Z_2 \equiv \angle YZ_2Z_1$. Por consequência, resulta do teorema 15 a congruência: $\angle XZ_1Y \equiv \angle XZ_2Y$. Nos casos particulares em que X ou Y estão sobre Z_1Z_2 , conclui-se ainda com maior simplicidade esta congruência.



Dela, e das congruências supostas $XZ_1 \equiv XZ_2$ e $YZ_1 \equiv YZ_2$ resulta, pelo axioma III 5, a tese, $\angle XYZ_1 \equiv \angle XYZ_2$.

TEOREMA 18. (3.º teorema da congruência para triângulos) Se em dois triângulos ABC e $A'B'C'$ os lados correspondentes são respectivamente, congruentes, então os triângulos são congruentes.

Dem. Em virtude da simetria da congruência de segmentos, demonstrada na pág. 10, é suficiente demonstrar que o triângulo ABC é congruente com o triângulo $A'B'C'$. Desloquemos o ângulo $\angle BAC$ para A' e para um e outro lado da semi-recta $A'C'$.



Escolhamos, no lado do ângulo que está com B' do mesmo lado de $A'C'$ o ponto B_0 tal que $A'B_0 \equiv AB$; e no outro lado livre escolhamos B'' de modo que $A'B'' \equiv AB$. Pelo teorema 12 é $BC \equiv B_0C'$ e também $BC \equiv B''C'$. Estas congruências, juntamente com as da hipótese, dão segundo o axioma III 2, as congruências

$$A'B'' \equiv A'B_0, \quad B''C' \equiv B_0C'$$

e, correspondentemente,

$$A'B'' \equiv A'B', \quad B''C' \equiv B'C'.$$

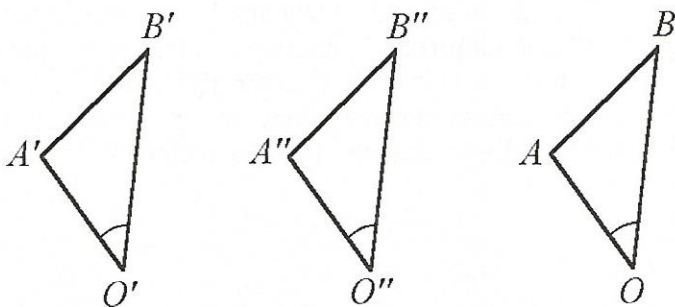
As hipóteses do teorema 17 servem, portanto, tanto aos dois triângulos $A'B''C'$ e $A'B_0C'$, como aos dois triângulos $A'B''C'$ e $A'B'C'$, isto é, o ângulo $\angle B''A'C'$ é congruente não só com o ângulo $\angle B_0A'C'$ mas também com o ângulo $\angle B'A'C'$. Porém, visto que, pelo axioma III 4, cada ângulo pode ser deslocado num plano, de uma única maneira, a partir duma semi-recta dada, e para um dado lado desta, então a semi-recta $A'B_0$ coincide com a semi-recta $A'B'$, isto é, aquele ângulo congruente com $\angle BAC$ que parte de $A'C'$ para o referido lado, é o ângulo $\angle B'A'C'$. Da congruência $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ e da congruência de segmentos pressuposta, resulta então, pelo teorema 14, a tese.

TEOREMA 19. Se dois ângulos $\angle(h', k')$ e $\angle(h'', k'')$ são congruentes com um terceiro ângulo $\angle(h, k)$, então também o ângulo $\angle(h', k')$ é congruente com o ângulo $\angle(h'', k'')$.⁹

Este teorema, que corresponde, ao axioma III 2, pode formular-se do seguinte modo: Se dois ângulos são congruentes com um terceiro, são congruentes entre si.

Dem. Sejam O' , O'' e O os vértices dos três ângulos dados. Escolhamos sobre um lado de cada ângulo os pontos A' , A'' e A de tal modo que $O'A' \equiv OA$ e $O''A'' \equiv OA$. Do mesmo modo escolhamos sobre os outros lados os pontos B' , B'' e B , de modo que seja $O'B' \equiv OB$ e $O''B'' \equiv OB$. Estas congruências dão, juntamente com as duas hipóteses $\angle(h', k') \equiv \angle(h, k)$ e $\angle(h'', k'') \equiv \angle(h, k)$, pelo teorema 12, as congruências

$$A'B' \equiv AB \text{ e } A''B'' \equiv AB.$$



Pelo axioma III 2, os triângulos $A'B'O'$ e $A''B''O''$ têm, portanto, os três lados iguais, respectivamente, e por isso tem-se, pelo teorema 18,

$$\angle(h', k') \equiv \angle(h'', k'').$$

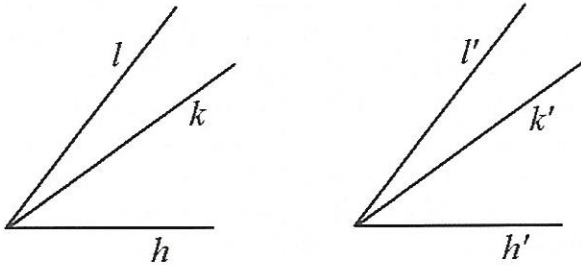
Do teorema 19 resulta, precisamente como de III 2 para os segmentos, a propriedade da simetria da congruência de ângulos, isto é: se é $\angle\alpha \equiv \angle\beta$, então $\angle\alpha$ e $\angle\beta$ são *congruentes entre si*. Em particular, podem-se enunciar agora numa forma simétrica os teoremas 12–14.

Podemos estabelecer desde já a *comparação de grandezas de ângulos*.

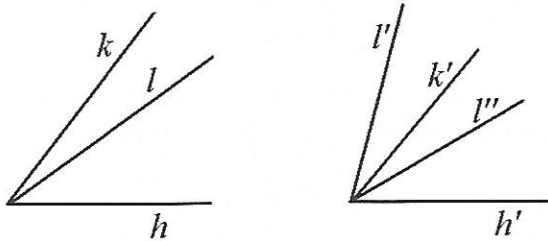
⁹ A demonstração aqui seguida para o teorema 19, apresentado na 1ª edição como axioma, é devida a A. Rosenthal, compare-se *Math. Ann.*, Vol. 71.

A A. Rosenthal deve-se também a simplificação do axioma I 4, compare-se *Math. Ann.*, Vol. 69.

TEOREMA 20. Sejam dados dois ângulos quaisquer $\angle(h, k)$ e $\angle(h', l')$. Se o deslocamento de $\angle(h, k)$ a partir de h' para o lado de l' determina uma semi-recta k' interior, então o deslocamento de $\angle(h', l')$ a partir de h para o lado de k determina uma semi-recta l exterior e reciprocamente.



Dem. Suponhamos que l está no interior de $\angle(h, k)$. Visto que $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$, então segundo o teorema 16, correspondendo à semi-recta interior l há uma semi-recta l'' no interior de $\angle(h', k')$ para a qual é válida a congruência $\angle(h, l) \equiv \angle(h', l'')$. Por hipótese, $\angle(h, l) \equiv \angle(h', l')$ onde l' e l'' são necessariamente diferentes em contradição com a unicidade da construção de ângulos, III 4. O recíproco demonstra-se de maneira análoga.



Se o deslocamento de $\angle(h, k)$ referido no teorema 20 determina uma semi-recta k' interior a $\angle(h', l')$ então dizemos: $\angle(h, k)$ é menor do que $\angle(h', l')$, simbolicamente: $\angle(h, k) < \angle(h', l')$; se ele determina uma semi-recta exterior, então dizemos: $\angle(h, k)$ é maior do que $\angle(h', l')$, simbolicamente: $\angle(h, k) > \angle(h', l')$.

Reconhecemos que para dois ângulos α e β se tem sempre *um e um só dos três casos*

$$\alpha < \beta \text{ e } \beta > \alpha, \quad \alpha \equiv \beta, \quad \alpha > \beta \text{ e } \beta < \alpha.$$

A comparação de grandezas de ângulos é *transitiva*, isto é, de cada uma das três hipóteses

1. $\alpha > \beta, \beta > \gamma$; 2. $\alpha > \beta, \beta \equiv \gamma$; 3. $\alpha \equiv \beta, \beta > \gamma$,

resulta

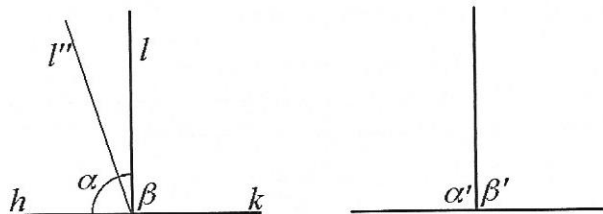
$$\alpha > \gamma.$$

A *comparação de grandezas de segmentos* com as propriedades correspondentes, resulta imediatamente dos axiomas II e III 1-3 e da unicidade do deslocamento de segmentos, demonstrada na pág. 12.

Com base na comparação de grandezas de ângulos obtém-se a demonstração do seguinte teorema simples, que Euclides — injustificadamente, na minha opinião — apresentou como axioma:

TEOREMA 21. Todos os ângulos rectos são congruentes entre si.

Dem.¹⁰ Um ângulo recto é, por definição, tal que é congruente, com um seu adjacente suplementar. Sejam os ângulos α ou $\angle(h, l)$ e β ou $\angle(k, l)$ adjacentes suplementares. Analogamente quanto aos ângulos α' e β' , e seja $\alpha \equiv \beta$ e $\alpha' \equiv \beta'$. Suponhamos, contrariamente à tese do teorema 21, que α' não seja congruente com α .



¹⁰ A ideia para esta demonstração já remonta a Proclo, comentador de Euclides, o qual utiliza, em vez do teorema 14, a hipótese de que a construção de um ângulo recto produz sempre um outro ângulo recto, isto é, produz um ângulo que é igual ao seu adjacente suplementar.

Uma tradução do comentário de Proclo, com introdução e notas por P. Ver Eecke, “Proclus de Lycie — Les Commentaires sur le premier livre des *Éléments* d’Euclide”, foi publicada na *Collection de travaux de l’Acad. Intern. d’Histoire des Sciences*, N. 1, Brügge, 1948.

[Na 7ª edição alemã, que foi traduzida em português, a nota que aqui figura é: «Th. Vahlen faz notar no seu livro *Abstrakte Geometrie*, Leipzig, 1905, pág. 242, que já Legendre tinha demonstrado este teorema. Contudo supõe ali, que os ângulos constituem um sistema contínuo de grandezas.»]

Então o deslocamento do ângulo α' a partir de h o para o lado onde está l , dá-nos uma semi-recta l'' diferente de l . Portanto l'' está ou no interior de α ou no interior de β . No caso em que l'' está no interior de α tem-se:

$$\angle(h, l'') < \alpha, \alpha \equiv \beta, \beta < \angle(k, l'').$$

Daqui resulta, com base na transitividade da comparação de grandezas: $\angle(h, l'') < \angle(k, l'')$. Por outro lado, pela hipótese e pelo teorema 14, tem-se

$$\angle(h, l'') \equiv \alpha', \alpha' \equiv \beta', \beta' \equiv \angle(k, l'')$$

e, por consequência,

$$\angle(h, l'') \equiv \angle(k, l''),$$

em contradição com a relação $\angle(h, l'') < \angle(k, l'')$. No caso em que l'' está no interior de β tem-se, análoga e correspondentemente, uma contradição, e com isto fica demonstrado o teorema 21.

DEFINIÇÃO. Um ângulo que é maior que o seu ângulo adjacente suplementar, ou maior do que um ângulo recto, chama-se um ângulo *obtusos*; um ângulo que é menor do que o seu ângulo adjacente suplementar, ou do que um ângulo recto, chama-se um ângulo *agudo*.

Um dos mais fundamentais teoremas, que já em Euclides desempenhava um papel importante e do qual resulta uma série de proposições das mais importantes, é o teorema do ângulo externo.

DEFINIÇÃO. Os ângulos $\angle ABC$, $\angle BCA$ e $\angle CAB$ que pertencem a um triângulo ABC chamam-se os *ângulos* deste triângulo; os ângulos adjacentes suplementares chamam-se os seus *ângulos externos*.

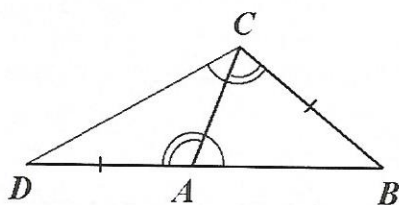
TEOREMA 22. (Teorema dos ângulos externos) Um ângulo externo de um triângulo é maior do que cada um dos dois ângulos não adjacentes, desse triângulo.

Dem. Seja $\angle CAD$ um ângulo externo do triângulo ABC . Escolhamos D de modo que $AD \equiv CB$. Demonstramos em primeiro lugar que $\angle CAD \not\equiv \angle ACB$. Com efeito, se fosse $\angle CAD \equiv \angle ACB$, então pela congruência $AC \equiv CA$ e pelo axioma III 5 viria $\angle ACD \equiv \angle CAB$.

Dos teoremas 14 e 19 resultaria agora que $\angle ACD$ seria congruente com o ângulo adjacente suplementar do ângulo $\angle ACB$.

Pelo axioma III 4, D , estaria por isso sobre a recta CB , em contradição com o axioma I 2. Tem-se, portanto,

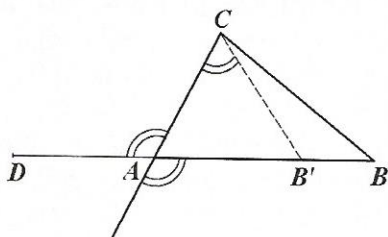
$$\angle CAD \neq \angle ACB.$$



Também não pode ser $\angle CAD < \angle ACB$; visto que então o deslocamento do ângulo externo $\angle CAD$ para CA em C , para o lado onde está B , daria um lado existente no interior do ângulo $\angle ACB$, o qual encontraria o segmento AB num ponto B' . Então no triângulo $AB'C$ o ângulo externo $\angle CAD$ seria congruente com o ângulo $\angle ACB'$. Mas isto não é possível, como acabamos de demonstrar. Resta, portanto, só a possibilidade

$$\angle CAD > \angle ACB.$$

Demonstra-se exactamente da mesma maneira que o ângulo verticalmente oposto ao ângulo $\angle CAD$ é maior do que o ângulo $\angle ABC$. Pela congruência dos ângulos verticalmente opostos e pela transitividade da comparação de grandezas de ângulos resulta que



$$\angle CAD > \angle ABC.$$

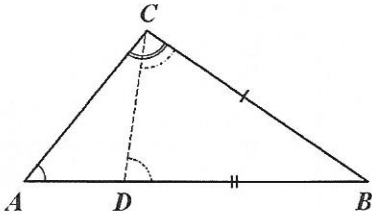
Com isto fica completamente demonstrado o teorema.

São consequências importantes do teorema do ângulo externo os seguintes teoremas:

TEOREMA 23. Em cada triângulo o maior lado está oposto ao maior ângulo.

Dem. Deslocamos o menor dos dois lados considerados do triângulo sobre o maior a partir do vértice comum. A tese resulta então, em virtude da transitividade da comparação de grandezas de ângulos, dos teoremas 11 e 22.

TEOREMA 24. Um triângulo com dois ângulos iguais tem dois lados iguais (isósceles).



Este teorema, recíproco do teorema 11, é uma consequência imediata do teorema 23.

Também do teorema 22 resulta, duma maneira simples, uma extensão do 2.º teorema da congruência para triângulos:

TEOREMA 25. Dois triângulos ABC e $A'B'C'$, são congruentes entre si, quando são verificadas as congruências

$$AB \equiv A'B', \angle A \equiv \angle A' \text{ e } \angle C \equiv \angle C'.$$

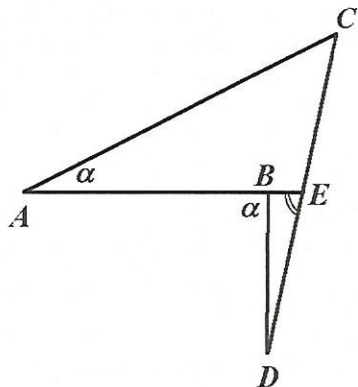
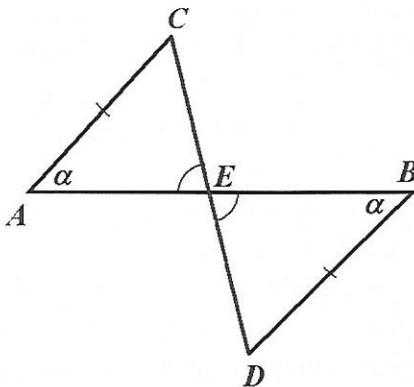
TEOREMA 26. Todo o segmento é divisível ao meio.

Dem. Deslocamos a partir dos pontos extremos do segmento dado AB e para lados diferentes dele, um mesmo ângulo α e deslocamos para os lados livres os mesmos segmentos $AC \equiv BD$. Visto que C e D estão para lados diferentes de AB , o segmento CD encontra a recta AB num ponto E .

A hipótese de que E coincida com A ou B está imediatamente em contradição com o teorema 22. Suponhamos que B está entre A e E . Então, pelo teorema 22, seria

$$\angle ABD > \angle BED > \angle BAC,$$

em contradição com a construção suposta. Uma contradição análoga resulta da hipótese de A estar entre B e E .



Pelo teorema 4, E está, pois, sobre o segmento AB . Consequentemente, os ângulos $\angle AEC$ e $\angle BED$, sendo verticalmente

opostos, são congruentes. Por isso, o teorema 25 é aplicável aos triângulos AEC e BED e temos

$$AE \equiv EB.$$

Como consequência imediata dos teoremas 11 e 26 tem-se a proposição: *Cada ângulo é divisível ao meio.*

A noção de congruência pode também agora estender-se a figuras quaisquer.

DEFINIÇÃO. Sejam A, B, \dots, K, L e A', B', \dots, K', L' duas sucessões de pontos, sobre as rectas a e a' , respectivamente, tais que todos os segmentos correspondentes AB e $A'B'$, AC e $A'C'$, BC e $B'C'$, ..., KL e $K'L'$ são congruentes dois a dois; então diz-se que as duas sucessões de pontos são congruentes entre si; A e A' , B e B' , ..., L e L' dizem-se os pontos correspondentes das *sucessões congruentes*.

TEOREMA 27. Se de duas sucessões congruentes A, B, \dots, K, L e A', B', \dots, K', L' a primeira está ordenada de modo que B está entre A dum lado e C, D, K, L doutro, C está entre A, B dum lado e D, \dots, K, L doutro, etc., então os pontos A', B', \dots, K', L' estão ordenados do mesmo modo, isto é, B' está entre A' dum lado e C', D', \dots, K, L' doutro, C' está entre A', B' dum lado e D', \dots, K', L' doutro, etc.

DEFINIÇÃO. A qualquer conjunto finito de pontos chama-se uma *figura*. Se todos os pontos de uma figura estão num plano, ela chama-se uma *figura plana*.

Duas figuras dizem-se *congruentes* se os seus pontos se podem fazer corresponder dois a dois de modo que os segmentos e ângulos que deste modo se correspondem são sempre congruentes.

As figuras congruentes têm, como se reconhece dos teoremas 14 e 27, as seguintes propriedades: Se três pontos duma figura estão numa recta [são colineares], então, em cada figura congruente, os pontos correspondentes estão numa recta. A ordenação dos pontos em planos correspondentes é, em figuras congruentes, a mesma; o mesmo vale para a sucessão de pontos correspondentes em rectas correspondentes.

O teorema mais geral, da congruência para o plano e para o espaço, enuncia-se como segue:

TEOREMA 28. Se (A, B, C, \dots, L) e (A', B', C', \dots, L') são figuras planas congruentes e se P é um ponto no plano da primeira, então pode sempre encontrar-se no plano da segunda figura, um ponto P' de tal modo que (A, B, C, \dots, L, P) e $(A', B', C', \dots, L', P')$ também são figuras congruentes. Se a figura (A, B, C, \dots, L) contém, pelo menos, três pontos

que não estejam numa recta então a construção de P' só é possível de uma maneira.

TEOREMA 29. Se (A, B, C, \dots, L) e (A', B', C', \dots, L') são figuras congruentes e P é um ponto qualquer, então pode-se sempre encontrar um ponto P' tal que as figuras (A, B, C, \dots, L, P) e $(A', B', C', \dots, L', P')$ sejam congruentes. Se a figura (A, B, C, \dots, L) contém, pelo menos, quatro pontos que não estão no mesmo plano, então a construção de P' só é possível de uma maneira.

O teorema 29 exprime o importante resultado de todas as proposições *espaciais* da congruência, e consequentemente as propriedades do movimento no *espaço*, serem [com intervenção dos 1.º e 2.º grupos de axiomas] consequências dos cinco axiomas da congruência, lineares e *planos*, apresentados atrás.

§7. O IV grupo de axiomas: axioma das paralelas

Seja α um plano qualquer, a uma recta qualquer em α e A um ponto de α que está fora de a . Então traçando em α , uma recta c , passando por A cortando a , e ainda em α uma recta b passando por A , tal que a recta c corte sob ângulos correspondentes iguais as rectas a , b , resultará facilmente do teorema dos ângulos externos, teorema 22, que as rectas a , b não têm nenhum ponto comum, isto é, que num plano α pode-se sempre traçar uma recta, passando por um ponto A , exterior a uma recta a , a qual não corte esta recta a .

DEFINIÇÃO. Duas rectas dizem-se *paralelas* se estão num mesmo plano e não se intersectam.

Ora, o axioma das paralelas afirma:

IV. (Axioma de Euclides). Seja a uma recta qualquer e A um ponto exterior a a ; então, no plano determinado por a e A há, no máximo, uma recta que passa por A e não corta a .¹¹

DEFINIÇÃO. Pelo que precede e com base no axioma das paralelas, reconhecemos que, no plano determinado por a e A há *uma e só uma*

¹¹ [Na literatura moderna este axioma é, na realidade, conhecido por *Axioma de Paralelismo de Hilbert*, e é uma simplificação do axioma de paralelismo de Playfair (formulado como axioma IV* na pág. 81), com omissão da parte respeitante à existência de paralela. Na presença dos restantes axiomas, o axioma de Hilbert é equivalente ao postulado original de Euclides. Veja-se M. J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History*, Third Edition, W. H. Freeman, 1993.]

recta, que passa por A e não corta a ; chamamo-la *a paralela a a passando por A*.

O axioma IV, das paralelas, tem o mesmo significado que a condição seguinte:

Se duas rectas a, b , num plano, não encontram uma terceira recta c do mesmo plano, então não se encontram.

Na verdade, se a, b tivessem um ponto comum A , então seriam possíveis, no mesmo plano, as duas rectas a, b passando por A , não encontrando c ; esta circunstância contradiria o axioma IV, das paralelas. Com a mesma facilidade, da condição enunciada resulta, reciprocamente, o axioma IV, das paralelas.

O axioma IV, das paralelas, é um *axioma do plano*.

A introdução do axioma das paralelas *simplifica* os fundamentos da geometria, e *facilita* consideravelmente a sua edificação.

Tomando, além dos axiomas da congruência, o axioma das paralelas chegamos facilmente às conhecidas proposições:

TEOREMA 30. Se duas paralelas são cortadas por uma terceira recta, então os ângulos correspondentes e os ângulos alternos são congruentes, e reciprocamente: a congruência dos ângulos correspondentes, ou a dos ângulos alternos, tem como consequência que as rectas são paralelas.

TEOREMA 31. Os ângulos de um triângulo perfazem dois rectos.¹²

DEFINIÇÃO. Se M é um ponto qualquer num plano α , então ao conjunto de todos aqueles pontos A , em α , para os quais os segmentos MA são congruentes entre si, chama-se *circunferência*; a M chama-se *centro da circunferência*.

Com base nesta definição, resultam facilmente, com o auxílio dos 3.º e 4.º grupos de axiomas, os conhecidos teoremas sobre a circunferência e em particular a possibilidade da construção de uma circunferência passando por quaisquer três pontos que não estejam numa recta, bem como o teorema sobre a congruência de todos os ângulos inscritos num mesmo segmento de circunferência e o teorema sobre os ângulos dum quadrilátero inscrito numa circunferência.

