2.3 Exercícios

1. Dado que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 2} h(x) = 0$$

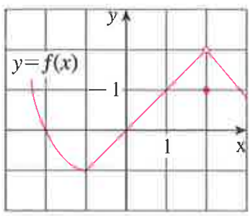
encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

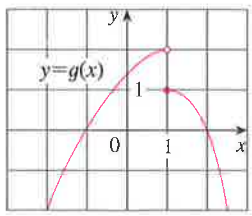
(a) $\lim_{x\to 2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 2} [g(x)]^3$

(c) $\lim_{x\to 2} \sqrt{f(x)}$ (d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Os gráficos de f e g são dados. Use-os para calcular cada limite. Caso não exista, explique por quê.





(a) $\lim_{x\to 2} [f(x) + g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 1} [f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x\to 0} [f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x\to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2} [x^3 f(x)]$ (f) $\lim_{x\to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

3-9 Calcule o limite justificando cada passagem com as Propriedades dos Limites que forem usadas.

3. $\lim_{x\to -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$

4. $\lim_{x\to -1} (x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3)$

5. $\lim_{t\to -2} \dfrac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

6. $\lim_{u\to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

7. $\lim_{x\to 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

8. $\lim_{t\to 2} \left(\dfrac{t^2 - 2}{t^3 - 3t + 5}\right)^2$

9. $\lim_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

10. (a) O que há de errado com a equação a seguir?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) Em vista de (a), explique por que a equação

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x\to 2} (x + 3)$$

está correta.

11-32 Calcule o limite, se existir.

11. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

12. $\lim_{x\to -4} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

13. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

14. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim_{t\to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim_{x\to -1} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

17. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

18. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

19. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$

21. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

22. $\lim_{u\to 2} \dfrac{\sqrt{4u + 1} - 3}{u - 2}$

23. $\lim_{x\to -4} \dfrac{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{x}}{4 + x}$

24. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$

25. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + t} - \sqrt{1 - t}}{t}$

26. $\lim_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t}\right)$

27. $\lim_{x\to 16} \dfrac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

28. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

29. $\lim_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \dfrac{1}{t}\right)$

30. $\lim_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

31. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

32. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(x + h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$

33. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

traçando o gráfico da função $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$

(b) Faça uma tabela de valores de $f(x)$ para x próximo de 0 e estime qual será o valor do limite.

(c) Use as Propriedades dos Limites para mostrar que sua estimativa está correta.

34. (a) Use um gráfico de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$ com duas casas decimais.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com quatro casas decimais.

(c) Use as Propriedades dos Limites para encontrar o valor exato do limite.

35. Use o Teorema do Confronto para mostrar que $\lim_{x\to 0} (x^2 \cos 20\pi x) = 0$. Ilustre, fazendo os gráficos das funções $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$ e $h(x) = x^2$ na mesma tela.

36. Empregue o Teorema do Confronto para mostrar que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3 + x^2}\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} = 0.$$

Ilustre, fazendo os gráficos das funções f, g e h (como no Teorema do Confronto) na mesma tela.

37. Se $4x - 9 \leqslant f(x) \leqslant x^2 - 4x + 7$ para $x \geqslant 0$, encontre $\lim_{x\to 4} f(x)$.

38. Se $2x \leqslant g(x) \leqslant x^4 - x^2 + 2$ para todo x, avalie $\lim_{x\to 1} g(x)$.

39. Demonstre que $\lim_{x\to 0} x^4 \cos\dfrac{2}{x} = 0$.

40. Demonstre que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0$.

41-46 Encontre, quando existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

41. $\lim_{x\to 3} (2x + |x - 3|)$

42. $\lim_{x\to -6} \dfrac{2x + 12}{|x + 6|}$

43. $\lim_{x\to 0{,}5^-} \dfrac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|}$

44. $\lim_{x\to -2} \dfrac{2 - |x|}{2 + x}$

45. $\lim_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

46. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

---

47. A função sinal, denotada por sgn, é definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico dessa função.

(b) Encontre ou explique por que não existe cada um dos limites a seguir.

(i) $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x$ (ii) $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x$

(iii) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ (iv) $\lim_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x|$

48. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(a) Encontre $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

(b) $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe?

(c) Esboce o gráfico de f.

49. Seja $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$.

(a) Encontre

(i) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ (ii) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$

(b) $\lim_{x\to 2} g(x)$ existe?

(c) Esboce o gráfico de g.

50. Seja

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \\ x - 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(a) Determine as quantidades a seguir, se existirem.

(i) $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ (ii) $\lim_{x\to 1} g(x)$ (iii) $g(1)$

(iv) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ (v) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ (vi) $\lim_{x\to 2} g(x)$

(b) Esboce o gráfico de g.

51. (a) Se o símbolo $[\![\ ]\!]$ denota a função maior inteiro do Exemplo 10, calcule

(i) $\lim_{x\to -2^+} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x\to -2} [\![x]\!]$ (iii) $\lim_{x\to -2{,}4} [\![x]\!]$

(b) Se n for um inteiro, calcule

(i) $\lim_{x\to n^-} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x\to n^+} [\![x]\!]$

(c) Para quais valores de a o limite $\lim_{x\to a} [\![x]\!]$ existe?

52. Seja $f(x) = [\![\cos x]\!]$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

(a) Esboce o gráfico de f.

(b) Calcule cada limite, se existir

(i) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to (\pi/2)^-} f(x)$

(iii) $\lim_{x\to (\pi/2)^+} f(x)$ (iv) $\lim_{x\to \pi/2} f(x)$

(c) Para quais valores de a o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe?

53. Se $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, mostre que existe $\lim_{x\to 2} f(x)$, mas que não é igual a $f(2)$.

54. Na Teoria da Relatividade, a fórmula da contração de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expressa o comprimento L de um objeto como uma função de sua velocidade v em relação a um observador, onde L_0 é o comprimento do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. Encontre $\lim_{v\to c^-} L$ e interprete o resultado. Por que é necessário o limite à esquerda?

55. Se p for um polinômio, mostre que $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.

56. Se r for uma função racional, use o Exercício 55 para mostrar que $\lim_{x\to a} r(x) = r(a)$ para todo número a no domínio de r.

57. Se $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, encontre $\lim_{x\to 1} f(x)$.

58. Se $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$, encontre os seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

59. Se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

demonstre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

60. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x\to a} f(x)$ nem $\lim_{x\to a} g(x)$ existam.

61. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x\to a} [f(x)\,g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x\to a} f(x)$ nem $\lim_{x\to a} g(x)$ existam.

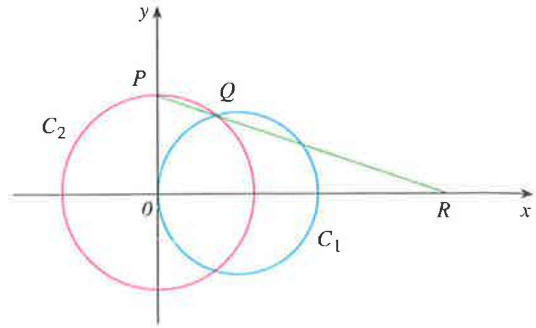
62. Calcule $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$.

63. Existe um número a tal que

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Caso exista, encontre a e o valor do limite.

64. A figura mostra um círculo fixo C_1 de equação $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e um círculo C_2, a ser encolhido, com raio r e centro na origem. P é o ponto $(0, r)$, Q é o ponto de intersecção superior dos dois círculos, e R é o ponto de intersecção da reta PQ com o eixo x. O que acontecerá com R quando C_2 se contrair, isto é, quando $r \to 0^+$?



2.4 A Definição Precisa de um Limite

A definição intuitiva de limite dada na Seção 2.2 é inadequada para alguns propósitos, pois frases como "x está próximo de 2" e "$f(x)$ aproxima-se cada vez mais de L" são vagas. Para sermos capazes de demonstrar conclusivamente que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10.000} \right) = 0{,}0001 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

devemos tornar precisa a definição de limite.

Para chegar à definição precisa de limite, consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

É intuitivamente claro que quando x está próximo de 3, mas $x \neq 3$, então $f(x)$ está próximo de 5 e, sendo assim, $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$.

Para obter informações mais detalhadas sobre como $f(x)$ varia quando x está próximo de 3, fazemos a seguinte pergunta:

Quão próximo de 3 deverá estar x para que $f(x)$ difira de 5 por menos que 0,1?

É costume usar a letra grega δ (delta) nessa situação.

A distância de x a 3 é $|x - 3|$, e a distância de $f(x)$ a 5 é $|f(x) - 5|$, logo, nosso problema é achar um número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0{,}1 \qquad \text{se} \qquad |x - 3| < \delta \quad \text{mas } x \neq 3$$

Se $|x - 3| > 0$, então $x \neq 3$; portanto uma formulação equivalente de nosso problema é achar um número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0{,}1 \qquad \text{se} \qquad 0 < |x - 3| < \delta$$

Observe que, se $0 < |x - 3| < (0{,}1)/2 = 0{,}05$, então

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 2(0{,}05) = 0{,}1$$

isto é, $$|f(x) - 5| < 0{,}1 \qquad \text{se} \qquad 0 < |x - 3| < 0{,}05$$

Assim, uma resposta para o problema é dada por $\delta = 0{,}05$; isto é, se x estiver a uma distância de no máximo 0,05 de 3, então $f(x)$ estará a uma distância de no máximo 0,1 de 5.

Se mudarmos o número 0,1 em nosso problema para o número menor 0,01, então, usando o mesmo método, achamos que $f(x)$ diferirá de 5 por menos que 0,01, desde que x difira de 3 por menos que $(0{,}01)/2 = 0{,}005$: