complicadas pode ser impossível calcular exatamente Δy. Nesses casos, a aproximação por diferenciais é especialmente útil.

Na notação de diferenciais, a aproximação linear $\boxed{1}$ pode ser escrita como

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

Por exemplo, para a função $f(x) = \sqrt{x + 3}$ do Exemplo 1, temos

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x + 3}}$$

Se $a = 1$ e $dx = \Delta x = 0{,}05$, então

$$dy = \frac{0{,}05}{2\sqrt{1 + 3}} = 0{,}0125$$

e

$$\sqrt{4{,}05} = f(1{,}05) \approx f(1) + dy = 2{,}0125$$

exatamente como encontramos no Exemplo 1.

Nosso exemplo final ilustra o uso de diferenciais na estimativa de erros que ocorrem em virtude de medidas aproximadas.

EXEMPLO 4 O raio de uma esfera foi medido e descobriu-se que possui 21 cm com uma possibilidade de erro na medida de no máximo 0,05 cm. Qual é o erro máximo usando esse valor de raio para computar o volume da esfera?

SOLUÇÃO Se o raio da esfera for r, então seu volume é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Se o erro na medida do valor de r for denotado por $dr = \Delta r$, então o erro correspondente no cálculo do valor de V é ΔV, que pode ser aproximado pela diferencial

$$dV = 4\pi r^2\,dr$$

Quando $r = 21$ e $dr = 0{,}05$, temos

$$dV = 4\pi(21)^2 0{,}05 \approx 277$$

O erro máximo no volume calculado é de cerca de 277 cm^3.

OBSERVAÇÃO Embora o erro possível no Exemplo 4 possa parecer muito grande, uma ideia melhor é dada pelo **erro relativo**, que é calculado dividindo-se o erro pelo volume total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\,dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\frac{dr}{r}$$

Assim, o erro relativo no volume é cerca de três vezes o erro relativo no raio. No Exemplo 4, o erro relativo no raio é de aproximadamente $dr/r = 0{,}05/21 \approx 0{,}0024$ e produz um erro relativo de cerca de 0,007 no volume. Os erros também poderiam ser expressos como **erros percentuais** de 0,24% no raio e 0,7% no volume.

3.10 Exercícios

1–4 Encontre a linearização $L(x)$ da função em a.

1. $f(x) = x^4 + 3x^2$, $a = -1$
2. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \pi/6$
3. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$
4. $f(x) = x^{3/4}$, $a = 16$

5. Encontre a aproximação linear da função $f(x) = \sqrt{1 - x}$ em $a = 0$ e use-a para aproximar os números $\sqrt{0{,}9}$ e $\sqrt{0{,}99}$. Ilustre fazendo os gráficos de f e da reta tangente.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

6. Encontre a aproximação linear da função $g(x) = \sqrt[3]{1+x}$ em $a = 0$ e use-a para aproximar os números $\sqrt[3]{0,95}$ e $\sqrt[3]{1,1}$. Ilustre, fazendo os gráficos de g e da reta tangente.

7–10 Verifique a aproximação linear dada em $a = 0$. A seguir, determine os valores de x para os quais a aproximação linear tem precisão de 0,1.

7. $\ln(1+x) \approx x$

8. $\operatorname{tg} x \approx x$

9. $1/(1+2x)^4 \approx 1 - 8x$

10. $e^x \cos x \approx 1 + x$

11–14 Encontre a diferencial da função.

11. (a) $y = x^2 \operatorname{sen} 2x$ (b) $y = \ln\sqrt{1+t^2}$

12. (a) $y = s/(1+2s)$ (b) $y = e^{-u}\cos u$

13. (a) $y = \operatorname{tg}\sqrt{t}$ (b) $y = \dfrac{1-v^2}{1+v^2}$

14. (a) $y = e^{\operatorname{tg}\pi t}$ (b) $y = \sqrt{1+\ln z}$

15–18 (a) Encontre a diferencial dy e (b) avalie dy para os valores dados de x e dx.

15. $y = e^{x/10}, \quad x = 0, \quad dx = 0,1$

16. $y = \cos \pi x, \quad x = \frac{1}{3}, \quad dx = -0,02$

17. $y = \sqrt{3+x^2}, \quad x = 1, \quad dx = -0,1$

18. $y = \dfrac{x+1}{x-1}, \quad x = 2, \quad dx = 0,05$

19–22 Compute Δy e dy para os valores dados de x e $dx = \Delta x$. A seguir, esboce um diagrama como o da Figura 5, mostrando os segmentos de reta com comprimentos dx, dy e Δy.

19. $y = 2x - x^2, \quad x = 2, \quad \Delta x = -0,4$

20. $y = \sqrt{x}, \quad x = 1, \quad \Delta x = 1$

21. $y = 2/x, \quad x = 4, \quad \Delta x = 1$

22. $y = e^x, \quad x = 0, \quad \Delta x = 0,5$

23–28 Use uma aproximação linear (ou diferencial) para estimar o número dado.

23. $(1,999)^4$

24. $e^{-0,015}$

25. $\sqrt[3]{1001}$

26. $1/4,002$

27. $\operatorname{tg} 44°$

28. $\sqrt{99,8}$

29–31 Explique, em termos de aproximações lineares ou de diferenciais, por que a aproximação é razoável.

29. $\sec 0,08 \approx 1$

30. $(1,01)^6 \approx 1,06$

31. $\ln 1,05 \approx 0,05$

32. Sejam $\quad f(x) = (x-1)^2, \qquad g(x) = e^{-2x}$

e $\qquad h(x) = 1 + \ln(1-2x).$

(a) Encontre as linearizações de f, g e h em $a = 0$. O que você percebe? Como explicar o que aconteceu?

(b) Faça os gráficos de f, g e h, e de suas aproximações lineares. Para qual função a aproximação é melhor? Para qual é pior? Explique.

33. A aresta de um cubo tem 30 cm, com um possível erro de medida de 0,1 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo possível no cálculo (a) do volume do cubo e (b) da área da superfície do cubo.

34. O raio de um disco circular é 24 cm, com um erro possível de 0,2 cm.

(a) Use diferenciais para estimar o erro máximo na área calculada do disco.

(b) Qual o erro relativo? Qual o erro percentual?

35. A circunferência de uma esfera mede 84 cm, com erro possível de 0,5 cm.

(a) Use diferenciais para estimar o erro máximo na área calculada da superfície. Qual o erro relativo?

(b) Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo no volume calculado. Qual o erro relativo?

36. Use as diferenciais para estimar a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de 0,05 cm de tinta a um domo com diâmetro de 50 m.

37. (a) Use as diferenciais para encontrar uma fórmula para o volume aproximado de uma fina camada cilíndrica com altura h, raio interno r e espessura Δr.

(b) Qual é o erro envolvido no uso da fórmula da parte (a)?

38. Sabe-se que um lado de um triângulo retângulo mede 20 cm de comprimento e o ângulo oposto foi medido como 30°, com um erro possível de $\pm 1°$.

(a) Use diferenciais para estimar o erro no cálculo da hipotenusa.

(b) Qual é o erro percentual?

39. Se uma corrente I passar por um resistor com resistência R, a Lei de Ohm afirma que a queda de voltagem é $V = RI$. Se V for constante e R for medida com um certo erro, use diferenciais para mostrar que o erro relativo no cálculo de I é aproximadamente o mesmo (em módulo) que o erro relativo em R.

40. Quando o sangue flui ao longo de um vaso sanguíneo, o fluxo F (o volume de sangue por unidade de tempo que passa por um ponto dado) é proporcional à quarta potência do raio R do vaso:

$$F = kR^4$$

(Esta equação é conhecida como a Lei de Poiseuille; mostraremos porque isso é verdadeiro na Seção 8.4.) Uma artéria parcialmente obstruída pode ser alargada por uma operação chamada angioplastia, na qual um cateter-balão é inflado dentro da artéria a fim de aumentá-la e restaurar o fluxo normal do sangue.

Mostre que uma variação relativa em F é cerca de quatro vezes a variação relativa em R. Como um aumento de 5% no raio afeta o fluxo do sangue?

41. Estabeleça as seguintes regras para trabalhar com as diferenciais (onde c denota uma constante e u e v são funções de x).

(a) $dc = 0$ (b) $d(cu) = c\,du$

(c) $d(u+v) = du + dv$ (d) $d(uv) = u\,dv + v\,du$

(e) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ (f) $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$

42. Na página 431 de *Physics: Calculus*, 2. ed., por Eugene Hecht (Pacific Grove, CA, 2000), durante a dedução da Fórmula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ para o período de um pêndulo de comprimento L, o autor obtém a equação $a_T = -g \operatorname{sen}\theta$ para a aceleração tangencial do peso do pêndulo. Ele então afirma: "para ângulos pequenos, o valor de θ em radianos é muito próximo do valor de sen θ; eles diferem por menos que 2% até cerca de 20°".

(a) Verifique a aproximação linear em 0 para a função seno:

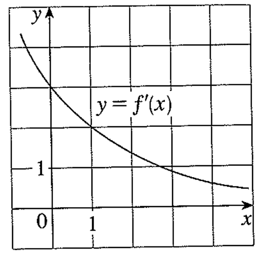
$$\operatorname{sen} x \approx x$$

(b) Use uma ferramenta gráfica para determinar os valores de x para os quais sen x e x difiram por menos que 2%. Então, verifique a afirmação de Hecht, convertendo de radianos para graus.

43. Suponha que a única informação que temos sobre uma função f é que $f(1) = 5$ e que o gráfico de sua *derivada* é como mostrado.

(a) Use uma aproximação linear para estimar $f(0{,}9)$ e $f(1{,}1)$.

(b) Suas estimativas na parte (a) são muito grandes ou pequenas? Explique.



44. Suponha que não tenhamos uma fórmula para $g(x)$, mas saibamos que $g(2) = -4$ e $g'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ para todo x.

(a) Use uma aproximação linear para estimar $g(1{,}95)$ e $g(2{,}05)$.

(b) Suas estimativas na parte (a) são muito grandes ou pequenas? Explique.

PROJETO APLICADO — POLINÔMIOS DE TAYLOR

A aproximação pela reta tangente $L(x)$ é a melhor aproximação de primeiro grau (linear) para $f(x)$ próximo de $x = a$ porque $f(x)$ e $L(x)$ têm a mesma taxa de variação (derivada) em a. Para uma aproximação melhor que a linear, vamos tentar uma aproximação de segundo grau (quadrática) $P(x)$. Em outras palavras, aproximaremos uma curva por uma parábola em vez de uma reta. Para nos assegurarmos de que é uma boa aproximação, estipularemos o seguinte:

(i) $P(a) = f(a)$ — (P e f devem ter o mesmo valor em a.)

(ii) $P'(a) = f'(a)$ — (P e f devem ter a mesma taxa de mudança em a.)

(iii) $P''(a) = f''(a)$ — (As inclinações de P e f devem variar na mesma taxa em a.)

1. Encontre a aproximação quadrática $P(x) = A + Bx + Cx^2$ para a função $f(x) = \cos x$ que satisfaça as condições (i), (ii) e (iii) com $a = 0$. Faça o gráfico de P, f e da aproximação linear $L(x) = 1$ em uma mesma tela. Comente a qualidade das aproximações P e L de f.

2. Determine os valores de x para os quais a aproximação quadrática $f(x) \approx P(x)$ do Problema 1 tem precisão de 0,1. [*Dica:* faça os gráficos de $y = P(x)$, $y = \cos x - 0{,}1$ e $y = \cos x + 0{,}1$ em uma tela comum.]

3. Para aproximar uma função f por uma função quadrática P próxima a um número a, é melhor escrever P na forma

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2$$

Mostre que a função quadrática que satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

4. Encontre a aproximação quadrática para $f(x) = \sqrt{x + 3}$ próxima a $a = 1$. Faça os gráficos de f, da aproximação quadrática e da aproximação linear do Exemplo 2 da Seção 3.10 na mesma tela. O que você conclui?

5. Em vez de ficarmos satisfeitos com aproximações lineares ou quadráticas para $f(x)$ próximo a $x = a$, vamos tentar encontrar aproximações melhores por polinômios de graus mais altos. Procuramos por um polinômio de grau n

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que T_n e suas primeiras n derivadas tenham os mesmos valores em $x = a$ que f e suas primeiras n derivadas. Derivando repetidamente e fazendo $x = a$, mostre que essas condições estão satisfeitas se $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \frac{1}{2}f''(a)$ e em geral

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

onde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot k$. O polinômio resultante

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

é denominado **polinômio de Taylor de grau n de f centrado em a.**

6. Encontre o polinômio de Taylor de 8° grau, centrado em $a = 0$ para a função $f(x) = \cos x$. Faça os gráficos de f junto com os polinômios de Taylor T_2, T_4, T_6, T_8 na janela retangular [−5, 5] por [−1,4; 1,4] e comente quão bem eles aproximam f.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador