

FIGURA 18

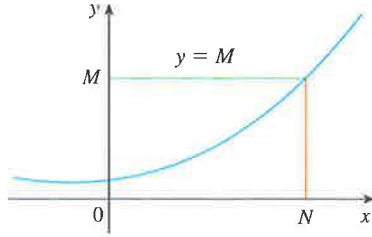


FIGURA 19  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Finalmente, observamos que pode ser definido um limite infinito no infinito da forma a seguir. A ilustração geométrica está dada na Figura 19.

**9 Definição** Seja  $f$  uma função definida em algum intervalo  $(a, \infty)$ . Então

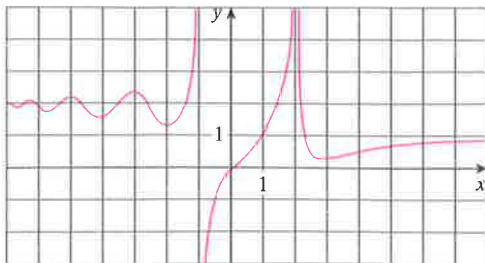
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

significa que para todo positivo  $M$  existe um correspondente número positivo  $N$  tal que se  $x > N$  então  $f(x) > M$ .

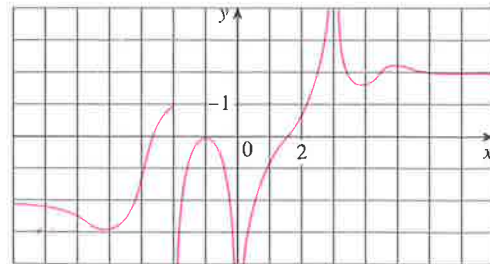
Definições análogas podem ser feitas quando o símbolo  $\infty$  é substituído por  $-\infty$ . (Veja o Exercício 74.)

## 2.6 Exercícios

- Explique com suas palavras o significado de cada um dos itens a seguir.
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$
  - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$
- (a) O gráfico de  $y = f(x)$  pode interceptar uma assíntota vertical? E uma assíntota horizontal? Ilustre com gráficos.  
 (b) Quantas assíntotas horizontais pode ter o gráfico de  $y = f(x)$ ? Ilustre com gráficos as possibilidades.
- Para a função  $f$ , cujo gráfico é dado, diga quem são.
  - $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
  - As equações das assíntotas



- Para a função  $g$ , cujo gráfico é dado, determine o que se pede.
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$
  - $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x)$
  - As equações das assíntotas



5-10 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função  $f$  que satisfaça a todas as condições dadas.

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ,  $f(0) = 0$

7.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0,$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty, f$  é ímpar

9.  $f(0) = 3, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2,$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \infty,$   
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$

10.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2, f(0) = 0, f$  é par

11. Faça uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^x}$$

calculando a função  $f(x) = x^2/2^x$  para  $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$  e  $100$ . Então, use o gráfico de  $f$  para comprovar sua conjectura.

12. (a) Use o gráfico de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para estimar o valor de  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  com precisão de duas casas decimais.

(b) Use uma tabela de valores de  $f(x)$  para estimar o limite com precisão de quatro casas decimais.

13-14 Calcule o limite justificando cada passagem com as propriedades dos limites que forem usadas.

13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 4}{2x^2 + 5x - 8}$

14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}}$

15-38 Encontre o limite ou demonstre que não existe.

15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x + 3}$

16.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5}{x - 4}$

17.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$

18.  $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{2 - 3y^2}{5y^2 + 4y}$

19.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}$

20.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t - t\sqrt{t}}{2t^{3/2} + 3t - 5}$

21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + x)}$

22.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}}$

23.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

25.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + x} - 3x)$

26.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x})$

27.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx})$

28.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1}$

29.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$

30.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} + 2 \cos 3x)$

31.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + x^5)$

32.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^6}{x^4 + 1}$

33.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(e^x)$

34.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$

35.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$

36.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2 + 1}$

37.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-2x} \cos x)$

38.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg}^{-1}(\ln x)$

39. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x)$$

traçando o gráfico da função  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$

(b) Faça uma tabela de valores de  $f(x)$  para estimar qual será o valor do limite.

(c) Demonstre que sua conjectura está correta.

40. (a) Use um gráfico de

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

para estimar o valor de  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  com precisão de uma casa decimal.

(b) Use uma tabela de valores de  $f(x)$  para estimar o limite com precisão de quatro casas decimais.

(c) Encontre o valor exato do limite.

41-46 Encontre as assíntotas horizontais e verticais de cada curva. Confira seu trabalho por meio de um gráfico da curva e das estimativas das assíntotas.

41.  $y = \frac{2x + 1}{x - 2}$

42.  $y = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$

43.  $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

44.  $y = \frac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$

45.  $y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

46.  $y = \frac{2e^x}{e^x - 5}$

47. Estime a assíntota horizontal da função

$$f(x) = \frac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2000}$$

através do gráfico  $f$  para  $-10 \leq x \leq 10$ . A seguir, determine a equação da assíntota calculando o limite. Como você explica a discrepância?

48. (a) Trace o gráfico da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

Quantas assíntotas horizontais e verticais você observa? Use o gráfico para estimar os valores dos limites

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

(b) Calculando valores de  $f(x)$ , dê estimativas numéricas dos limites na parte (a).

(c) Calcule os valores exatos dos limites na parte (a). Você obtém os mesmos valores ou valores diferentes para estes limites? [Em vista de sua resposta na parte (a), você pode ter de verificar seus cálculos para o segundo limite.]

49. Encontre uma fórmula para uma função  $f$  que satisfaça as seguintes condições:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \quad f(2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$$

50. Encontre uma fórmula para uma função que tenha por assíntotas verticais  $x = 1$  e  $x = 3$  e por assíntota horizontal  $y = 1$ .

51. Uma função  $f$  é a razão de funções quadráticas e possui uma assíntota vertical  $x = 4$  e somente um intercepto com o eixo das abscissas em  $x = 1$ . Sabe-se que  $f$  possui uma descontinuidade removível em  $x = -1$  e  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$ . Calcule  
 (a)  $f(0)$  (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

52-56 Encontre os limites quando  $x \rightarrow \infty$  e quando  $x \rightarrow -\infty$ . Use essa informação, bem como as intersecções com os eixos, para fazer um esboço do gráfico, como no Exemplo 12.

52.  $y = 2x^3 - x^4$                       53.  $y = x^4 - x^6$

54.  $y = x^3(x + 2)^2(x - 1)$

55.  $y = (3 - x)(1 + x)^2(1 - x)^4$

56.  $y = x^2(x^2 - 1)^2(x + 2)$

57. (a) Use o Teorema do Confronto para determinar  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } x}{x}$ .

(b) Faça o gráfico de  $f(x) = (\text{sen } x)/x$ . Quantas vezes o gráfico cruza a assíntota?

58. Por *comportamento final* de uma função queremos indicar uma descrição do que acontece com seus valores quando  $x \rightarrow \infty$  e quando  $x \rightarrow -\infty$ .

(a) Descreva e compare o comportamento final das funções

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \quad Q(x) = 3x^5$$

por meio do gráfico de ambas nas janelas retangulares  $[-2, 2]$  por  $[-2, 2]$  e  $[-10, 10]$  por  $[-10.000, 10.000]$ .

(b) Dizemos que duas funções têm o *mesmo comportamento final* se sua razão tende a 1 quando  $x \rightarrow \infty$ . Mostre que  $P$  e  $Q$  têm o mesmo comportamento final.

59. Sejam  $P$  e  $Q$  polinômios. Encontre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se o grau de  $P$  for (a) menor que o grau de  $Q$  e (b) maior que o grau de  $Q$ .

60. Faça um esboço da curva  $y = x^n$  ( $n$  inteiro) nos seguintes casos:

- (i)  $n = 0$                       (ii)  $n > 0, n$  ímpar
- (iii)  $n > 0, n$  par            (iv)  $n < 0, n$  ímpar
- (v)  $n < 0, n$  par

Então, use esses esboços para encontrar os seguintes limites:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n$                       (b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^n$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n$                       (d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n$

61. Encontre  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  se, para todo  $x > 1$ ,

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$$

62. (a) Um tanque contém 5.000 litros de água pura. Água salgada contendo 30 g de sal por litro de água é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 25 L/min. Mostre que a concentração de sal depois de  $t$  minutos (em gramas por litro) é

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

(b) O que acontece com a concentração quando  $t \rightarrow \infty$ ?

63. Seremos capazes de mostrar, no Capítulo 9 do Volume II, que, sob certas condições, a velocidade  $v(t)$  de uma gota de chuva caindo no instante  $t$  é

$$v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*}),$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade e  $v^*$  é a *velocidade final* da gota.

(a) Encontre  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ .

(b) Faça o gráfico de  $v(t)$  se  $v^* = 1$  m/s e  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>. Quanto tempo levará para a velocidade da gota atingir 99% de sua velocidade final?

64. (a) Fazendo os gráficos de  $y = e^{-x/10}$  e  $y = 0,1$  na mesma tela, descubra quão grande você precisará tomar  $x$  para que  $e^{-x/10} < 0,1$ .

(b) A parte (a) pode ser resolvida sem usar uma ferramenta gráfica?

65. Use um gráfico para encontrar um número  $N$  tal que

$$\text{se } x > N \quad \text{então} \quad \left| \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} - 1,5 \right| < 0,05$$

66. Para o limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = 2$$

ilustre a Definição 7, encontrando os valores de  $N$  que correspondam a  $\varepsilon = 0,5$  e  $\varepsilon = 0,1$ .

67. Para o limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = -2$$

ilustre a Definição 8, encontrando os valores de  $N$  correspondentes a  $\varepsilon = 0,5$  e  $\varepsilon = 0,1$ .

68. Para o limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

ilustre a Definição 9, encontrando um valor de  $N$  correspondente a  $M = 100$ .

69. (a) De que tamanho devemos tomar  $x$  para que  $1/x^2 < 0,0001$ ?  
 (b) Tomando  $r = 2$  no Teorema 5, temos a igualdade

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Demonstre isso diretamente usando a Definição 7.

70. (a) De que tamanho devemos tornar  $x$  para que  $1/\sqrt{x} < 0,0001$ ?  
 (b) Tomando  $r = \frac{1}{2}$  no Teorema 5, temos a igualdade

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Demonstre isso diretamente usando a Definição 7.

71. Use a Definição 8 para demonstrar que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

72. Demonstre, usando a Definição 9, que  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$ .

73. Usé a Definição 9 para demonstrar que  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ .

74. Formule precisamente a definição de

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Então, use sua definição para demonstrar que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x^3) = -\infty$$

75. Demonstre que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(1/t)$$

e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(1/t)$

se esses limites existirem.