Logaritmos

10/03/2014

Antonio Carlos Brolezzi

brolezzi@usp.br

Existe uma operação matemática chamada potenciação ou exponenciação:

$$a^c = b$$

Existe uma operação matemática chamada potenciação ou exponenciação:

$$a^c = b$$

Uma operação inversa da potenciação é a operação chamada radiciação, válida para c natural maior ou igual a 2:

$$a = \sqrt[c]{b}$$

Potenciação: $a^c = b$

Radiciação: $a = \sqrt[c]{b}$.

Mas e se formos isolar o expoente c?

Teremos outra operação inversa, chamada de logaritmo, válida para a e b positivos e a≠1.

$$\mathrm{c} = \log_a b$$

(lê-se “log de b na base a”).

$$a^c = b$$

$$a = \sqrt[c]{b}$$

$$\mathrm{c} = \log_a b$$

O logaritmo é uma operação inversa da potenciação (ou exponenciação), mas não como a radiciação, que permite expressar a base da potência.

Logaritmos invertem a potenciação, expressando o expoente da potência.

Veja como o logaritmo se relaciona com a potenciação e a radiciação (atendidas as restrições para a, b e c em cada caso):

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \Leftrightarrow a = \sqrt[c]{b}.$$

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \Leftrightarrow a = \sqrt[c]{b}.$$

Com números, temos

$$3^2 = 9 \Leftrightarrow 3 = \sqrt{9}, \text{ e}$$

$$3^2 = 9 \Leftrightarrow \log_3 9 = 2.$$

Logaritmo de um número *b* o expoente a que outro número *a* deve ser elevado para obter *b*, sendo *a* e *b* reais positivos, e *a* diferente de 1. Ou seja, se $\boldsymbol{a^c = b}$, então *c* é o logaritmo de *b* na base *a* e se escreve $\boldsymbol{\log_a b = c}$.

Os logaritmos são os expoentes de uma base positiva diferente de 1. Por exemplo, para resolver a equação $2^x=8$, usamos logaritmos e encontramos $x = \log_2 8 = 3$.

Logaritmo é isso. Mas a ideia não surgiu com essa finalidade.

Em matemática, é comum que conceitos e ideias criadas para determinados fins acabem servindo a outras aplicações muito diferentes das originais, às vezes séculos ou milênios depois da invenção de uma noção.

De qualquer forma, conhecer a história dos logaritmos ajuda a entender melhor essa parte da matemática que lida com as regularidades que ocorrem lá no “andar de cima”, ou seja, no nível dos expoentes, que nem sempre é tarefa fácil.

A história dos logaritmos, que teve inúmeros personagens.

Os logaritmos surgiram há 500 anos em um contexto bem diferente de hoje em dia. A ideia veio a partir da observação de padrões que ocorrem em progressões aritméticas e geométricas. As progressões aritméticas são aquelas em que cada termo é obtido do anterior por meio da operação de adição. As progressões geométricas são aquelas em que cada termo é obtido do anterior por meio da operação de multiplicação.

E o que as PAs tem a ver com as PGs? E onde os logaritmos entram nessa história?

Para entender isso, é preciso lembrar que a propriedade fundamental da potenciação é que, na multiplicação de potências de mesma base, conservam-se as bases e somam-se os expoentes. Ou seja, para qualquer *a, m* e *n* reais, temos:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

As operações de adição e multiplicação estão interligadas nessa propriedade da operação de potenciação.

Foi observando uma PA e uma PG, escritas termo a termo uma acima da outra, que Michael Stifel (1487—1567) percebeu uma relação intrigante.

Monge agostiniano, ordenado sacerdote aos 24 anos de idade Stifel deixou o mosteiro, e tornou-se pastor luterano e estudioso da matemática.

Primo ſubtraho 10 de 8, & non inuenio numerum aliquem ſupra 0, id eſt, ſupra nihil, quem ponere poſſim iuſta ſubtractionis lege. Nam ſi ille à quo debet fieri ſubtractio, eſſet maior eo qui ſubtrahitur (ut ſi loco numeri 8 poneretur numerus 12) tum tandem haberem numerum ponendum uerum. Sic ſi ille numerus à quo fieri debet ſubtractio, eſſet æqualis ei qui ſubtrahitur (ut ſi loco 8 ponerentur 10) tunc relinqueretur 0 .i. nihil, (quod mediat inter numeros ueros & numeros abſurdos) iam uero cum numerus ſubtrahendus maior ſit eo à quo fit ſubtractio, reſtat ut numerus infra 0, id eſt, infra nihil ponatur, uidelicet 0 — 2, Sic ſimili ratione poſtea ſubtraho 0 — 5 de 0 — 3, & inuenio 0 + 5 .i. numerum ſupra nihil, ſeu numerum uerum.

