Base variável, expoente variável

4. Para encontrar $(d/dx)[f(x)]^{g(x)}$, a derivação logarítmica pode ser usada, como no exemplo.

EXEMPLO 8 Derive $y = x^{\sqrt{x}}$.

A Figura 3 ilustra o Exemplo 8 mostrando os gráficos de $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ e sua derivada.

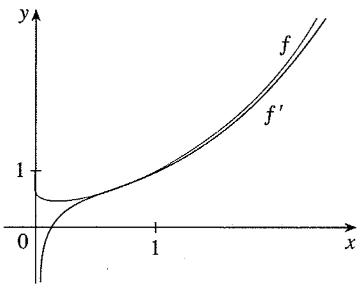

FIGURA 3

SOLUÇÃO 1 Uma vez que a base e o expoente são variáveis, usamos a derivação logarítmica:

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\,\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + (\ln x)\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

SOLUÇÃO 2 Outro método é escrever $x^{\sqrt{x}} = (e^{\ln x})^{\sqrt{x}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}\ln x}\right) = e^{\sqrt{x}\ln x}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\,\ln x\right)$$

$$= x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right) \qquad \text{(como na Solução 1)}$$

O Número e como um Limite

Já mostramos que se $f(x) = \ln x$, então $f'(x) = 1/x$. Assim, $f'(1) = 1$. Agora, usamos esse fato para expressar o número e como um limite.

Da definição de derivada como um limite, temos

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}$$

Por causa de $f'(1) = 1$, temos

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = 1$$

Assim, pelo Teorema 2.5.8 e pela continuidade da função exponencial, temos

$$e = e^1 = e^{\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

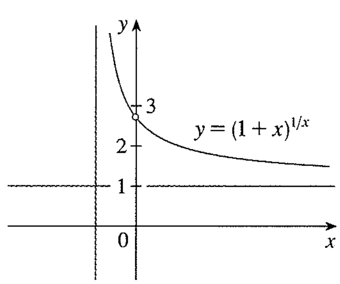

FIGURA 4

x	$(1+x)^{1/x}$
0,1	2,59374246
0,01	2,70481383
0,001	2,71692393
0,0001	2,71814593
0,00001	2,71826824
0,000001	2,71828047
0,0000001	2,71828169
0,00000001	2,71828181

5 $$\boxed{e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}}$$

A Fórmula 5 está ilustrada pelo gráfico da função $y = (1+x)^{1/x}$ na Figura 4 e na tabela para os valores pequenos de x. Isso ilustra o fato de que, com precisão até a sétima casa decimal,

$$e \approx 2{,}7182818$$

Se colocarmos $n = 1/x$ na Fórmula 5, então $n \to \infty$ quando $x \to 0^+$ e uma expressão alternativa para e é

6 $$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

3.6 Exercícios

1. Explique por que a função logarítmica natural $y = \ln x$ é usada mais vezes no cálculo do que as outras funções logarítmicas $y = \log_a x$.

2–22 Derive a função.

2. $f(x) = x \ln x - x$
3. $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$
4. $f(x) = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$
5. $f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$
6. $f(x) = \ln \sqrt[5]{x}$
7. $f(x) = \log_{10}(x^3 + 1)$
8. $f(x) = \log_5(xe^x)$
9. $f(x) = \operatorname{sen} x \ln(5x)$
10. $f(u) = \dfrac{u}{1 + \ln u}$
11. $g(x) = \ln\left(x\sqrt{x^2 - 1}\right)$
12. $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
13. $G(y) = \ln \dfrac{(2y + 1)^5}{\sqrt{y^2 + 1}}$
14. $g(r) = r^2 \ln(2r + 1)$
15. $F(s) = \ln \ln s$
16. $y = \ln |1 + t - t^3|$
17. $y = \operatorname{tg}[\ln(ax + b)]$
18. $y = \ln |\cos(\ln x)|$
19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$
20. $H(z) = \ln \sqrt{\dfrac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$
21. $y = 2x \log_{10} \sqrt{x}$
22. $y = \log_2(e^{-x} \cos \pi x)$

23–26 Encontre y' e y''.

23. $y = x^2 \ln(2x)$
24. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$
25. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$
26. $y = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$

27–30 Derive f e encontre o domínio de f.

27. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln(x - 1)}$
28. $f(x) = \sqrt{2 + \ln x}$
29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$
30. $f(x) = \ln \ln \ln x$

31. Se $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, encontre $f'(1)$.
32. Se $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$, encontre $f'(0)$.

33–34 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

33. $y = \ln(x^2 - 3x + 1)$, $(3, 0)$
34. $y = x^2 \ln x$, $(1, 0)$

35. Se $f(x) = \operatorname{sen} x + \ln x$, encontre $f'(x)$. Verifique se sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f'.
36. Encontre as equações das retas tangentes para a curva $y = (\ln x)/x$ nos pontos $(1, 0)$ e $(e, 1/e)$. Ilustre fazendo o gráfico da curva e de suas retas tangentes.
37. Seja $f(x) = cx + \ln(\cos x)$. Para qual valor de c ocorre $f'(\pi/4) = 6$?
38. Seja $f(x) = \log_a(3x^2 - 2)$. Para qual valor de a ocorre $f'(1) = 3$?

39–50 Use a derivação logarítmica para achar a derivada de função.

39. $y = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6$
40. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}$
41. $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^4 + 1}}$
42. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2 - x}(x + 1)^{2/3}$
43. $y = x^x$
44. $y = x^{\cos x}$
45. $y = x^{\operatorname{sen} x}$
46. $y = \sqrt{x}^{\,x}$
47. $y = (\cos x)^x$
48. $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$
49. $y = (\operatorname{tg} x)^{1/x}$
50. $y = (\ln x)^{\cos x}$

51. Encontre y' se $y = \ln(x^2 + y^2)$.
52. Encontre y' se $x^y = y^x$.
53. Encontre uma fórmula para $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = \ln(x - 1)$.
54. Encontre $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.
55. Use a definição da derivada para demonstrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

56. Mostre que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ para qualquer $x > 0$.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

3.7 Taxas de Variação nas Ciências Naturais e Sociais

Sabemos que se $y = f(x)$, então a derivada dy/dx pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x. Nesta seção examinaremos algumas das aplicações dessa ideia na física, química, biologia, economia e em outras ciências.

Vamos nos recordar da Seção 2.7, que apresentou a ideia básica das taxas de variação. Se x variar de x_1 a x_2, então a variação em x será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em y será

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$