UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: ESPELHO OU PINTURA?

CRISTINA DALVA VAN BERGHEM MOTTA

SÃO PAULO – SP
2006

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: ESPELHO OU PINTURA?

CRISTINA DALVA VAN BERGHEM MOTTA

Dissertação apresentada à Faculdade de Educação da USP, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Educação
Linha de Pesquisa: Ensino de Ciências e Matemática
Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Brolezzi

SÃO PAULO – SP
2006

RESUMO

Esta pesquisa exploratória, de revisão bibliográfica, busca apresentar fundamentações teóricas para diversas abordagens com as quais se têm integrado a História da Matemática no ensino da Matemática. Para isso, consultamos os estudos críticos que investigam a filiação teórica de algumas perspectivas de participação da História da Matemática em Educação Matemática, entre os quais destacamos a referência Miguel & Miorim (2004). Com base nas referências teóricas de Comte, Piaget & Garcia, Bachelard e Vigotsky, procuramos as concepções de aprendizagem que as diferentes abordagens englobam, as justificativas que usam para o recurso à História, a presença (ou não) do caráter internalista, determinista e indutivista da História da Matemática, a consideração (ou não) das relações de poder envolvidas na construção do conhecimento matemático e a defesa (ou não) de um paralelismo entre a construção histórica e a construção pessoal dos conhecimentos matemáticos. Também apresentamos ligações entre a Etnomatemática e abordagens históricas da Matemática no ensino. A seguir, procuramos mostrar a importância da visão epistemológica do professor sobre a Matemática, a História da Matemática e a educação para um trabalho que integre a História na Educação Matemática. Feito isso, terminaremos por expor nossas considerações a respeito da pertinência de optarmos por abordagens não lineares da História da Matemática no ensino básico. Nosso estudo mostrou-nos um amplo campo para pesquisas na História na Educação Matemática em relação aos conhecimentos históricos na formação inicial e continuada de professores, à produção de material de apoio, ao intercâmbio de experiências e a um programa de ação pedagógica mais amplo para a integração da História da Matemática em sala de aula.

Unitermos: história da matemática, educação matemática, formação do professor, ensino da matemática, história da educação matemática, positivismo.

Linha de Pesquisa: Ensino de Ciências e Matemática

Banca Examinadora: Orientador: Antonio Carlos Brolezzi

Examinadores: Circe Mary Silva da Silva, Vinício de Macedo Santos

Ao bebê em gestação no ventre de Layane

e aos netos e netas que ainda estão por vir.

Agradecimentos:

Ao meu amado esposo Robson, companheiro da minha vida, por estar ao meu lado em todos os momentos;

Aos meus filhos Flávio, Daniel e André, razões do meu viver, pela compreensão com minhas ausências, pelo apoio e pelo incentivo, e às minhas noras, por dividirem conosco a nova rotina criada com o mestrado;

Aos meus pais Karel e Cecília, pelo grande amor que sempre me dedicaram. Em especial, agradeço a meu pai, um autodidata, por dar a toda a família um exemplo de amor aos estudos;

Aos meus irmãos Karel, Henrique, Rugero, Eduardo, Jonas, Ana e Paula e também aos meus cunhados e cunhadas, Rubens, Rosely, Simone, Rosana, Ana Paula e Jean, pelo estímulo, pela consideração e pelo carinho;

À minha sogra Beatriz, à tia Nena e ao tio Apolo, por terem me ajudado em todas as situações possíveis;

À minha amiga Vera Lúcia Mota Dias, por ser a amiga da minha vida;

Ao meu orientador Prof. Dr. Antonio Carlos Brolezzi, pela amizade, pela paciência, pela presença sempre calma, confiante e alegre e, principalmente, por ter me permitido partilhar de momentos maravilhosos com sua família: Viviane, minha amiga que está esperando um novo bebê e Alice, uma bonequinha linda e cheia de vida;

Aos meus professores no mestrado: Prof. Dr. Nílson J. Machado, Prof. Dr. Vinício de Macedo Santos e Profa. Dra. Nilce da Silva, pelo acolhimento, pela amizade e por ampliarem nossa compreensão da educação;

Aos professores da banca de qualificação: Profa. Dra. Circe Mary Silva da Silva e Prof. Dr. Vinício de Macedo Santos, pela orientação precisa e atenciosa que deram ao nosso trabalho;

Aos amigos da EMEF "Pref. José Carlos de Figueiredo Ferraz", que me acolheram com tanto carinho e simpatia. Em especial, agradeço à nossa diretora, Leila, por todo apoio oferecido para que eu pudesse participar das atividades acadêmicas relacionadas ao mestrado;

Aos amigos da EMEF "Pe. Antonio Vieira" que torceram por mim;

E a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para que esse trabalho fosse concretizado.

SUMÁRIO

Introdução

As últimas três décadas têm assistido a um amplo debate sobre diferentes análises da História da Matemática como fonte para auxiliar os processos de construção do conhecimento matemático pelos alunos. A criação do *International Study Group on the relations between the History and Pedagogy of Mathematics* (HPM)[1], em 1983, filiado ao *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI)[2], ampliou as condições para discussões internacionais a respeito da História na Educação Matemática, campo de investigação que pesquisa o valor da História da Matemática para educadores matemáticos, professores e alunos e que gerou um grande número de estudos sobre como a História da Matemática pode ser usada como um recurso pedagógico, sobre sua efetividade nos currículos e sobre os benefícios que pode trazer para a instrução matemática em geral.

Os pontos de vista e as experiências sobre o trabalho em sala de aula que integre a História da Matemática em Educação Matemática são muito variados e dependem da escolha epistemológica feita pelo professor. A seleção, a apresentação e a interpretação dos dados históricos decorrem da visão que cada sujeito tem da História, dos valores que estão presentes em sua análise da cultura e da sociedade e de suas concepções a respeito de como o indivíduo elabora seu conhecimento da Matemática.

No Brasil, encontramos no trabalho de Miguel & Miorim (2004) um estudo aprofundado sobre História na Educação Matemática, ao qual creditamos grande parte de nossas premissas para esta pesquisa. Estes autores investigam as ligações que as diferentes perspectivas de abordagem da História da Matemática em sala de aula têm com o "princípio genético", uma adaptação à pedagogia da lei biogenética que afirma que "a ontogênese recapitula a filogênese". O "princípio genético" enxerga uma identidade nos processos históricos e individuais de desenvolvimento de um conceito e e está associado a uma visão especular da História da Matemática..

[1] *Grupo Internacional de Estudo sobre as relações entre História e Pedagogia da Matemática*

[2] *Comissão Internacional de Instrução Matemática*

Miguel & Miorim (2004) categorizam as diferentes perspectivas teóricas no campo de investigação História na Educação Matemática em: perspectiva evolucionista linear, perspectiva estrutural-construtivista operatória, perspectiva evolutiva descontínua, perspectiva sociocultural e perspectiva dos jogos de vozes e ecos. A perspectiva evolucionista linear defende o recapitulacionismo de cunho biológico, que vê no desenvolvimento psíquico da criança, ou seja, na ontogênese, uma repetição abreviada da evolução filogenética e recorre à História para identificar a ordem cronológica em que os tópicos matemáticos surgiram e que deverão ser recapitulados no ensino. Foi um princípio norteador para o ensino da matemática amplamente adotado e serviu como justificativa para o "uso" da História da Matemática em Educação Matemática pelos positivistas e por Félix Klein, entre outros.

A perspectiva estrutural-construtivista operatória é caracterizada a partir dos estudos de Piaget & Garcia (1987) e defende uma forma invariante de atuação dos mecanismos cognitivos, operatórios e gerais de passagem tanto na filogênese quanto na ontogênese. Para Miguel & Miorim (2004), apesar de Piaget e Garcia negarem seguir o "princípio genético", tal similaridade de construção do pensamento matemático em termos pessoais e históricos seria uma defesa do argumento recapitulacionista. Com esta concepção, esta perspectiva recorre à História da Matemática como fonte para a busca de conflitos cognitivos que permitam a passagem de uma etapa da construção do pensamento matemático para outra.

Do mesmo modo, para Miguel & Miorim (2004), a perspectiva evolutiva descontínua, baseada na noção de obstáculo epistemológico de Bachelard que foi importada para a Educação Matemática por Brousseau (1983), também defende o argumento recapitulacionista. Ao buscar na História da Matemática obstáculos epistemológicos que se manifestem tanto na filogênese quanto na psicogênese, de certa forma esta perspectiva também se apóia no "princípio genético" para montar as situações-problema que permitiriam aos alunos superar as dificuldades da construção de um conceito. Assim, a História permitiria identificar os obstáculos epistemológicos constitutivos de um conhecimento matemático e construir situações-problema para superá-los. Estas três perspectivas representariam em nosso trabalho a imagem da História da Matemática como um espelho.

As outras perspectivas descritas por Miguel & Miorim (2004) abordam a História da Matemática de uma forma mais contextualizada, procurando identificar os elementos externos que interferem na construção dos conhecimentos matemáticos. Baseada nas idéias de Vigotski, a perspectiva sociocultural enxerga o conhecimento matemático como resultante da negociação social de significados e a História da Matemática como uma fonte de experiências humanas que podem ser trabalhadas nas atividades didáticas em matemática, através de um diálogo com as práticas atuais e o contexto da época da produção do conceito. Também usando o referencial teórico vigotskiano, a perspectiva dos jogos de vozes e ecos usa os construtos teóricos do discurso de Bakthtin e Wittgenstein para buscar na História da Matemática contradições entre as vozes históricas produzidas na sistematização do discurso teórico da matemática e as vozes dos estudantes, para propiciar que as características do conhecimento científico normalmente não trabalhadas na escola, como intuição, concepções que ferem o senso comum, diferentes formas de organização do discurso matemático, etc., sejam discutidas e apropriadas pelos estudantes. Em oposição ao defendido pelo "princípio genético", estas abordagens da História da Matemática em sala de aula têm buscado retratar as feições próprias do conhecimento matemático, dependentes dos matizes sócio-culturais que influenciaram os diferentes períodos históricos. Além disto, também questionam o papel das interações entre um aluno e os outros e entre aluno e professor, desconsideradas nas abordagens anteriores, que encaram o acesso ao conhecimento como uma tarefa individual. Desse modo, tais perspectivas desenham um novo quadro da História da Matemática, procuram novos olhares para retratá-la com as características próprias dos diferentes contextos culturais em que se achava inserida e montam um quadro que acentua os diferentes aspectos a serem contemplados. Neste sentido, procuraremos apontar algumas aproximações entre o programa da etnomatemática e as abordagens em sala de aula de uma visão sócio-cultural da História da Matemática. Assim, incluindo também o enfoque histórico da etnomatemática, em nosso trabalho encaramos estas perspectivas como "pinturas".

Desse modo, agruparemos as diferentes perspectivas que analisam a História da Matemática em dois grupos: as que adotam um ponto de vista internalista e indutivista e que apresentam a Matemática como uma ciência pronta e acabada e aquelas que adotam uma visão externalista e sócio-cultural e buscam compreender o conhecimento matemático como uma manifestação significativa das diversas culturas.

Em nosso trabalho, assumiremos as visões internalistas e externalistas da Matemática de acordo com Zúñiga (1990, p. 424). O internalismo enfatiza os elementos teóricos da ciência: a racionalidade e a lógica e assume também que a gênese e a validação dos conhecimentos não estão influenciadas por fatores externos, sendo que seu estudo é de competência da história e da filosofia das idéias. Desse modo, a sociologia e a psicologia passam a ter muito pouco a ver com o desenvolvimento da ciência. O externalismo assume a posição oposta: seu interesse se dirige à estrutura ou organização da ciência, enfatizando os fatores psico-sociais, políticos, orgânico-administrativos, etc., geralmente em detrimento de elementos lógico-dedutivos da ciência. Entre as temáticas típicas destas linhas estão ciência e tecnologia, responsabilidade social da ciência, política científica, governo e ciência etc.

Gostaríamos de salientar que outros estudos sobre diferentes abordagens da História da Matemática em sala de aula têm categorizações diferentes da nossa. Waldegg (1997, 44-45), por exemplo, sugere que a ligação entre a História da Matemática e a Psicologia da Matemática seja assegurada pela epistemologia. Para ela, as questões que podem ser postas à História da Matemática são essencialmente epistemológicas, porque são provenientes de situações de apreensão de conceitos e de construção de saberes. Assim, como a história revela o desenvolvimento dos conceitos matemáticos contidos nos programas acadêmicos, o problema metodológico que se apresenta ao professor é: qual gênero de história se irá trabalhar? A história enquanto anedota, que apresenta os aspectos humanos da construção dos conceitos e busca, principalmente, motivar os alunos? Ou a história que nos permite interrogar a propósito das condições da construção de um saber, da transformação das noções e da evolução os objetos matemáticos? Waldegg apresenta, então, quatro diferentes perspectivas para a abordagem da História da Matemática em sala de aula que mostram o papel da epistemologia no projeto didático: a dos obstáculos epistemológicos, a dos mecanismos de passagem, a da transposição didática e a do estatuto dos objetos matemáticos.

Algumas das hipóteses dessas abordagens se assemelham àquelas que trataremos em nosso trabalho. Com relação aos obstáculos epistemológicos, elas se referem à identificação na História dos mesmos obstáculos encontrados pelos estudantes de hoje na construção de um conceito. A abordagem dos mecanismos de passagem vê na história e no desenvolvimento individual uma analogia de etapas a serem percorridas para a construção de um conceito. A abordagem pela transposição didática busca na história das ligações entre os conhecimentos formais e escolares novas maneiras de compreender as diferenças entre as concepções do ensino e a prática da matemática. Por último, Waldegg apresenta a existência de pesquisas que tentam ligar a construção de certas categorias teóricas ao curso da história e dentro da evolução do pensamento científico dos alunos e que questionam o hábito dos professores de introduzir os aspectos estruturais dos conceitos matemáticos antes dos aspectos operacionais, seguindo uma marcha contrária à da História.

Furinghetti (2005), por sua vez, distingue dois temas básicos: a história para refletir sobre a natureza da matemática como um processo sócio-cultural e a história para construir objetos matemáticos. A escolha de um destes quadros teóricos determinaria o tipo de trabalho feito em sala de aula: o primeiro se refere à idéia de "humanizar a matemática" no trabalho em sala de aula e o segundo aos problemas relacionados com o ensino/aprendizagem da Matemática. Furinghetti (2005) explica que a expressão "humanizar a Matemática" não tem um sentido muito claro, apesar de ser normalmente citada como um dos motivos para o uso da história no ensino de Matemática. A autora atribui essa dificuldade ao fato dessa expressão envolver questões matemáticas e filosóficas. O ponto crucial da discussão filosófica é a existência ou não dos objetos matemáticos. Para os que pensam ser a matemática pura independente das atividades humanas, a resposta é problemática, enquanto para os que vêem a Matemática como parte da atividade humana, a história exerce um papel afirmativo. Entretanto, a autora verificou em suas pesquisas com professores e estudantes de matemática que "humanizar a Matemática" é muitas vezes associado com a utilização de anedotas, estórias e vinhetas, relacionadas a fatores afetivos que intervêm nos processos de ensino e aprendizagem e justificadas com base nos sentimentos pessoais de satisfação dos professores com os resultados obtidos.

Para Miguel & Miorim (2004), o campo de pesquisa de História na Educação Matemática inclui todos os estudos sobre a presença da História da Matemática na formação inicial e continuada de professores; na formação matemática de estudantes de todos os níveis, nos livros de Matemática em geral; nos programas e propostas curriculares oficiais de ensino da Matemática e na investigação em Educação Matemática. Neste sentido, a preocupação principal dos autores gira em torno de uma melhora qualitativa nas práticas escolares que envolvem a Matemática, por meio de "*abordagens históricas significativas, orgânicas e esclarecedoras da cultura matemática*". (p.12).

No presente trabalho discutiremos algumas perspectivas de abordagem da História da Matemática e apresentaremos nosso direcionamento para a importância da consideração dos aspectos sociais e culturais na produção, aceitação e difusão dos conceitos matemáticos. No capítulo 1, iremos tratar da influência positivista para a adoção do recurso pedagógico da História da Matemática, principalmente em relação a sua antecipação em relação ao "princípio genético", com o estabelecimento da "lei dos três estados" de Comte. A seguir, faremos uma breve discussão sobre a abordagem da História da Ciência por Piaget e Garcia e sobre a importância da noção de obstáculo epistemológico criada por Bachelard e ampliada por Brousseau como justificativa para a integração da História da Matemática em sala de aula. Também procuraremos apresentar algumas das críticas feitas a estas abordagens, principalmente pelo seu caráter internalista e indutivista. No Capítulo 2 apresentaremos algumas abordagens sócio-culturais e buscaremos as aproximações entre a etnomatemática e um trabalho em sala de aula que contemple a diversidade cultural e os conhecimentos prévios dos alunos. Nesses dois primeiros capítulos, separados de acordo com a visão internalista, em que a História da Matemática é tratada como uma imagem especular e a visão externalista, em que a História da Matemática é tratada como uma pintura, delineada pelos contextos sociais e culturais da época, construiremos as bases para nossa apresentação, no capítulo 3, dos múltiplos olhares que podemos ter para buscar a integração da História da Matemática em Educação Matemática: o papel do professor, a História da Matemática na formação de professores, as possibilidades de atribuição de significado ao texto matemático pela História da Matemática, a constituição de histórias problematizadoras sobre a gênese dos conceitos na formação de professores e no ensino, as estratégias didáticas para integração de fontes originais na sala de aula de matemática e as relações entre a escola e o conhecimento matemático. Na conclusão, reiteraremos nossas considerações a respeito da importância de se considerar os fatores externos da produção, aceitação e transmissão dos conhecimentos matemáticos na integração da História da Matemática em Educação Matemática.