Sic Coſſa ſolet, pro immenſa copia ſua, ijs uti quæ ſunt, & ijs quæ finguntur eſſe. Nam ſicut ſupra unitatem ponuntur numeri integri, & infra unitatem finguntur minutiæ unitatis, & ſicut ſupra unum ponuntur integra, & infra unum ponuntur minuta ſeu fracta: ſic ſupra 0 ponitur unitas cum numeris, & infra 0 fingitur unitas cum numeris. Id quod pulchre repræſentari uidetur in progreſſione numerorum naturali, dum ſeruit progreſſioni.

Sed oſtendenda eſt iſta ſpeculatio per exemplum.

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Poſſet hic fere nouus liber integer ſcribi de mirabilibus numerorum, ſed oportet ut me hic ſubducã, & clauſis oculis abeã. Repetam uero unum ex ſuperioribus, ne fruſtra dicar fuiſſe in campo iſto. Sed ſententia inuerſa repetam quod mihi repetendum uidetur.

¶ Qualiacunq; facit progreſſio Geometrica multiplicãdo & diuidendo, talia facit progreſſio Arithmetica addendo & ſubtrahendo. Exemplum.

Sicut $\frac{1}{8}$ multiplicata in 64, facit 8. Sic — 3 additum ad 6, facit 3.

Comparação entre PA e da PG no livro Aritmética Integra, de Stiffel (1544).

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Comparação entre PA e da PG no livro Aritmética Integra, de Stiffel (1544).

Vamos vivenciar o que Stifel observou, encontrando na tabela:

$\frac{1}{8}$ vezes 64

4 vezes 8

64 dividido por 4

16 dividido por $\frac{1}{2}$

Podemos encontrar o produto de $\frac{1}{8}$ por 64 na PG se soubermos localizar o resultado da soma de -3 com 6 na PA.

Essa adição resulta em 3. Logo, localizando 3 na PA, encontramos o resultado da multiplicação na posição da PG correspondente, isto é, 8.

A explicação disso vem do fato de que

$\left(\frac{1}{8}\right) = 2^{-3}$ e 64=2^6.

Logo, temos

$$\frac{1}{8} \cdot 64 = 2^{-3} \cdot 2^{6} = 2^{-3+6} = 2^{3} = 8$$

Podemos vivenciar a adição dos expoentes, quando se faz a multiplicação das potências de mesma base.

PA e PG de Stifel

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0,0625	0,125	0,250	0,5	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768

Responda sem fazer as conta:

$$32768 \div 1024$$

$$0{,}125 \times 512$$

$$32 \times 256$$

$$8192 \div 0{,}250$$

Stifel percebeu que uma adição na PA corresponde a um produto na PG, e que uma subtração na PA corresponde a uma divisão na PG.

Stifel não tinha um símbolo ou um nome para logaritmos, mas a ideia estava ali presente.

Pois com logaritmos, transformam-se maravilhosamente produtos em somas, divisões em subtrações.

Usando a notação moderna de logaritmos, temos:

$$\log_b ac = \log_b a + \log_b c$$

e

$$\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c.$$

Assim, ao fazermos $0{,}125 \times 512$ com a tabela, podemos encontrar a solução sem fazer contas pela propriedade $\log_b ac = \log_b a + \log_b c$:

$$\log_2 0{,}125 \cdot 512 = \log_2 0{,}125 + \log_2 512 = -3 + 9 = 6$$

Assim, descobrimos que $\log_2 0{,}125 \cdot 512 = 6$.

Portanto, $0{,}125 \cdot 512 = 2^6 = 64$.

Não é genial?

Para números grandes, transformar uma multiplicação em uma adição é algo muito valioso, na época em que não havia máquinas de calcular.

A ideia original de Stifel foi 70 anos depois colocada em termos práticos auxiliando em cálculo de números muito grandes pelo barão escocês John Napier (1550-1617), teólogo e astrônomo, que publicou em 1614, o livro *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descrição Maravilhosa da Regra dos Logaritmos).

Napier é o criador da palavra logaritmos que significa “números da razão”. Isso porque, em uma PG, a razão entre um termo e o sucessor é sempre a mesma (a razão da PG).

Napier usou PAs e PGs de razão muito pequena, da ordem de $1-10^{-7}$, ou seja, 0,9999999. E elaborou páginas e páginas com os termos de suas progressões. Foram 20 anos de trabalho e ele escreveu cerca de 10 milhões de números.

Um suíço, construtor de relógios, Jost Bürgi (1552-1632) publicou também em 1620 suas tábuas de logaritmos, sem chama-los assim. Ele usou progressões com base $1+10^{-4}$, isto é, 1,0001.

Aparentemente, nem ele nem Napier sabiam da existência um do outro.

Jobst Bürgi: Relógio de cristal de rocha, 1622/23

O astrônomo e matemático inglês Henry Briggs (1561–1630), em sua obra *Arithmetica Logarithmica*, de 1624.

Briggs sugeriu uma simplificação importante no trabalho de Napier, que foi aceita por ele. Assim, foi introduzido o logaritmo muito usado hoje em dia, que é aquele que tem base 10. Logaritmos com base 10 são chamados logaritmos comuns e não precisam ter a base explicita. Quando você encontrar um logaritmo escrito simplesmente assim $\log 2$, já sabe que ele é um logaritmo na base 10.

A partir daí, não era mais necessário produzir tábuas de PA e PG, mas sim tábuas de logaritmos para bases específicas.

Tabua de logaritmos de 1 a 60 na base 10 de Briggs, 1626

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1	00000000	16	12041199	31	14913616	46	16627578
			263289		137882		93400
2	03010299	17	12304489	32	15051499	47	16720978
	1760912		248235		133639		91433
3	04771212	18	12552725	33	15185139	48	16812412
	1249387		234810		129649		89548
4	06020599	19	12787536	34	15314789	49	16901960
	969100		222763		125891		87739
5	06989700	20	13010299	35	15440680	50	16989700
	791812		211892		122344		86001
6	07781512	21	13222192	36	15563025	51	17075701
	669467		202033		118992		84331
7	08450980	22	13424226	37	15682017	52	17160033
	579919		193051		115818		82725
8	09030899	23	13617278	38	15797835	53	17242758
	511525		184834		112810		81178
9	09542425	24	13802112	39	15910646	54	17323937
	457574		177287		109953		79689
10	10000000	25	13979400	40	16020599	55	17403626
	413926		170333		107238		78253
11	10413926	26	14149733	41	16127838	56	17481880
	377885		163904		104654		76868
12	10791812	27	14313637	42	16232492	57	17558748
	347621		157942		102191		75531
13	11139433	28	14471580	43	16334684	58	17634279
	321846		152399		99842		74240
14	11461280	29	14623979	44	16434526	59	17708520
	299632		147232		97598		72992
15	11760912	30	14771212	45	16532125	60	17781512
	280287		142404		95453		71785

Confira na tabela as propriedades

$$\log ac = \log a + \log c \text{ e } \log \frac{a}{c} = \log a - \log c.$$

b	log(b)
1	0
2	0,301029996
3	0,477121255
4	0,602059991
5	0,698970004
6	0,77815125
7	0,84509804
8	0,903089987
9	0,954242509
10	1
11	1,041392685
12	1,079181246
13	1,113943352
14	1,146128036
15	1,176091259
16	1,204119983

Confira na tabela a propriedade

$$\log ac = \log a + \log c$$

b	log(b)				
1	0				
2	0,301029996			0,477121255	
3	0,477121255		3x4=12	0,602059991	+
4	0,602059991			1,079181246	
5	0,698970004				
6	0,77815125				
7	0,84509804				
8	0,903089987				
9	0,954242509				
10	1				
11	1,041392685				
12	1,079181246		log(2x3)=log2+log3		
13	1,113943352				
14	1,146128036				

Confira na tabela a propriedade

$$\log\frac{a}{c} = \log a - \log c$$

b	log(b)		
1	0		
2	0,301029996		1,146128036
3	0,477121255	14/7=2	0,84509804 -
4	0,602059991		0,301029996
5	0,698970004		
6	0,77815125		
7	0,84509804		
8	0,903089987		
9	0,954242509		
10	1		
11	1,041392685		
12	1,079181246	log(14/7)=log14+log7	
13	1,113943352		
14	1,146128036		

Confira na tabela a propriedade

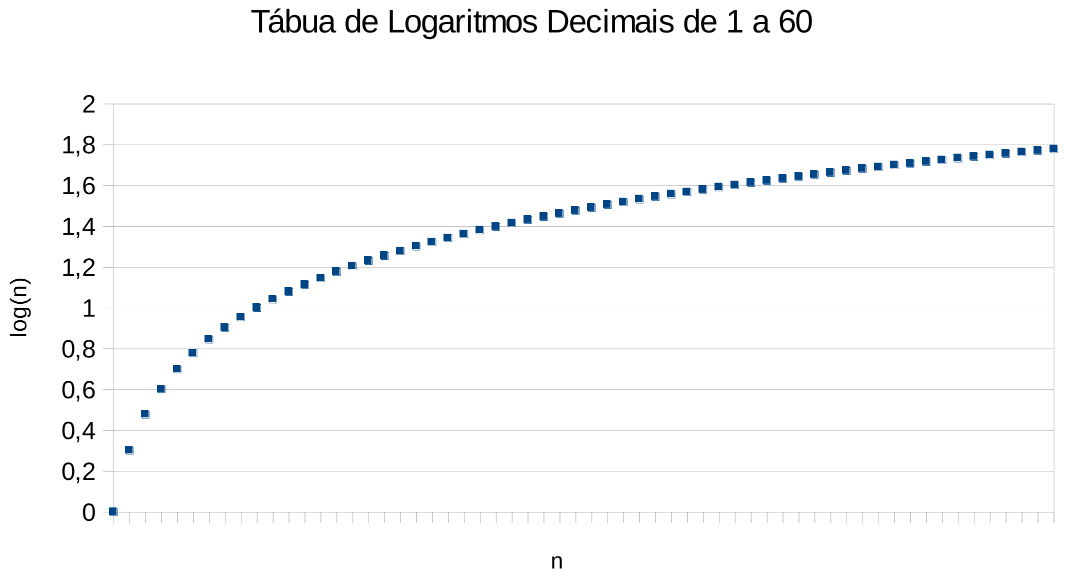
$$\log a^y = y \cdot \log a$$

b	log(b)				
1	0				
2	0,301029996			0,301029996	
3	0,477121255		2^3=8	3	x
4	0,602059991			0,903089987	
5	0,698970004				
6	0,77815125				
7	0,84509804				
8	0,903089987				
9	0,954242509				
10	1				
11	1,041392685				
12	1,079181246		log(2^3)=3log2		
13	1,113943352				
14	1,146128036				

Por 400 anos, a tábuas de logaritmos foram aperfeiçoadas por muitos outros astrônomos e matemáticos. Réguas de cálculo também foram criadas, baseadas nas relações entre operações viabilizadas pelo uso dos logaritmos.

Quando surgiram as calculadoras eletrônicas portáteis, na década de 1970, o uso de logaritmos para simplificar cálculos não faz mais sentido.

O desenvolvimento científico e tecnológico, entretanto, deu aos logaritmos outras funções sequer imaginadas pelos seus criadores. Muitas dessas aplicações dos logaritmos supõem o conhecimento da função logarítmica.



No caso da tabela de logaritmos na base 10 acima, se fizermos a variável ser contínua e desenharmos o gráfico com o GeoGebra, teremos:

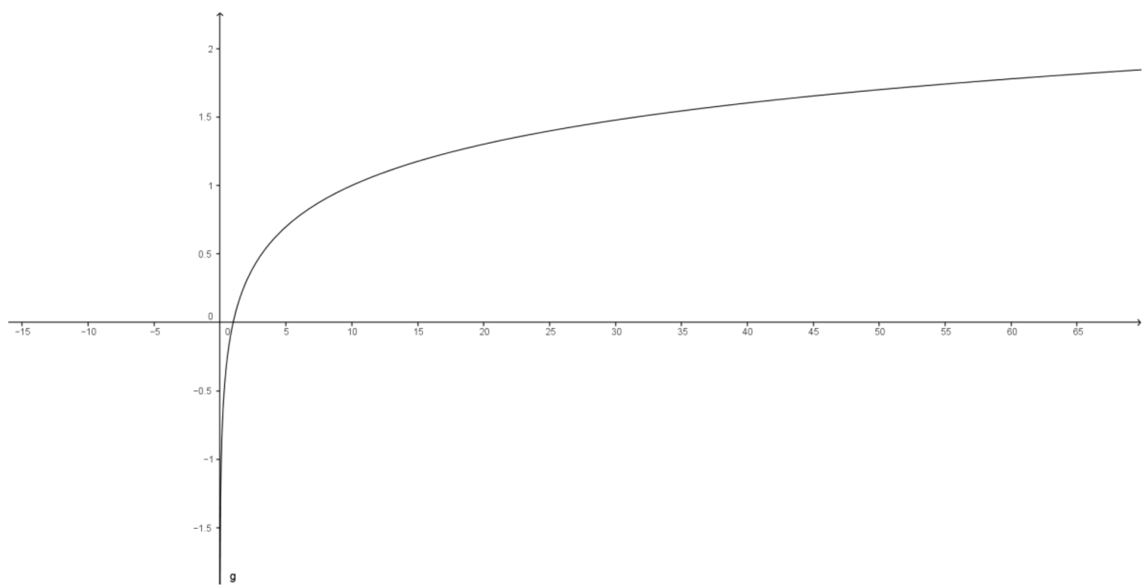
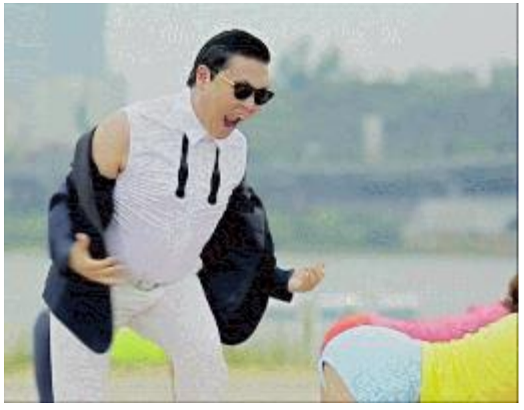


Gráfico de $y=\log x$

Nossa sensibilidade é afetada de modo logaritmico. Ou seja, percebemos variações de grandezas que nos afetam não de modo linear, mas de modo potencial.

Por exemplo, nosso ouvido percebe uma mudança de pressão que indica um aumento considerável de sons, quando este passa a uma próxima potência de 10.



Quando a pressão sonora passa de uma potência de 10 a outra, a escala de decibeis assinala uma mudança linear, mais fácil de acompanhar.

Imagem obtida no site: http://8b2007.files.wordpress.com/2008/05/ondasonora6.jpg

Quando a pressão sonora passa de uma potência de 10 a outra, a escala de decibeis assinala uma mudança linear, mais fácil de acompanhar.

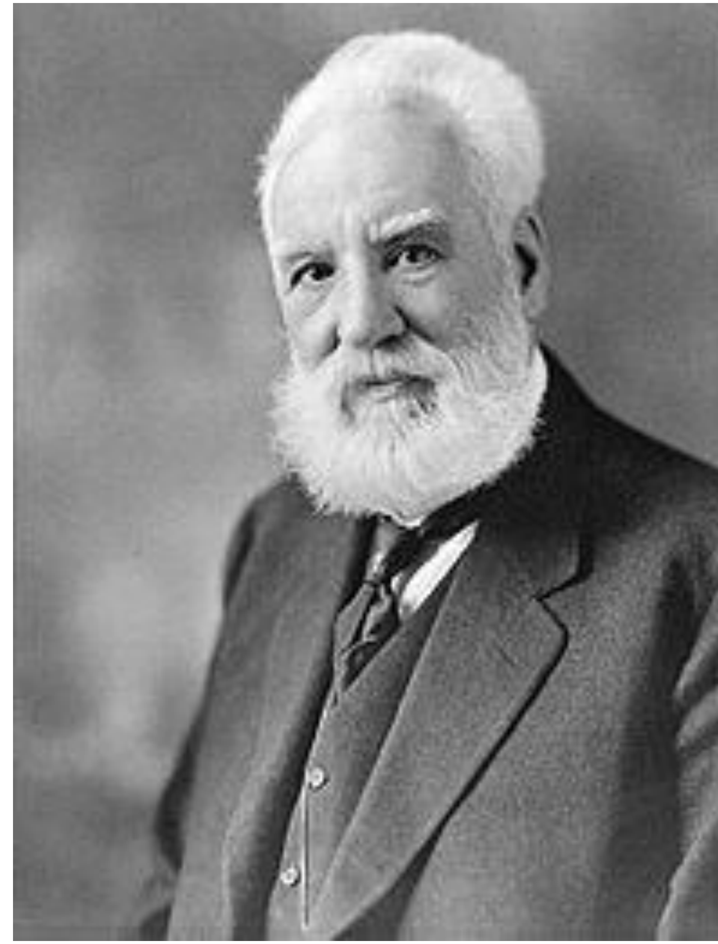
Decibel e Escala Logarítmica

Decibel é a razão logarítmica entre duas potências ou intensidades e é dado pela expressão:

$$P_{dB} = 10 \times \log_{10} (P_x/P_y)$$

ou $I_{dB} = 10 \times \log_{10} (I_x/I_y)$

Vamos testar nossos ouvidos?



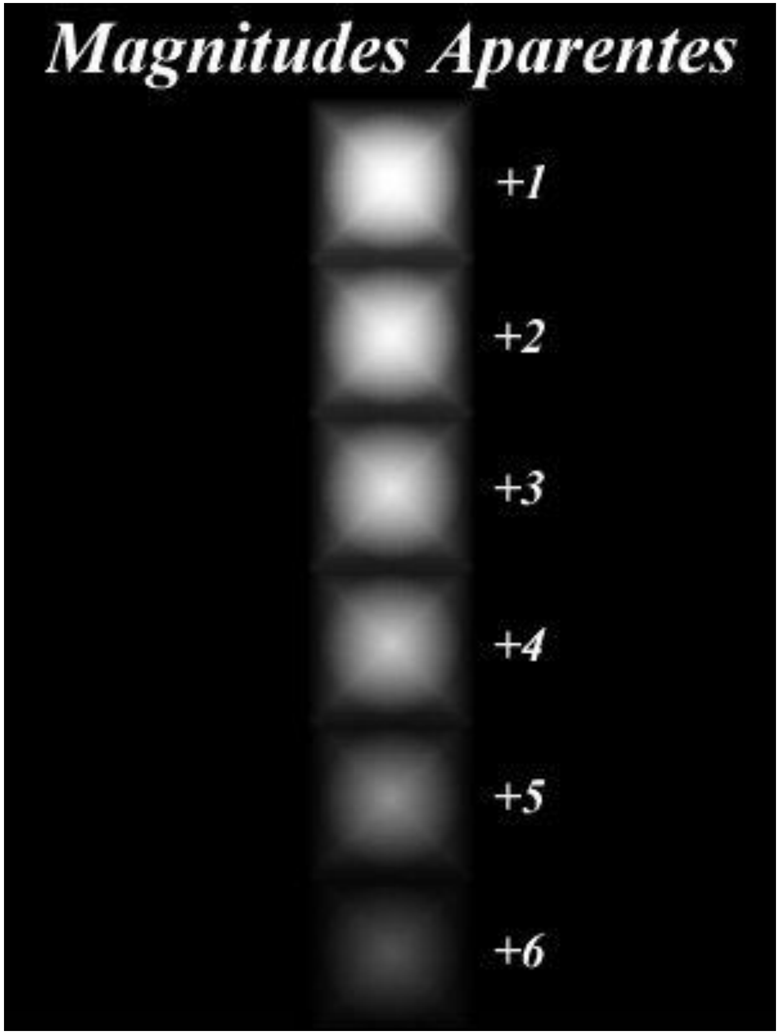
Alexander Graham Bell (1847 — 1922).

Magnitude aparente das estrelas

Magnitude aparente é uma escala para comparação do brilho das estrelas desenv olvida pelo astrônomo grego Hiparco há mais de 2000 anos.

Hiparco (190-120 aC)

Ele alocou às estrelas mais brilhantes do céu uma magnitude m=1, às um pouco menos brilhantes do que as primeiras uma magnitude m=2, e assim por diante, até que todas as estrelas visíveis por ele tivessem valores de magnitude de 1 a 6, sendo este último valor atribuído às estrelas menos brilhantes do céu.

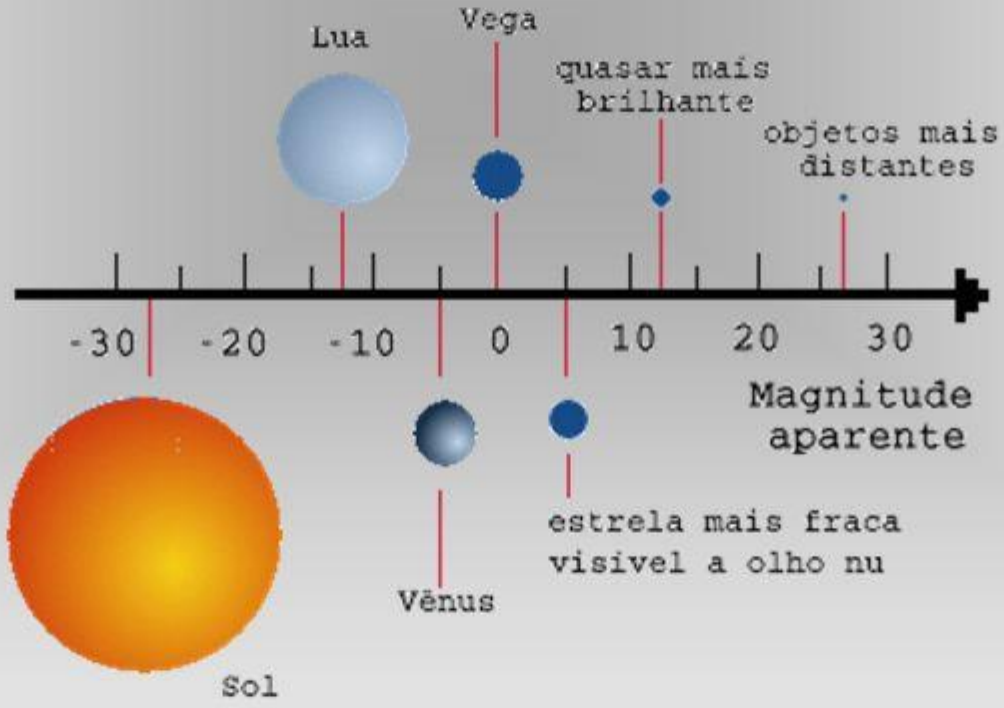


Magnitude aparente das estrelas

Portanto, o sistema de magnitude é baseado no quão brilhantes são as estrelas a olho nu. Posteriormente a escala de Hiparco foi estendida para magnitudes além de 6 e abaixo de 1, inclusive negativas.

Magnitude Aparente

Magnitude de um astro obtida através da observação, independentemente de seu fluxo radiante intrínseco. Exprime o brilho aparente.



Magnitude aparente das estrelas

Hoje em dia a diferença entre as magnitudes das estrelas se expressa com logaritmos:

$$(m_i - m_j) = -\frac{5}{2}\log_{10}\left(\frac{F_i}{F_j}\right)$$

Hiparco (190-120 aC)

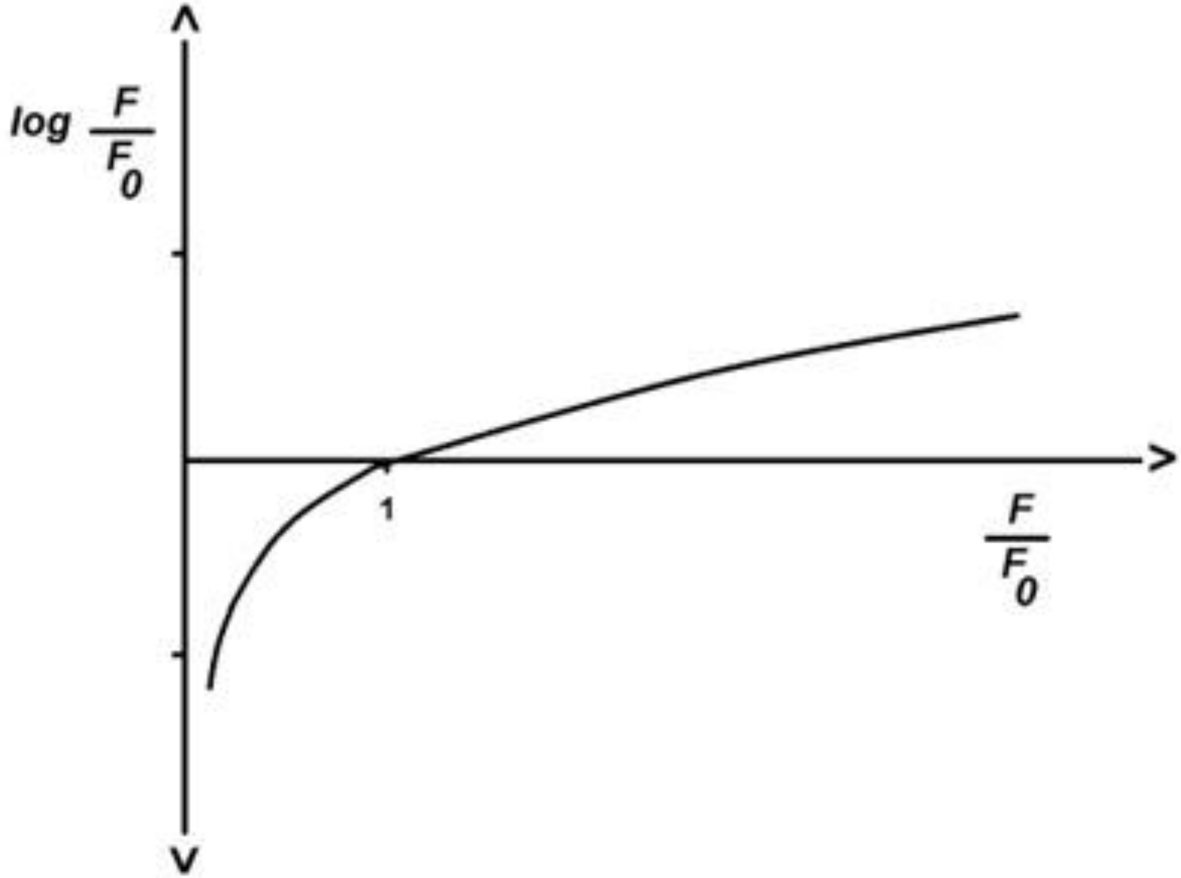


Figura 1 - O logaritmo do fluxo da luz estelar F, função que cresce suavemente conforme F aumenta. Hipparcos e seus seguidores adotaram implicitamente esta forma ao definir um intervalo (escala) de magnitudes visíveis, posteriormente matematicamente esprimida na Eq. (1), a qual continua sendo utilizada até hoje. Quando o fluxo F resulta menor que aquele da refer ência F_0, a função é negativa e a magnitude aparente m cresce numericamente.

Escala Richter

A **escala Richter**, atribui um número único para quantificar o nível de energia liberada por um terremoto.

Charles Francis Richter (1900 — 1985), sismólogo americano.

Escala Richter

A **escala Richter**, atribui um número único para quantificar o nível de energia liberada por um terremoto.

É uma escala logarítmica, de base 10.

Escala Richter

O número do terremoto é obtido calculando o logarítmo da amplitude horizontal combinada (amplitude sísmica) do maior deslocamento a partir do zero em um tipo particular de sismógrafo.

Escala Richter

Pelo fato de ser um escala logarítmica, um terremoto que mede 5 na escala Richter tem uma amplitude sísmica 10 vezes maior do que uma que mede 4. Em termos de energia, um terremoto de grau 7 libera cerca de 30 vezes a energia de um sismo de grau 6.

Escala Richter

O terremoto de abril no Nepal teve grau 7,9.

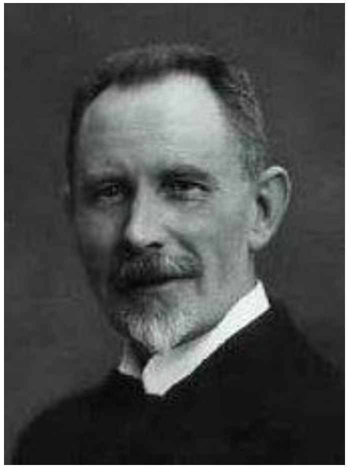
O de maio teve grau 7,3.

Escala de pH

pH é uma medida do **potencial hidrogeniônico** a acidez, neutralidade ou alcalinidade de uma solução aquosa.

Escala de pH

O termo **pH** foi introduzido, em 1909, pelo bioquímico dinamarquês Søren Peter Lauritz Sørensen (1868-1939) com o objetivo de facilitar seus trabalhos no controle de qualidade de cervejas.



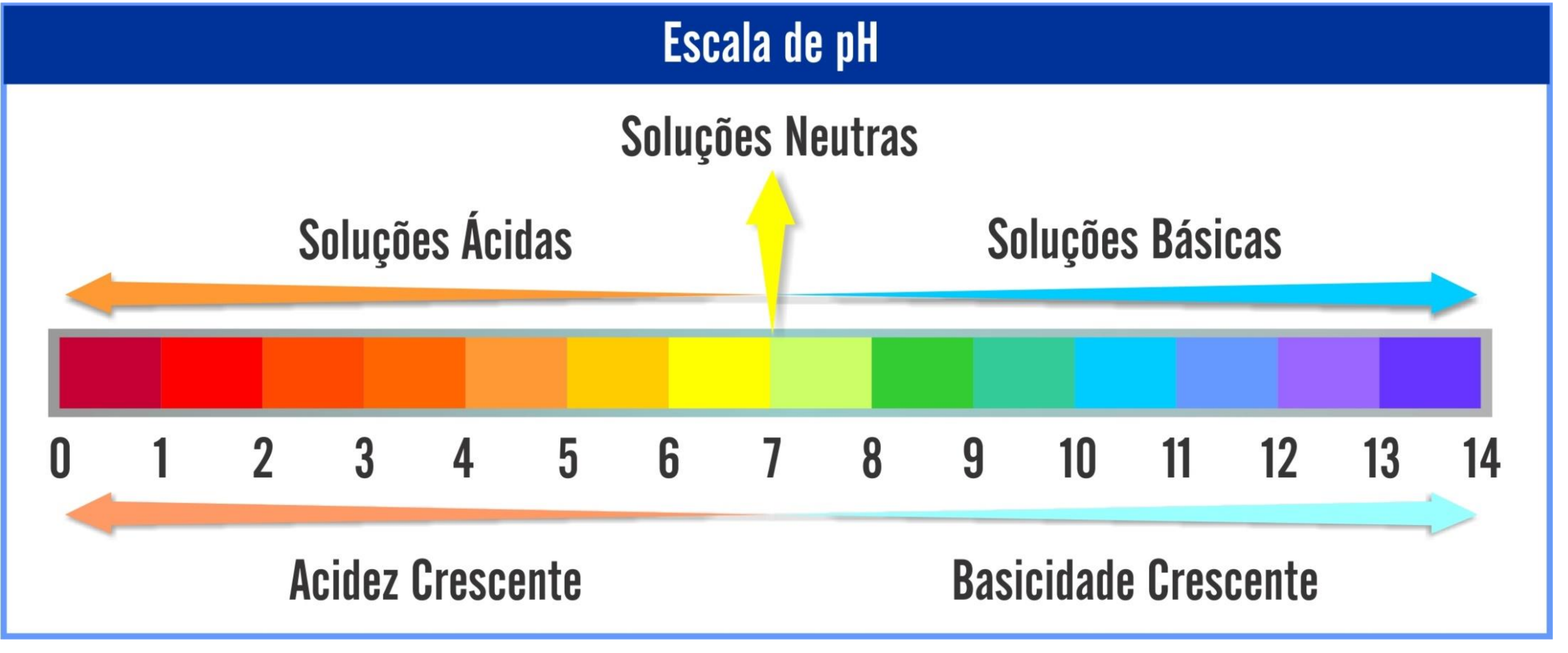
Escala de pH

O "p" vem do alemão *potenz*, que significa poder de concentração, e o "H" é para o íon de hidrogênio (H^+).

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}\left[\mathrm{a}_{H^+}\right]$$

Escala de pH

O "p" vem do alemão *potenz*, que significa poder de concentração, e o "H" é para o íon de hidrogênio (H^+).



Alguns valores comuns de pH

Substância	pH
Ácido de bateria	<1.0
Suco gástrico	2.0
Sumo de limão	2.4
refrigerante tipo Cola	2.5
Vinagre	2.9
Sumo de laranja ou maçã	3.5
Cerveja	4.5
Café	5.0
Chá	5.5
Chuva ácida	< 5.6
Saliva pacientes com câncer (cancro)	4.5-5.7
Leite	6.5
Água pura	7.0
Saliva humana	6.5-7.4
Sangue	7.34 - 7.45
Água do mar	8.0
Sabonete de mão	9.0 - 10.0
Amônia caseira	11.5
"Água sanitária"	12.5
Hidróxido de sódio caseiro	13.5