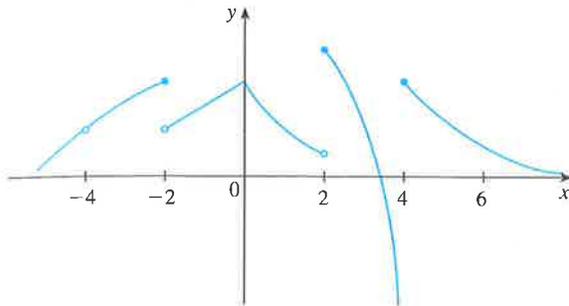


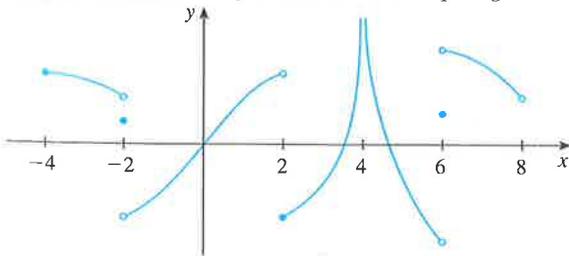
De fato, o Teorema do Valor Intermediário desempenha um papel na própria maneira de funcionar destas ferramentas gráficas. Um computador calcula um número finito de pontos sobre o gráfico e acende os pixels que contêm os pontos calculados. Ele pressupõe que a função é contínua e acende todos os valores intermediários entre dois pontos consecutivos. O computador, portanto, conecta os pixels acendendo os pixels intermediários.

## 2.5 Exercícios

- Escreva uma equação que expresse o fato de que uma função  $f$  é contínua no número 4.
- Se  $f$  é contínua em  $(-\infty, \infty)$ , o que você pode dizer sobre seu gráfico?
- (a) Do gráfico de  $f$ , identifique números nos quais  $f$  é descontínua e explique por quê.  
(b) Para cada um dos números indicados na parte (a), determine se  $f$  é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum deles.



- Do gráfico de  $g$ , identifique os intervalos nos quais  $g$  é contínua.



- Esboce o gráfico de uma função que seja contínua exceto para a descontinuidade declarada.
- Descontínua, porém contínua à direita, em 2
- Descontinuidades em  $-1$  e  $4$ , porém contínua à esquerda em  $-1$  e à direita em  $4$
- Descontinuidade removível em  $3$ , descontinuidade em salto em  $5$
- Não é contínua à direita nem à esquerda em  $-2$ ; contínua somente à esquerda em  $2$
- A tarifa  $T$  cobrada para dirigir em um certo trecho de uma rodovia com pedágio é de \$ 5, exceto durante o horário de pico (entre 7 da manhã e 10 da manhã e entre 4 da tarde e 7 da noite), quando a tarifa é de \$ 7.  
(a) Esboce um gráfico de  $T$  como função do tempo  $t$ , medido em horas após a meia-noite.  
(b) Discuta as descontinuidades da função e seu significado para alguém que use a rodovia.

- Explique por que cada função é contínua ou descontínua.  
(a) A temperatura em um local específico como uma função do tempo.  
(b) A temperatura em um tempo específico como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris.  
(c) A altitude acima do nível do mar como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris.  
(d) O custo de uma corrida de táxi como uma função da distância percorrida.  
(e) A corrente no circuito para as luzes de uma sala como uma função do tempo.
- Suponha que  $f$  e  $g$  sejam funções contínuas tal que  $g(2) = 6$  e  $\lim_{x \rightarrow 2} [3f(x) + f(x)g(x)] = 36$ . Encontre  $f(2)$ .

12–14 Use a definição de continuidade e propriedades de limites para demonstrar que a função é contínua em um dado número  $a$ .

12.  $f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x}$ ,  $a = 4$ .

13.  $f(x) = (x + 2x^3)^4$ ,  $a = -1$ .

14.  $h(t) = \frac{2t - 3t^2}{1 + t^3}$ ,  $a = 1$ .

15–16 Use a definição da continuidade e propriedades de limites para mostrar que a função é contínua no intervalo dado.

15.  $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 2}$ ,  $(2, \infty)$ .

16.  $g(x) = 2\sqrt{3 - x}$ ,  $(-\infty, 3]$ .

17–22 Explique por que a função é descontínua no número dado  $a$ . Esboce o gráfico da função.

17.  $f(x) = \frac{1}{x + 2}$   $a = -2$

18.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x + 2} & \text{se } x \neq -2 \\ 1 & \text{se } x = -2 \end{cases}$   $a = -2$

19.  $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$   $a = 0$

20.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$   $a = 1$

21.  $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$   $a = 0$

$$22. f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases} \quad a = 3$$

23-24 Como você “removeria a descontinuidade” de  $f$ ? Em outras palavras, como você definiria  $f(2)$  no intuito de fazer  $f$  contínua em 2?

$$23. f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} \quad 24. f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$$

25-32 Explique, usando os Teoremas 4, 5, 7 e 9, por que a função é contínua em todo o número em seu domínio. Diga qual é o domínio.

$$25. F(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 6} \quad 26. G(x) = \sqrt[3]{x}(1 + x^3)$$

$$27. R(x) = x^2 + \sqrt{2x - 1} \quad 28. h(x) = \frac{\text{sen } x}{x + 1}$$

$$29. A(t) = \arcsen(1 + 2t) \quad 30. B(x) = \frac{\text{tg } x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$31. M(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \quad 32. N(r) = \text{tg}^{-1}(1 + e^{-r^2})$$

33-34 Localize as descontinuidades da função e ilustre com um gráfico.

$$33. y = \frac{1}{1 + e^{1/x}} \quad 34. y = \ln(\text{tg}^2 x)$$

35-38 Use a continuidade para calcular o limite.

$$35. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5} + x} \quad 36. \lim_{x \rightarrow \pi} \text{sen}(x + \text{sen } x)$$

$$37. \lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2 - x} \quad 38. \lim_{x \rightarrow 2} \arctg\left(\frac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}\right)$$

39-40 Mostre que  $f$  é contínua em  $(-\infty, \infty)$ .

$$39. f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$40. f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{se } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{se } x \geq \pi/4 \end{cases}$$

41-43 Encontre os pontos nos quais  $f$  é descontínua. Em quais desses pontos  $f$  é contínua à direita, à esquerda ou em nenhum deles? Esboce o gráfico de  $f$ .

$$41. f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$$42. f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 1/x & \text{se } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

$$43. f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

44. A força gravitacional exercida pela Terra sobre uma unidade de massa a uma distância  $r$  do centro do planeta é

$$F(r) = \begin{cases} \frac{GMr}{R^3} & \text{se } r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

onde  $M$  é a massa da Terra;  $R$  é seu raio; e  $G$  é a constante gravitacional.  $F$  é uma função contínua de  $r$ ?

45. Para quais valores da constante  $c$  a função  $f$  é contínua em  $(-\infty, \infty)$ ?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{se } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

46. Encontre os valores de  $a$  e  $b$  que tornam  $f$  contínua em toda parte.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

47. Quais das seguintes funções  $f$  têm uma descontinuidade removível em  $a$ ? Se a descontinuidade for removível, encontre uma função  $g$  que seja igual a  $f$  para  $x \neq a$  e seja contínua em  $a$ .

(a)  $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$

(b)  $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \quad a = 2$

(c)  $f(x) = \llbracket \text{sen } x \rrbracket, \quad a = \pi$

48. Suponha que uma função  $f$  seja contínua em  $[0, 1]$ , exceto em  $0,25$ , e que  $f(0) = 1$  e  $f(1) = 3$ . Seja  $N = 2$ . Esboce dois gráficos possíveis de  $f$ , um indicando que  $f$  pode não satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário e outro mostrando que  $f$  poderia ainda satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário (mesmo que não satisfaça as hipóteses).

49. Se  $f(x) = x^2 + 10 \text{sen } x$ , mostre que existe um número  $c$  tal que  $f(c) = 1.000$ .

50. Suponha  $f$  contínua em  $[1, 5]$  e que as únicas soluções da equação  $f(x) = 6$  sejam  $x = 1$  e  $x = 4$ . Se  $f(2) = 8$ , explique por que  $f(3) > 6$ .

51-54 Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

51.  $x^4 + x - 3 = 0, \quad (1, 2) \quad 52. \sqrt[3]{x} = 1 - x, \quad (0, 1)$

53.  $e^x = 3 - 2x, \quad (0, 1) \quad 54. \text{sen } x = x^2 - x, \quad (1, 2)$

55-56 (a) Demonstre que a equação tem pelo menos uma raiz real. (b) Use sua calculadora para encontrar um intervalo de comprimento  $0,01$  que contenha uma raiz.

55.  $\cos x = x^3 \quad 56. \ln x = 3 - 2x$

57-58 (a) Demonstre que a equação tem pelo menos uma raiz real. (b) Use sua ferramenta gráfica para encontrar a raiz correta até a terceira casa decimal.

57.  $100e^{-x/100} = 0,01x^2 \quad 58. \arctg x = 1 - x$

59. Demonstre que  $f$  é contínua em  $a$  se, e somente se,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a).$$

60. Para demonstrar que seno é contínuo, precisamos mostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} \text{sen } x = \text{sen } a$  para todo número real  $a$ . Pelo Exercício 59, uma afirmação equivalente é que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{sen}(a + h) = \text{sen } a.$$

Use [6] para mostrar que isso é verdadeiro.

61. Demonstre que o cosseno é uma função contínua.

62. (a) Demonstre a parte 3 do Teorema 4.  
(b) Demonstre a parte 5 do Teorema 4.

63. Para que valores de  $x$  a função  $f$  é contínua?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

64. Para que valores de  $x$  a função  $g$  é contínua?

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ x & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

65. Existe um número que é exatamente uma unidade a mais do que seu cubo?

66. Se  $a$  e  $b$  são números positivos, prove que a equação

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

possui no mínimo uma solução no intervalo  $(-1, 1)$ .

67. Demonstre que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \text{sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em  $(-\infty, \infty)$ .

68. (a) Mostre que a função valor absoluto  $F(x) = |x|$  é contínua em toda parte.

(b) Demonstre que se  $f$  for uma função contínua em um intervalo, então também o é  $|f|$ .

(c) A recíproca da afirmação da parte (b) também é verdadeira? Em outras palavras, se  $|f|$  for contínua, segue que  $f$  também o é? Se for assim, demonstre isso. Caso contrário, encontre um contraexemplo.

69. Um monge tibetano deixa o monastério às 7 horas da manhã e segue sua caminhada usual para o topo da montanha, chegando lá às 7 horas da noite. Na manhã seguinte, ele parte do topo às 7 horas da manhã, pega o mesmo caminho de volta e chega ao monastério às 7 horas da noite. Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe um ponto no caminho que o monge vai cruzar exatamente na mesma hora do dia em ambas as caminhadas.

## 2.6 Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais

Nas Seções 2.2 e 2.4, estudamos os limites infinitos e as assíntotas verticais. Lá tomávamos  $x$  tendendo a um número e, como resultado, os valores de  $y$  ficavam arbitrariamente grandes (positivos ou negativos). Nesta seção vamos tornar  $x$  arbitrariamente grande (positivo ou negativo) e ver o que acontece com  $y$ .

Vamos começar pela análise do comportamento da função  $f$  definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

quando  $x$  aumenta. A tabela ao lado fornece os valores dessa função, com precisão de seis casas decimais, e o gráfico de  $f$  feito por um computador está na Figura 1.

$x$	$f(x)$
0	-1
±1	0
±2	0,600000
±3	0,800000
±4	0,882353
±5	0,923077
±10	0,980198
±50	0,999200
±100	0,999800
±1000	0,999998

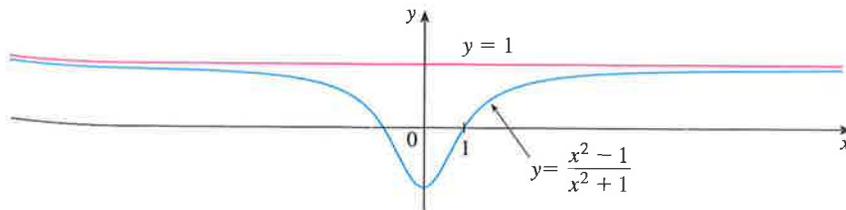


FIGURA 1

Quanto maior o  $x$ , mais próximos de 1 ficam os valores de  $f(x)$ . De fato, temos a impressão de que podemos tornar os valores de  $f(x)$  tão próximos de 1 quanto quisermos se tornarmos um  $x$  suficientemente grande. Essa situação é expressa simbolicamente escrevendo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Em geral, usamos a notação

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$