§8. O V grupo de axiomas: axiomas da continuidade

¹² Quanto à questão de saber, reciprocamente, em que medida, este teorema possa substituir o axioma das paralelas, comparem-se as notas no final do §12, Capítulo II.

V 1. (Axioma da medida ou axioma de Arquimedes) *Se AB e CD são dois segmentos quaisquer, então há na recta AB um número finito de pontos A_1, A_2, \dots, A_n tais que os segmentos $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ são congruentes com o segmento CD e B está entre A e A_n .*

V 2. (Axioma linear da completabilidade) *Os pontos de uma recta constituem um sistema, com as suas relações de ordem e congruência, que já não pode ser ampliado, se se quer manter as relações entre os elementos originais bem como as propriedades fundamentais de ordem linear e congruência que resultam dos axiomas I–III e V 1.*

Por propriedades fundamentais deve entender-se as propriedades de ordem formuladas nos axiomas II 1–3 e no teorema 5, bem como as propriedades de congruência formuladas nos axiomas III 1–3 e a unicidade da construção de segmentos.¹³ É entendido, além disso, que ao estender o sistema de pontos, as relações de ordem e congruência preexistentes sejam conservadas no sistema ampliado de pontos.¹⁴

Deve observar-se que o axioma I 3 é preservado em toda a extensão *eo ipso* e que a validade do teorema 3 em tais extensões é uma consequência da manutenção do axioma de Arquimedes V 1.

A possibilidade de se verificar o axioma da completabilidade está condicionada, essencialmente, a que entre os axiomas cuja manutenção nele é exigida, esteja compreendido o axioma de Arquimedes V 1. Na realidade, pode mostrar-se que a um sistema de pontos sobre uma recta que verifique os axiomas previamente enumerados e os teoremas da ordem e da congruência, podem sempre juntar-se novos pontos de tal modo que no sistema resultante desta ampliação sejam igualmente válidos os axiomas em questão; portanto um axioma da completabilidade no qual só fosse exigida a manutenção daqueles axiomas, mas não o de Arquimedes ou algum axioma correspondente, envolveria uma contradição.

¹³ A classificação precisa das condições a exigir aqui para a ordem linear e congruência foi feita por F. Bachmann e incorporada na formulação do axioma V 2 na 7.^a edição.

¹⁴ [Na 1.^a edição em língua portuguesa encontramos a seguinte precisão: «A manutenção de todos os axiomas, à qual o presente axioma se refere, deve entender-se de tal modo que *depois* da ampliação, fiquem válidos tal como anteriormente todos os axiomas — isto é, as preexistentes relações dos pontos, a saber, a ordem preexistente e a congruência preexistente de segmentos, não devem, ser perturbados; por exemplo, um ponto A , que antes da ampliação está entre dois pontos B e C , deve-se conservar também entre eles depois da ampliação; e segmentos que antes são congruentes entre si, devem manter-se também congruentes depois da ampliação.»

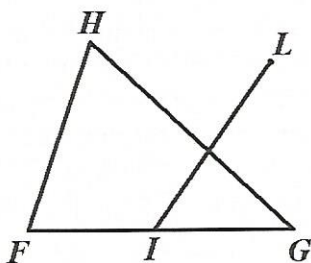
Os dois axiomas da continuidade são axiomas *lineares*.

É essencialmente *do axioma linear da completabilidade* que resulta a seguinte afirmação mais geral:

TEOREMA 32. (Teorema da completabilidade)¹⁵ Os elementos da geometria (isto é, os pontos, rectas e planos) constituem um sistema que já não pode ser ampliado por meio de pontos, rectas e planos, se se quer manter os axiomas de incidência, da ordem, de congruência e o axioma de Arquimedes; eles constituem pois um sistema que já não pode ser assim ampliado se se quer manter *todos* os axiomas.¹⁶

Dem. Designemos por elementos *velhos* os elementos existentes antes da ampliação, e por elementos *novos* os que foram introduzidos pela ampliação. A admissão de elementos novos conduz imediatamente à admissão de um ponto novo N .

Pelo axioma I 8 há quatro pontos velhos A, B, C, D , não existentes num plano. Os símbolos podem ser escolhidos de modo que A, B, N , não estejam numa recta. Os dois planos distintos, ABN e ACD têm, pelo axioma I 7, além de A , mais um ponto, E , comum. E não está na recta AB , porque de contrário B estaria no plano ACD . No caso de E ser um ponto novo, então no plano velho ACD está um ponto novo E ; no caso contrário, de ser E um ponto velho, então está o ponto novo N num plano velho, a saber, no plano ABE . Portanto, em qualquer caso há um ponto novo num plano velho.



Num plano velho há um triângulo velho FGH e sobre o segmento FG há um ponto velho I . Unamos um ponto novo L com I , então pelo axioma

¹⁵ A observação de que basta o axioma linear da completabilidade deve-se a P. Bernays.

¹⁶ Este teorema foi apresentado nas edições anteriores como axioma. [As expressões ampliação e manutenção devem entender-se aqui precisamente como no axioma V 2.]

II 4, as rectas IL e FH , ou as rectas IL e GH encontram-se num ponto K , se o ponto novo L não estiver na recta IH .

Qualquer das três suposições está, por isto, em contradição com o axioma linear da completabilidade. É portanto de rejeitar a admissão dum ponto novo num plano velho e, conseqüentemente, a simples admissão de elementos novos.

O teorema da completabilidade pode conceber-se duma maneira ainda mais precisa. Não é necessário exigir incondicionalmente a manutenção de alguns dos axiomas nele citados. Mas para que seja possível que ele se verifique é essencial, por exemplo, que entre os axiomas, cuja manutenção se exige, esteja contido o axioma I 7. Na verdade pode mostrar-se: a um sistema de elementos que verifique os axiomas I–V, podem juntar-se sempre, pontos, rectas e planos, de tal modo que para o sistema resultante desta ampliação sejam válidos os mesmos axiomas com excepção do axioma I 7; isto é, um teorema da completabilidade, no qual o axioma I 7, ou um axioma equivalente não estivesse contido, envolveria uma contradição.

O axioma da completabilidade não é uma consequência do axioma de Arquimedes. Na verdade, o axioma de Arquimedes, por si só, não é suficiente para, usando os axiomas I–IV, confirmar a nossa geometria como idêntica com a geometria analítica ordinária «cartesiana» (compare-se §9 e §12). Pelo contrário, juntando o axioma da completabilidade, consegue-se — se bem que este axioma não contenha nenhuma referência à noção de convergência — demonstrar a existência da fronteira correspondente a um corte de Dedekind e o teorema de Bolzano-Weierstrass acerca da existência de pontos de acumulação, com o que a nossa geometria se mostra ser idêntica à geometria cartesiana.

A exigência da continuidade foi, pela maneira como atrás considerámos as coisas, decomposta em duas partes essencialmente diferentes, a saber: no axioma de Arquimedes, ao qual incumbe o papel de preparar a exigência da continuidade, e no axioma da completabilidade, *que constitui a abóbada de todo o sistema de axiomas.*¹⁷

¹⁷ Comparem-se também as observações no final do §17, assim como a minha conferência, aqui impressa como apêndice VI, sobre a noção de número, “Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung”, 1900. Na investigação do teorema da igualdade dos ângulos da base, em triângulos isósceles, seremos conduzidos a dois outros axiomas de continuidade; compare apêndice II deste livro, pág. 129, e a minha memória “Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. XXXV (1903).

Investigações adicionais sobre os axiomas da continuidade podem ser consultadas em: R. Baldus, “Zur Axiomatik der Geometrie”, I–III, I, *Math. Ann.*,

Nas investigações que se seguem, apoiamo-nos, essencialmente, só no axioma de Arquimedes, e, em geral, não supomos o axioma da completabilidade.

1928, pp. 100, 321–33; II em *Atti d. Congr. Int. d. Mat.*, Bolonha (1928), IV, 1931; III em *Sitzber. d. Heidelberger Akad. Wiss.*, 1930, Fifth Proceedings. A. Schmidt, “Die Stetigkeit in der absoluten Geometrie”, *Ibid.* 1931, Fifth Proceedings. P. Bernays, “Betrachtungen über das Vollständigkeitsaxiom und verwandte Axiome”, *Math. Zeitschr.* 63, 1955, pp. 219–92.