Retrato

Cecília Meireles

Eu não tinha este rosto de hoje,

Assim tão calmo, assim triste, assim magro, *Nem estes olhos tão vazios,*

Nem o lábio amargo.

Eu não tinha estas mãos sem força,

Tão paradas e firas e mortas;

Eu não tinha este coração

Que nem se mostra.

Eu não dei por esta mudança,

Tão simples, tão certa, tão fácil:

- Em que espelho ficou perdida

A minha face?

Capítulo 1

A História da Matemática como um Espelho

Neste capítulo, trabalharemos as diversas abordagens teóricas da História da Matemática em sala de aula que traduzem uma imagem especular do desenvolvimento de um conceito nos planos históricos e individuais. Inicialmente apresentaremos a orientação positivista para a abordagem histórica da Matemática como forma de manter uma visão conjunta do progresso desta ciência e de apresentar os conceitos em um grau crescente de complexidade, conforme foram se desenvolvendo na evolução da humanidade. Essa orientação exerceu grande influência no ensino da Matemática, principalmente por colaborar na concepção da Matemática como um corpo cumulativo de conhecimentos seqüenciais e ordenados hierarquicamente, que se reflete até hoje na elaboração dos programas de ensino.

O pressuposto fundamental do positivismo é o de que a sociedade humana é regulada por leis naturais, invariáveis, independentes da vontade e da ação humanas. Em decorrência disto aplica-se a mesma metodologia para o estudo das ciências naturais e das ciências sociais. Essas características da filosofia positivista que Comte apresentava em seus cursos na França do século XIX agradaram a nova burguesia do período do Império em nosso país, por possibilitarem a conciliação entre ordem e progresso. Entre os engenheiros e os docentes de Matemática das instituições militares brasileiras encontravam-se ex-alunos de Comte, que ao retornarem ao Brasil se tornaram os primeiros divulgadores do positivismo e adotaram o modelo de racionalidade técnica por ele defendido (Silva, 199, p. 216).

Comte afirma em sua “lei dos três estados” que o estado positivo é alcançado quando o homem renuncia conhecer as causas e a natureza íntima das coisas e explica as relações entre as coisas e os acontecimentos pela formulação de leis. Também com a “lei dos três estados”, Comte reconhece uma similaridade de etapas na evolução de um conceito no plano individual e no plano da história da ciência. Cria, assim, uma visão internalista e indutivista da história da ciência e estabelece uma subordinação determinista do presente em relação ao passado: a História seria um espelho do que se passou, factual e ligada ao acontecimento em si.

Também podemos perceber a influência dessa visão especular da História da Matemática nas concepções de Piaget & Garcia – na obra “Psicogênese e História das Ciências” - e na ampliação feita por Brousseau da noção de “obstáculo epistemológico” de Bachelard. Para Piaget & Garcia, a analogia entre a filogênese e a ontogênese estaria na identidade dos modos de produção de conhecimento matemático: a reconstrução pessoal de um conhecimento recapitularia as mesmas etapas percorridas na construção histórica. A noção de “obstáculo epistemológico”, criada por Bachelard e importada por Brousseau para a didática da Matemática, propiciou uma nova abordagem da História da Matemática, por meio da busca de situações problema que permitissem o aparecimento dos mesmos obstáculos encontrados pelos matemáticos na História, a serem superados pelos alunos de hoje da mesma forma que o foram no passado. Entretanto, apesar de apontar para a ruptura e a descontinuidade e negar a evolução linear da ciência pregada pelo positivismo, a noção de "obstáculo epistemológico" continuou de certa forma servindo para se fazer o paralelismo entre a ontogênese e a filogênese, ao apresentar o pressuposto de que os mesmos obstáculos epistemológicos apresentados na produção histórica de um conceito seriam encontrados na prática educacional. Além disto, também não apresenta a influência do meio sócio-cultural na produção, aceitação e difusão das idéias matemáticas, ou seja, apresenta um caráter internalista da História da Matemática. Dessa forma, apesar desses teóricos negarem defender o argumento recapitulacionista, essas perspectivas mostram um paralelismo do caráter evolutivo das idéias matemáticas que nos leva a afirmar que, embora defendam a descontinuidade e rupturas no processo de construção do conhecimento, de certa forma ainda seguem o "princípio genético".

1.1 - A presença do positivismo no Brasil

Segundo Silva (1999), podemos diferenciar duas fases no desenvolvimento da história do positivismo: o pré-positivismo, ou positivismo do século XVIII, e o positivismo de Comte, no início do século XIX, que se refletem de maneiras diferentes no ensino de Matemática no Brasil.

O pré-positivismo, ou positivismo do século XVIII, originou-se na França e na Inglaterra. Era caracterizado pela aversão à religião e à metafísica, pelo empirismo e pela busca de simplicidade, clareza, representações exatas e precisas e uniformidade na metodologia de estudo de todas as ciências.

Para Silva (1999), durante o período colonial e no início do Império a influência marcante no Brasil é a do pré-positivismo propagado em Portugal por um pedagogo, Luís Antonio Verney (1713-1792) e por um político, o Marquês de Pombal (1699-1782). A reforma educacional que eles orientaram nesse país foi ampla e atingiu principalmente a Universidade de Coimbra, com a criação de uma Faculdade de Matemática e da profissão de matemático em 1772. Na França as escolas especializadas seriam criadas após 1793 e na Alemanha em 1863, o que mostra a importância da reforma pombalina. A Matemática tornou-se disciplina obrigatória em todos os cursos da Universidade de Coimbra, orientada para uma aquisição de conhecimentos que favorecesse o fortalecimento da sociedade mercantilista da época.

Com a mesma concepção, funda-se a Academia Militar do Rio de Janeiro, em 1810, de caráter utilitarista e cientificista, tendo a Matemática como disciplina principal e voltada para as ciências experimentais, que se tornaria mais tarde uma fonte de difusão do positivismo de Comte no Brasil.

Auguste Comte (1798-1857) foi um filósofo francês de formação politécnica, escritor e professor de Matemática, que havia sido secretário de Henri de Saint-Simon (1760-1825), um autor que, além de positivista, foi um dos fundadores do socialismo. Uma das principais obras de Comte é o "Curso de Filosofia Positiva", em seis volumes, publicados entre 1830 e 1842. Em sua Filosofia Positiva, Comte aplica às ciências sociais os métodos racionais utilizados na Matemática para extrair as leis que regem o desenvolvimento da sociedade, atribuindo um papel social à ciência. Assim, o positivismo busca classificar todos os fenômenos por meio de um reduzido número de leis naturais e invariáveis, sendo que o estudo dos fenômenos deve começar dos mais gerais ou mais simples e a partir deles conseguir a ordenação nas ciências, até alcançar os mais complicados ou particulares.

Para Triviños (1987, p. 38-39), a filosofia positiva é uma reflexão sobre as ciências, uma história da explicação racional da natureza que começa pela matemática e evolui até a sociologia, a ciência criada por Comte para investigar com objetividade as leis do desenvolvimento da sociedade e que apresenta como finalidade da inteligência humana a descoberta das leis naturais invariáveis de todos os fenômenos. O positivismo somente aceita como realidade fatos que possam ser observados, transformados em leis que forneçam o conhecimento objetivo dos dados e que permitam a previsão de novos fatos, criando a dimensão da neutralidade da ciência: o sábio investiga desinteressado das conseqüências práticas, tendo como propósito somente exprimir a realidade. Também afirma que há uma unidade metodológica de investigação, tanto para os fenômenos da natureza como para os fenômenos sociais, o que provoca uma distinção muito clara entre valores, que por não serem quantificáveis não podem se constituir em um conhecimento científico e fatos, que são o objeto da ciência.

A Matemática, na ordenação das ciências criada por Comte, é o ponto de partida da educação científica, a primeira ciência a atingir o estado positivo por possuir leis com aplicação universal e ser a mais simples e geral de todas as ciências. Ao mesmo tempo, o método experimental-matemático é o único aceito pela pesquisa positivista, pela expectativa de garantir a neutralidade e a objetividade do conhecimento, o rigor do conhecimento e a racionalidade técnica. O positivismo de Comte prega uma educação científica que seja a base para o desenvolvimento das ciências especializadas, com a finalidade de se garantir a previsão das necessidades humanas e a equivalência entre ciência e progresso, tendo como único valor o conhecimento objetivo.

Como conseqüência, a ciência é vista como uma atividade governada por regras metodológicas que possibilitam a previsão dos fatos pela lógica indutiva e a conseqüente capacidade de superar os períodos de instabilidade no desenvolvimento da ciência, ou seja, o positivismo constitui-se através da racionalidade técnica.

As principais características da filosofia positivista são:

"1. O estudo da ciência positiva fornece-nos o único meio racional de pôr em evidência as leis lógicas do espírito;

2. a filosofia positiva deve conduzir a uma transformação do nosso sistema de educação;

3. o ensino científico pode ser considerado como a base da educação geral, verdadeiramente racional;

4. a filosofia positiva pode ser considerada como a única base sólida da reorganização da sociedade" (Silva, 1999, p.39).

Com tais características, o positivismo francês de Comte começa a exercer sua influência no Brasil logo após o início do Império e encontra uma grande adesão entre os docentes de Matemática e engenheiros da Academia Militar do Rio de Janeiro, se espalhando então para o restante do país:

> "*Muitos historiadores consideram a influência do positivismo no Brasil como um fenômeno único e afirmam inclusive que a Matemática desempenhou um papel essencial na introdução e divulgação do positivismo no país. O motivo disso é que houve no Brasil uma instituição que desempenhou um papel decisivo para isso – a*

> *Escola Militar do Rio de Janeiro. Lá, a ideologia positivista encontrou uma forte sustentação e pôde, então, atingir a vida social, política, pedagógica e ideológica brasileira. Os docentes de Matemática desempenharam um papel muito importante na propagação das idéias positivistas. Nessa escola, a Matemática era, inclusive, a disciplina principal. Durante um período de mais de cem anos (1810-1920), a Academia Militar do Rio de Janeiro (e todas as suas ramificações: Escola Central, Escola Militar, Escola Politécnica, Escolas preparatórias) foi praticamente a única instituição onde os brasileiros poderiam adquirir conhecimentos matemáticos sistemáticos de nível superior e obter um diploma de bacharel e doutorado em ciências físicas e Matemáticas."* (Silva, 1999, p. 13).

Segundo Silva (1999), uma das prováveis razões para o grande sucesso dessa filosofia entre os meios acadêmicos militares é que não havia no país uma tradição em pesquisa científica e o modelo da ciência construída como uma prática técnica estava de acordo com as aspirações dos alunos e docentes. Além disso, o positivismo encontrou em nosso país condições propícias à sua difusão, em um momento político de afirmação de uma nova burguesia formada por intelectuais, médicos, engenheiros e militares que lutava contra a monarquia, a influência do clero e o caráter feudal dos latifúndios e que via no positivismo fundamentado na ciência a base de uma política racional que reconciliasse a ordem e o progresso.

Em Pires (1998, p. 121) encontramos a observação de que a discussão do positivismo foi aglutinada em torno do campo de atuação das diversas Escolas: em São Paulo a predominância das discussões se deu em torno das questões do Direito; na Bahia, das ciências médicas e em diversos estados do nordeste da literatura. Essa autora também observa (p. 131-132) que a difusão dos ideais positivistas no Brasil ocorreu não pela sua adoção pela maioria da população brasileira ou pela maioria da intelectualidade, mas sim pelo fato de que figuras proeminentes como Benjamin Constant Botelho de Magalhães, no exército e Júlio de Castilhos, na política, serem positivistas. Assim, indivíduos isolados que atuaram nos diversos setores da vida brasileira, principalmente no início do período republicano, foram os responsáveis pela difusão das idéias de Comte. Especificamente na passagem Império-República, verifica-se a decisiva influência do positivismo nas mudanças políticas e sociais que buscavam a construção de uma nova ordem, como as campanhas a favor da abolição da escravatura e pró-republicanas. Através da atuação de Benjamin Constant no Governo

Provisório, os positivistas participaram ativamente da organização do novo regime, contribuindo na introdução do estudo das ciências e na revisão filosófica que procurava romper com a tradição das humanidades clássicas na educação.

As reformas educacionais com orientação positivista desta época buscaram contemplar os currículos com a organização dos conhecimentos preconizada por Comte em sua hierarquização das ciências.

1.1.1 - A "Lei dos Três Estados" e a hierarquização das ciências no positivismo de Comte

Para Comte, o progresso do conhecimento humano se realizaria por meio de três estados: o estado teológico, no qual o homem explica as coisas e os acontecimentos através de seres ou forças sobrenaturais; o estado metafísico, quando há o recurso a entidades abstratas e idéias que expliquem os fatos; e o estado positivo, quando o homem explica as relações entre as coisas e os acontecimentos pela formulação de leis, renunciando conhecer as causas e a natureza íntima das coisas. A sucessão dos três estados se daria em termos individuais, em que o homem seria teólogo na infância, metafísico na juventude e físico na virilidade, e em termos da História das Ciências, sendo que a Matemática teria sido a primeira ciência a se libertar do pensamento teológico e metafísico para se tornar positiva.

A lei dos três estados é o fundamento da filosofia positiva: ao mesmo tempo em que é uma teoria do conhecimento é também uma filosofia da história (Marías, 1970, p. 340,341). O espírito positivo comtiano é relativo: nossas idéias dependem da situação histórica em que vivemos, então o estudo dos fenômenos nunca será absoluto, e sim relativo às condições de nossa existência em termos individuais e sociais. A ordem da sociedade é permanente, por seguir a invariável ordem natural, enquanto que o indivíduo encontra-se submetido à consciência coletiva, ou seja, o sujeito das ciências humanas torna-se um objeto semelhante ao das ciências da natureza, o indivíduo tem pouca possibilidade de intervenção nos fatos sociais. O fim máximo do saber seria alcançar a previsão racional de nossas necessidades e criar a continuidade histórica e o equilíbrio social necessários para o lema político de Comte de "*ordem e progresso*". Ao aplicar a lei dos três estados na interpretação da realidade histórica, o filósofo associa o estado positivo à época industrial e fundamenta a ordem social no poder mental e social da Humanidade, que seria a principal protagonista da História.

Comte organizou os conhecimentos de modo sistemático e hierárquico, sem se preocupar com a explicação e interpretação dos fenômenos, tidas como contrárias ao espírito positivo, por serem metafísicas ou teológicas. O pensamento de Comte parte do objetivo para o subjetivo, tentando a conciliação destes diferentes métodos. O estudo da filosofia positivista deveria ser feito de acordo com a seguinte ordenação: Matemática, Astronomia, Física, Química, Fisiologia e Física Social. Desse modo, a Matemática seria o ponto de partida da educação científica, pois os conhecimentos matemáticos traduzem o universo dentro de suas relações inteligíveis que podem ser verificadas em termos humanos e sociais, subordinando a matemática ao humano (Pires, 1998, p.16).

Comte considerava a Matemática e a Sociologia as ciências mais importantes: a Matemática pelo caráter universal de aplicação das leis geométricas e mecânicas e a Sociologia por tratar das indagações que conduzem à evolução histórica da humanidade (Silva, 1999, p.56).

Além disso, Comte atribuía um duplo caráter à Matemática: poderia ser vista como uma ciência natural, como uma física, ou como uma lógica, um método, servindo como base para a Filosofia Positiva, a partir do que ele a subdivide em Matemática abstrata e Matemática concreta (Silva, 1999, p.43).

A hierarquia das ciências tem para Comte um sentido histórico e dogmático, científico e lógico: obedece à ordem em que as ciências foram aparecendo e, principalmente, à ordem em que foram atingindo o estado positivo. Além disso, as ciências estavam ordenadas em complexidade crescente e segundo sua independência, cada uma necessitando das anteriores e sendo necessária às seguintes. Também foram agrupadas de acordo com suas afinidades: Matemática e Astronomia, Física e Química e, finalmente, as ciências da vida: Biologia e Sociologia, as últimas a sair do estado teológico-metafísico (Marías, 1970, p.342).

A filosofia positiva seria um modo para se pensar a sociedade como um todo e a hierarquia das ciências uma forma de determinar a educação científica:

> "*A propriedade mais interessante dessa lei enciclopédica, segundo Comte, reside no fato de que é ela que determina o verdadeiro plano de uma educação*

científica, inteiramente racional. É somente através da observância dessa ordem hierárquica que se consegue atingir uma verdadeira educação integral. Embora o método seja essencialmente o mesmo em toda a ciência, cada ciência desenvolve processos característicos, de tal maneira que só se adquire o verdadeiro método positivo quando se estuda cada uma das ciências fundamentais segundo a ordem enciclopédica" (Silva, 1999, p. 44).

A preocupação de Comte de apresentar os conhecimentos de forma enciclopédica está ligada à preocupação com uma educação geral, opondo-se à especialização causada pela divisão social do trabalho. O principal papel da ciência seria o de assegurar a consolidação da ordem para garantir o progresso da sociedade industrial. Assim, a ciência adquire a forma de um saber acabado e o estado positivo considerado como última fase da evolução do conhecimento.

1.1.2 - A influência do positivismo na educação brasileira

Como vimos, a filosofia positiva tem um caráter pedagógico muito grande, pois além de procurar reorganizar a sociedade através do estudo da ciência positiva também busca no ensino científico o suporte para que as ciências especializadas se desenvolvam. Deste modo, a área da educação foi, sem dúvida, a que mais recebeu a influência do positivismo. Seus seguidores pregavam a liberdade de ensino, provavelmente como uma forma de reação ao tipo de educação jesuítica predominante na época. Com isso, ao mesmo tempo em que as escolas particulares confessionais exerciam uma ação contrária ao positivismo, conseguiram graças à atuação positivista a abertura do mercado brasileiro. São as escolas livres, como as de Direito e a Politécnica e as escolas e academias militares que se destacam pela formação de grande número de positivistas brasileiros. Deste modo, a criação de escolas técnicas esteve associada a uma orientação positivista, que via no ensino científico a base de uma educação racional, enquanto as instituições religiosas dedicaram-se a uma educação humanística (Tambara, 2005, p. 170).

Ainda segundo Tambara (2005, p.173), além da ação pessoal de alguns positivistas nos diversos estabelecimentos de ensino, com destaque para a Escola Politécnica, Colégio

Pedro II, Escola Militar do Rio de Janeiro, Colégio Militar, Escola Naval do Rio de Janeiro, Escola de Medicina, Escola Livre de Direito do Rio de Janeiro e Instituto Lafayete, encontramos a influência do positivismo também nas reformas de ensino elaboradas por Benjamin Constant, em 1890, e pelo Ministro Rivadávia Correia, em 1911.

A Reforma Benjamin Constant rompeu com a tradição humanista clássica e a substitui pela científica, de acordo com a ordenação positivista de Comte (Matemática, Astronomia, Física, Química, Biologia, Sociologia e Moral). Entretanto, não foram eliminadas as disciplinas tradicionais, Latim e Grego, apenas se acrescentou ao currículo anterior o estudo das disciplinas científicas, tornando o ensino secundário ainda mais enciclopédico. Os princípios orientadores da Reforma foram a liberdade e a laicidade do ensino e a gratuidade da escola primária. Além disso, pretendia tornar o ensino secundário formador e não apenas destinado à preparação ao ensino superior (Miorim, 1998, p. 88).

Nesta reforma, Benjamin Constant atinge todos os níveis de ensino, com especial destaque na estruturação do ensino secundário de acordo com a hierarquia das ciências preconizada por Comte, o que alterou significativamente o currículo do Colégio Pedro II e da Escola Normal (Silva, 1999, p. 251,252).

Paralelamente, ocorre o alastramento do positivismo nos livros-textos de Matemática:

> "*Onde se percebe mais intensamente a força das idéias positivistas no ensino da Matemática é sem dúvida nos livros-textos, que se multiplicaram, principalmente depois da difusão realizada por Benjamin Constant.*
>
> *As concepções matemáticas de Benjamin Constant, Oliveira e Bittencourt e Roberto Trompowsky de Almeida refletem exemplarmente a influência de Comte sobre o ensino da Matemática no Brasil. Benjamin Constant tornou o livro de Geometria Analítica de Comte conhecido dentro das escolas militares, introduzindo-o em substituição ao livro-texto de Lacroix, até então um dos autores franceses preferidos pelos docentes brasileiros. Alguns estudantes da Escola Politécnica do Rio de Janeiro traduziram parte do livro de Geometria Analítica de Comte para a língua portuguesa, o que mostra o quanto esse livro era usado na escola*" (Silva, 1999, p. 253).

Assim, podemos perceber a presença das idéias de Comte nos livros de Raimundo Teixeira Mendes, que, entre outros livros, em 1877 já recomendava em seu livro *Elementos de*

Geometria Synthetica uma reforma no ensino secundário que abrangesse as seis ciências positivas; Roberto Trompowsky Leitão de Almeida, com várias obras positivistas escritas para o ensino; Samuel de Oliveira e Liberato Bittencourt, que foram alunos de Trompowsky e usaram suas aulas e as idéias de Comte para publicar um livro-texto de Geometria Analítica em 1892; Licínio Athanasio Cardoso, que foi um fervoroso defensor da idéias positivistas e escreveu várias obras, usadas também para servir de guia aos seus alunos da Escola Politécnica, entre outros autores positivistas dos séculos XIX e XX. Além disso, também encontramos a defesa das idéias positivistas no ensino da matemática em artigos de vários periódicos, como na Revista da Escola Politécnica (1897-1901); na Revista Polytechnica, fundada pelo grêmio de alunos da Escola Politécnica de São Paulo em 1904; na Revista Brasileira de Matemática, que surgiu em 1929; na Revista Mensal, periódico da Sociedade Científica e Literária Culto às Letras, fundada por alunos da Escola Militar de Porto Alegre em 1880; entre outros (Silva, 1999, p. 253-275).

No Rio Grande do Sul, com a liderança ideológica de Júlio de Castilhos e de Assis Brasil, gaúchos oriundos das Escolas Militares e de Engenharia do Rio de Janeiro e da Faculdade de Direito de São Paulo difundiram as idéias positivistas, o que possibilitou a organização da Escola de Engenharia, em 1896. Como autores de livros didáticos com orientação positivista deste estado, temos Luiz Celestino de Castro, coronel-engenheiro, que escreveu *Lições de Arithmetica,* em 1883, como livro texto para suas aulas na Escola Militar e Demétrio Nunes Ribeiro, engenheiro que se formou na Escola Politécnica do Rio de Janeiro e que trabalhou como professor e diretor da Escola Normal de Porto Alegre, tendo publicado dois livros didáticos *Curso Elementar de Arithmética*, a primeira parte em 1881 e a segunda em 1882 e deixado dois outros livros manuscritos (Silva, 1999, p. 278-298).

Entretanto, encontramos em Valente (1999, p.164), a afirmação de que a inclusão de elementos comteanos nos livros de matemática foi pouco significativa para a matemática escolar:

> "*Nem programas de ensino, nem pontos para exames preparatórios da época se importaram com as discussões de âmbito filosófico sobre as matemáticas. Os pontos e conteúdos a ensinar já estavam dados desde Ottoni. Não se estabeleceram uma reestruturação e reorganização das matemáticas a ponto de ter existido uma 'matemática escolar positivista'. Ou, o que seria mais preciso dizer, uma matemática elementar nos moldes preconizados por Comte.*"

De acordo com Silva, (1999, p. 302-308), a adesão ao positivismo nunca foi generalizada. Na Escola Politécnica do Rio de Janeiro, por exemplo, em 1882, o então diretor, Inácio da Cunha Galvão, negou a Miguel Lemos a autorização para que este ministrasse um curso sobre Filosofia Positiva. Na câmara dos deputados, foram várias as manifestações contra a propaganda positivista, principalmente com relação à defesa da religião católica, adotada oficialmente no país naquela época. Ao mesmo tempo, Comte escreveu sua obra *Filosofia Positiva* em 1830 e a Matemática a que ele se referia era a do século XVIII e início do século XIX. Assim, quando Otto de Alencar Silva (1874-1912) inicia a publicação de seus trabalhos de pesquisa Matemática no Brasil, no final do século XIX, os novos conceitos e teorias da Matemática passam a ser divulgados e uma nova geração de matemáticos passa a refutar as idéias de Comte, procurando expulsá-las do ensino. Apesar deste enfraquecimento do positivismo, vários docentes de Matemática ainda continuaram a citar Comte em seus livros-textos publicados para o ensino.

O declínio da influência positivista no ensino brasileiro de matemática se daria a partir da Reforma Francisco Campos (1931), que aceitou integralmente a proposta de reformulação do currículo de matemática apresentada pela Congregação do Colégio Pedro II, em 1928. A Reforma Francisco Campos estabelece a união das disciplinas matemáticas englobadas sob o título de Matemática e busca compatibilizar a modernização dos conteúdos e métodos do ensino secundário com todos os pontos da proposta de Euclides Roxo, adotando como idéia central do ensino a noção de função, que deveria fazer a conexão entre os tratamentos algébricos, aritméticos e geométricos dos conceitos. Na elaboração desta proposta, baseada no Movimento Internacional para a Modernização do Ensino de Matemática, destaca-se a figura de Euclides Roxo, diretor do Colégio Pedro II e seguidor das idéias que Félix Klein defendia através da Comissão Internacional de Ensino de Matemática (Miorim, 1998, p. 91,92).

Entretanto, o ideário positivista ainda se manteve presente nas medidas governamentais no início da República e na década de 1970, quando houve a tentativa de implantação da escola tecnicista (Aranha, 1996, p. 140). Por exprimir a confiança do homem no conhecimento científico, o positivismo conduz a uma visão de mundo coerente com a visão tecnicista de *planejar, organizar, dirigir e controlar* que foi introduzida no Brasil durante a ditadura militar e que prejudicou, sobretudo, as escolas públicas, por submeter o plano pedagógico ao administrativo e "*transformar o professor em mero executor de tarefas organizadas pelo setor de planejamento*" (Aranha, 1996, p. 184).

Outro aspecto da influência do positivismo que ainda pode ser notado em Educação Matemática é o que se refere à adoção do recurso pedagógico da História da Matemática dentro de um enfoque recapitulacionista da evolução dos conceitos, conforme mostraremos a seguir.

1.1.3 - A orientação positivista para a adoção da História da Matemática como recurso pedagógico

O recurso à História aparece nos livros didáticos brasileiros de Matemática do final do século XIX e começo do XX. Era manifestado pela apresentação de métodos produzidos historicamente ou de observações sobre temas e personagens da história da matemática e sofreu forte influência positivista, ao mesmo tempo em que utilizavam uma versão do "princípio genético" para o ensino da Matemática:

> *"A influência do positivismo no Brasil, particularmente entre finais do século XIX e começos do XX, seria uma fator decisivo e reforçador de várias formas de participação da história em livros didáticos e propostas oficiais brasileiras."* (Miguel & Miorim, 2004, p.38).

Como uma extensão da lei dos três estados, Comte postula uma similaridade entre o modo de investigar e explicar os fenômenos naturais e sociais pelo indivíduo em sua história pessoal e o modo como a humanidade o faz na História, de maneira semelhante ao que seria defendido mais tarde pelos defensores do "princípio genético" (Miguel & Miorim, 2004, p. 73-74).

O "princípio recapitulacionista" tem origem em uma lei biogenética defendida por Ernst Haeckel (1834-1919), que faz a seguinte afirmação: "a ontogenia recapitula a filogenia", ou seja, o desenvolvimento do embrião humano retraça os estágios pelos quais seus ancestrais adultos haviam passado. Em pedagogia, tal princípio é identificado como "princípio genético" e é ligado à idéia de que o aluno percorre em seu aprendizado as mesmas etapas historicamente percorridas para a construção de um conceito, tendo servido de justificativa para aplicações didáticas da História da Matemática, dentro de um enfoque recapitulacionista da evolução dos conceitos, que estabelece uma subordinação determinista do presente em relação ao passado (Miguel & Miorim, 2004, p. 73 e p. 75).

Para Comte, ao expor a ciência pelo caminho histórico teríamos condições de refazer a ciência por meio do estudo sucessivo e em ordem cronológica da constituição dos diversos sistemas de idéias, sem a exigência de conhecimentos prévios e mantendo uma visão conjunta do progresso da ciência. Tal orientação foi seguida de diferentes maneiras pelos autores positivistas, com a inserção de textos históricos nas notas de rodapé (como no *Curso Elementar de Matemática: Álgebra,* de 1902, de Aarão Reis) e a tradução, em 1892, da geometria de Clairaut, livro recomendado por Comte em sua Biblioteca Positivista (Miguel & Miorim, 2004, p. 38-39).

Ainda de acordo com Miguel & Miorim (2004, 33), a obra *Elements de géométrie*, de Aléxis Claude Clairaut, de 1741, foi adotada por Comte, que considerava a geometria uma ciência natural baseada na observação, pela sua apresentação de métodos produzidos historicamente. Segundo Miorim (1998, p.46-48), a geometria de Clairaut contraria as preocupações com o rigor e o formalismo características dos estudos geométricos através dos *Elementos,* de Euclides, e procura facilitar o aprendizado da geometria com a introdução de aplicações práticas, por meio do fio condutor da história, através do tema das medidas de terras. O livro escrito por Clairaut segue um encadeamento lógico das proposições, manifestando pela primeira vez uma preocupação com a "eficiência psicológica" das demonstrações e tornando-se uma referência para uma pedagogia psicológica da Matemática. Para muitos autores, Clairaut foi o primeiro autor a considerar o "princípio genético" em Matemática (Miguel e Miorim, 2004, p.40).

Como conseqüência da concepção de produção do conhecimento no plano psicogenético, a Matemática passa a ser vista como um corpo cumulativo de conhecimentos seqüenciais e ordenados hierarquicamente, e a adoção do recurso à história baseada na ordem cronológica da constituição dos conteúdos a serem ensinados (Miguel & Miorim, 2004, p. 81).

Além das repercussões na perspectiva de adoção da História da Matemática, a visão evolucionista da construção do conhecimento matemático exerceu uma grande influência na elaboração de programas de ensino de Matemática, através da estruturação de uma seqüência pedagógica que deveria acompanhar as etapas cronológicas que a Matemática teria passado na história. Como exemplo, encontramos a citação de Miguel & Miorim (2004, p.84) do capítulo introdutório do livro *A Matemática: seu conteúdo, métodos e significados,* escrita pelos matemáticos russos Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev e outros, que afirmavam ser objeto de ensino da escola primária os resultados básicos da aritmética e da geometria; da escola secundária a matemática elementar; do ensino superior que não se dedique exclusivamente às Humanidades, os fundamentos da análise, a teoria das equações diferenciais e a álgebra superior e, finalmente, a atribuição do estudo das idéias e resultados da matemática atual aos departamentos universitários de Matemática e Física.

Vários matemáticos se apresentaram partidários do uso do princípio genético, como Henri Poincaré (1854-1912) e Félix Klein (1849-1925) e concebiam a Matemática como uma acumulação linear e hierárquica de conhecimentos que deveriam ser recapitulados na escola nos processos de ensino-aprendizagem. Klein, ao defender que o ensino da Matemática deveria ser feito do mesmo modo que a humanidade desenvolveu o conhecimento matemático, do mais simples ao mais abstrato e elevado. Poincaré ao atribuir à história a função de levar os estudantes a percorrerem os caminhos da construção do rigor matemático (Miguel & Miorim, 2004, p. 82).

1.1.4 - As idéias de Félix Klein para o ensino de Matemática: reafirmando o "princípio genético"

Com a expansão da indústria, o crescimento da agricultura e a ampliação dos centros urbanos ocorridos no início do século XX, a educação ganha maior importância e novas universidades são criadas. Em 1908, na realização do Quarto Congresso Internacional de Matemática, em Roma, é aprovada a proposta de criação de uma Comissão Internacional de Ensino de Matemática, que, a partir de 1954 passou a ser conhecida como ICMI – International Comission on Mathematical Instruction, a ser presidida por Félix Klein (Miorim, 1998, p. 72). Os trabalhos desenvolvidos pela Comissão avolumam-se rapidamente, desencadeando uma enorme quantidade de publicações e de discussões sobre Educação Matemática.

Félix Klein (1849-1925), além de ter sido um dos mais importantes matemáticos de sua época, ensinou durante meio século, escreveu um livro sobre História da Matemática do Século XIX [1] e preocupava-se com o ensino da Matemática:

> "*Desde* Monge *não existira professor tão influente, pois além de dar aulas entusiasmantes, Klein se preocupava com o ensino da matemática em muitos níveis e exerceu forte influência em círculos pedagógicos. Em 1886 ele se tornou professor de matemática em Göttingen, e sob sua liderança a universidade tornou-se a Meca a que estudantes de muitos países acorriam"* (Boyer, 1994, p. 401-402).

Preocupado com a formação de professores, ele critica as universidades pelo excessivo cientificismo e propõe uma unificação da Matemática, que era dividida em álgebra, geometria, trigonometria e aritmética através do conceito de função (Ferreira, 2003, p. 9). Em seu livro "*Matemática elementar a partir de um ponto de vista superior*", dividido em dois volumes, Klein apresenta logo na introdução suas preocupações com a descontinuidade entre o ensino superior e a escola primária e secundária e a necessidade de se realçar o "*enlace mútuo dos problemas e questões das diferentes disciplinas*" e "*suas relações com os problemas do ensino de matemática elementar*", afirmando:

> "*Com isto, confio facilitar muito a vocês a obtenção do que propriamente constitui o objetivo de seus estudos matemáticos acadêmicos, que eu enunciaria assim: que das grandes questões científicas que serão oferecidas a nossa consideração, possam obter estímulos e orientações abundantes para o exercício da própria atividade docente"* (Klein, s/d, p. 2, tradução nossa).

[1] *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (1926-1927). (Boyer, 1974, p. 401).

Para Klein, a apresentação da Matemática na escola deveria ser psicológica e não sistemática. Assim, o professor precisaria conhecer o grau de compreensão de seus alunos e ligar a Matemática ao que a eles interessa e que tenha uso prático. Ao mesmo tempo, Klein propõe que o conceito de função seja colocado no centro do ensino, por ter este conceito um papel fundamental em todos os campos que se utilizam da Matemática e por permitir a familiarização do aluno com o emprego dos métodos gráficos.

Durante toda a apresentação do livro, Klein menciona o desenvolvimento histórico dos conceitos abordados e o papel destes conceitos no ensino. Após o Capítulo IV do volume I, ele apresenta um estudo sobre o desenvolvimento moderno e a construção da Matemática, identificando dois processos diferentes:

> " **...** *no processo A a base é uma concepção particularista da ciência, que trata de decompor todo o campo da mesma em uma série de regiões bem delimitadas, em cada uma das quais se opera evitando todo o possível acessar recursos que se possam obter das regiões próximas, seu ideal é o de* uma bela e lógica cristalização de cada uma destas regiões em um corpo de doutrina isolado.
>
> *Contrariamente a isto, atribui o partidário do processo B importância capital a uma ligação orgânica das diferentes regiões da ciência e aos numerosos recursos que mutuamente se prestam umas e outras, e prefere, segundo isso, os métodos que lhe permitem abarcar, a partir de um ponto de vista único, a compreensão simultânea de várias regiões. Seu ideal é* a concepção de toda a ciência matemática como um todo*"* (Klein, s/d, p. 114, v. 1, tradução nossa, grifos do autor).

Ao lado e dentro dessas duas concepções, Klein coloca o processo formal de cálculo – o algoritmo, como o processo C, reafirmando a "*força impulsiva interna das fórmulas"* no desenvolvimento da Matemática. Para ele, no começo do cálculo infinitesimal o algoritmo originou novos conceitos e operações. Desprezar o método algorítmico como simples desenvolvimento formal seria ignorar as lições da história.

Ao fazer um estudo do desenvolvimento histórico da Matemática, Klein afirma que a atuação alternativa e muitas vezes simultânea destes dois processos fez surgir nos dois últimos séculos os maiores progressos registrados pela matemática. Entretanto, Klein critica o ensino secundário de sua época, que a seu ver privilegia o processo A e propõe que se amplie o processo B nas reformas de ensino:

> *"No ensino secundário, infelizmente, tem predominado há muito tempo a direção A. Todo movimento de reforma que se possa considerar saudável deve dar uma abertura mais ampla ao sistema B. Com isso quero expressar a conveniência de que o* espírito que encarna o processo genético *vá se incorporando ao ensino***,** *de que se acentue com mais relevância a intuição espacial como tal e, especialmente, que*

surja antecipadamente o conceito de função com a fusão dos conceitos espaço e número" (Klein, s/, p. 123, v. 2, tradução nossa, grifos do autor).

A seguir, Klein apresenta a Álgebra, com o objetivo declarado de aplicar os métodos geométricos intuitivos à resolução de equações e a Análise, com o desenvolvimento histórico das teorias e o trabalho com as funções:

> *"Antes de entrar plenamente no assunto, devemos advertir que não se pode pretender dentro do quadro dessas lições apresentar uma exposição sistemática da Álgebra; antes, pelo contrário, nosso propósito é tratar somente de uma parte especial da mesma, a nosso entender pouco apreciada, mas que é de fundamental importância pela relação íntima que mantém com o ensino da matemática na escola. Todas as minhas explicações girarão em torno deste ponto, a saber*: a aplicação dos métodos gráficos e em geral dos métodos geometricamente intuitivos à resolução das equações*"* (Klein, s/d, p.124-125, tradução nossa, grifos do autor).

Na terceira parte do volume I, Klein apresenta a Análise, de maneira semelhante ao modo como tratou a Aritmética e a Álgebra, considerando como mais importante no conteúdo a ser estudado as funções transcendentes elementares: a exponencial, a logarítmica e as trigonométricas. Ao mesmo tempo, o autor faz considerações históricas e pedagógicas sobre os assuntos estudados. Ao encerrar a apresentação do primeiro volume, Klein afirma que os aspirantes ao magistério secundário precisam conhecer o desenvolvimento histórico, os conceitos intuitivos da Matemática e as relações entre os diversos ramos da Matemática entre eles mesmos e com as demais ciências para serem capazes de entender seus alunos na prática do ensino (Klein, s/d, p. 352, v.1).

No volume II, Klein apresenta a Geometria e continua insistindo nas questões referentes ao ensino e à intuição espacial. Ao final desse volume, acrescenta um apêndice intitulado "Sobre o Ensino da Geometria", com um marcante caráter histórico, tanto no que se refere ao desenvolvimento da própria Geometria, quanto à história do ensino de Geometria. Para ele, um bom livro texto de geometria deve obedecer às seguintes exigências: fazer uma abordagem do ponto de vista psicológico; selecionar as matérias mais importantes; colaborar com os fins da cultura humana; apresentar um panorama geral da Geometria, para que o próprio professor selecione as matérias que irá trabalhar; apresentar ligações entre a

Geometria e a Aritmética e apresentar a fusão da Planimetria e da Estereometria. Em especial, destacamos a defesa do ponto de vista psicológico para o ensino:

> "*O ensino não pode depender somente da matéria objeto do ensino, mas sobretudo do sujeito a quem se ensina. Uma mesma coisa deve ser apresentada de modo distinto a um garoto de seis anos e a um de dez e a este que a um homem maduro. No que se refere especialmente à Geometria, esta deve reduzir-se no ensino secundário* à intuição concreta*, e passar depois pouco a pouco aos* elementos lógicos*: de uma maneira geral pode dizer-se que* o método genético é o único apropriado, *porque permite ao aluno ir penetrando nas coisas sem esforço"* (Klein, s/d, v. 2, p 282, tradução nossa, grifos do autor).

A tais características do livro texto, seria preciso agregar a prática docente do professor que, para Klein, deveria dar importância didática à fusão dos diferentes ramos da matemática e à adequada seleção dos conteúdos a serem estudados. Assim, concordamos com Miguel& Miorim (2004, p. 82):

> *".....Klein não consegue escapar à avassaladora influência positivista de finais do século XIX, recorrendo explícita e convictamente ao princípio recapitulacionista para 'fundamentar' seu ponto de vista."*

Vemos então que, também para Klein, aprender matemática seria recapitular os tópicos matemáticos de acordo com o seu surgimento, reiterando o "princípio genético".

1.1.5 – Conseqüências do legado positivista para a educação

No pensamento positivo, a ciência torna-se a base da filosofia racional, envolvida no entendimento e controle da sociedade em direção à ordem e ao progresso: a razão substitui a religião como instrumento de leitura do mundo, da construção do conhecimento e da definição do destino humano. O positivismo, ao tentar reduzir tudo ao racional, cria um cientificismo que explica o progresso como resultado da evolução linear da humanidade em direção ao desenvolvimento das ciências. Dessa maneira, justifica todas as ações humanas pelo ideal do progresso e pelo poder da técnica, que garante a previsão e a ação. Por sua vez, a técnica é garantida pela presença de um especialista, que passa a comandar a prática dos homens. O ensino, em decorrência dessa visão racionalista, estrutura-se com a preocupação de manter a reprodução da sociedade e concebe o aluno como quem recebe, processa e devolve informações.

Para Gómez-Granell (2002, p.16), a epistemologia positivista criou uma concepção coerente com a racionalidade da filosofia e da ciência moderna ao considerar o pensamento e a lógica formal como padrões ideais e o conhecimento cotidiano como deficitário, intuitivo, particularista e concreto. Assim, o pensamento abstrato e científico, marcado pelas leis impessoais e naturais da ciência, é considerado o nível mais evoluído de conhecimento, resultado do progresso individual e coletivo, e seu desenvolvimento, tanto no plano ontogenético quanto no plano filogenético, implicaria o desaparecimento do conhecimento cotidiano. Desse modo, a visão de racionalidade positivista traz como conseqüência uma delimitação do raciocínio humano, que aplica o pensamento científico e o pensamento cotidiano em situações específicas e distintas, em diferentes tipos de atividades, sendo que em um mesmo indivíduo podemos perceber formas de pensamento cotidiano e de pensamento científico. Ao mesmo tempo, o conhecimento científico envolve uma necessidade de explicitação e de racionalização que ficou socialmente atribuída à escola, através da “transposição didática” dos conteúdos. Ocorre que o conhecimento escolar não é o conhecimento científico, como também não é o conhecimento cotidiano:

> *“O matemático não comunica seus resultados tal como os obteve, mas os reorganiza, lhes dá a forma mais geral possível; realiza uma ‘didática prática’ que consiste em dar ao saber uma forma comunicável, descontextualizada, despersonalizada, fora de um contexto temporal.*
>
> *O professor realiza primeiro o trabalho inverso ao do cientista, uma recontextualização do saber: procura situações que dêem sentido aos conhecimentos que devem ser ensinados. Porém, se a fase de personalização funcionou bem, quando o aluno respondeu às situações propostas não sabia que o que ‘produziu’ é um conhecimento que poderá utilizar em outras ocasiões. Para transformar suas respostas e seus conhecimentos em saber deverá, com a ajuda do professor, re-despersonalizar e re-descontextualizar o saber que produziu, para poder reconhecer*

no que fez algo que tenha caráter universal, um conhecimento cultural reutilizável" (Brousseau, 2001, 48).

Nesta mesma perspectiva, Gómez-Granell (2002, p. 16) acredita que a apresentação a-histórica das descobertas científicas seria responsável por eliminar a dialética dos processos criativos e colaborar para uma falsa imagem da neutralidade do conhecimento científico. O professor, ao buscar a recontextualização dos conhecimentos a serem apresentados aos alunos, deveria também procurar a gênese dos problemas que lhes deram origem.

Triadafillidis (1998, p. 22) também destaca o fato de que o círculo vicioso da "matematização" do mundo e da "matematização" da disciplina de Matemática tem resultado em uma identidade entre filosofia de vida e filosofia matemática: na filosofia ocidental, desde os tempos de Platão, mente e teoria são separados dos problemas e da prática. Desta maneira, a matemática adquire uma "hegemonia" sobre outros assuntos escolares que dificulta sua ligação com outros campos de conhecimento. Assim, ao se adicionar referências históricas sobre grandes matemáticos e seus feitos nos finais de capítulos ou em notas de rodapé, extraídas de seus contextos históricos, cria-se um subordinamento da história às necessidades do professor, enquanto seu potencial educacional é pouquíssimo explorado.

O positivismo reconhece apenas dois tipos de conhecimentos científicos: o empírico, encontrado nas ciências naturais, e o lógico, constituído pela lógica e pela matemática. Isto faz com que as ciências em seu conjunto sejam elaboradas por modelos matemáticos e estatísticos, dando um caráter fragmentário e disperso ao saber científico. Por outro lado, ao aceitar como realidade somente os fatos que possam ser estudados, o positivismo também apóia a tese de que os estados mentais podem ser analisados pela observação de suas manifestações no comportamento, diminuindo assim a importância dos fatores culturais. Desse modo, ao adotar o método experimental-matemático como o único que conduz ao conhecimento verdadeiro, o positivismo adquire um caráter conservador reducionista e legitimador da ordem estabelecida, por não considerar os valores, ideologias e visões sociais de mundo.

Além disso, a visão positivista de que o único conhecimento verdadeiro é o produzido pela ciência com a aplicação do método experimental-matemático obriga o pesquisador a estudar a realidade através de partes isoladas e fixas. Triviños (1987, p. 36) dá como exemplo os estudos sobre fracasso escolar que, ao invés de abordarem a dinâmica dos fatos, buscavam relações simples com fatos como anos de magistério dos professores, grau de formação profissional, nível sócio-econômico etc. Desse modo, a neutralidade do conhecimento positivo garantida pela objetividade do cientista ignora a influência dos fatores humanos na pesquisa e o princípio da verificação ao afirmar que só é verdadeiro o que pode ser empiricamente confirmável, acaba por limitar o conhecimento científico à experiência sensorial. Com isso, os valores culturais, as condições históricas e as diferentes condutas humanas são ignorados na unificação metodológica positivista para tratar a ciência natural e a ciência social.

Para Comte, toda a ciência poderia ser exposta pelo caminho histórico ou pelo caminho dogmático. Do primeiro modo, a didática se resume em fazer um estudo em ordem cronológica das obras originais que serviram para o progresso da ciência e do segundo modo, pela apresentação do sistema de idéias que permitiria ao indivíduo provido de conhecimentos suficientes refazer a ciência em seu conjunto.

A orientação positivista de se fazer a abordagem histórica das ciências é tão marcante que é considerada por Pires (1998, p. 269), em sua dissertação de mestrado sobre a geometria dos positivistas brasileiros, como o primeiro indício para o reconhecimento de uma obra positivista:

> "*Há uma dificuldade em se reconhecer uma obra positivista sem que seu autor assim se professe. Assim, retiradas as adesões confessadas, o calendário positivista que em algumas obras positivistas são datadas e os entremeios que citam Comte, como se pode reconhecer uma obra positivista de uma não positivista?*
>
> *É possível reconhecer. Dir-se-ia também que há um conjunto de indícios que permite tal reconhecimento. É interessante observar nos livros dos ortodoxos plenos, como eles são claros.*
>
> *Um dos indícios é o processo histórico. A obra de Comte e dos positivistas ortodoxos têm muito da história da geometria*."

A concepção comteana de que a filosofia positiva havia alcançado o estado definitivo da mente cria uma visão determinista da história, como se a evolução seguisse um único caminho possível em direção ao futuro. Para Comte, a racionalidade técnica persegue as leis invariáveis que regem os fenômenos e deste modo a ciência apresenta o modo como as situações devem ocorrer, adquirindo a capacidade de prever a evolução dos fatos. Deste modo, a abordagem da História apresenta uma hierarquização entre o passado e o presente, ou seja, defende que a elaboração científica dos conceitos tenha partido dos fenômenos mais simples e se tornado mais complexa em um processo contínuo de progresso da ciência. Outra crítica ao modo positivista de se enxergar o recurso à História da Matemática em Educação Matemática refere-se ao caráter indutivista dado à história dos conceitos científicos. Nessa concepção, a evolução da ciência seria uma seqüência cumulativa de etapas percorridas para alcançar o progresso em busca da verdade.

Entretanto, a visão determinista e indutivista da evolução do conhecimento humano em direção ao progresso social que caracteriza a filosofia positivista traz consigo uma leitura não-histórica da História da Matemática:

> *".....as narrativas são apresentadas com o pressuposto assumido de que os matemáticos do passado estavam essencialmente tratando com nossos modernos conceitos, e apenas não tinham nossa notação moderna a sua disposição. Ao ler a história deste modo, que podemos chamar de modo teleológico, o historiador parece assumir, com efeito, que havia um curso que os desenvolvimentos históricos teriam que tomar. Ao assumir isto, uma dimensão normativa é introduzida ao relato, através da qual o historiador dota outras culturas e matemáticos de outras épocas com racionalidades e conceitualizações que são completamente estranhas a eles*." (Radford, 2000, p. 144, tradução nossa).

Tal simplificação da construção histórica dos conceitos se reflete na adoção do "princípio genético" para justificar o paralelismo entre a ontogênese e a filogênese: não se considera o contexto sócio-cultural necessário para a produção, aceitação e veiculação dos conhecimentos e com isto, a História da Matemática é tratada de forma linear e factual, reforçando a idéia de neutralidade e objetividade da ciência.

A este respeito, Miguel (1997a, p. 150) elabora um discurso central para nossa discussão:

> *"Para se resumir em poucas palavras as contribuições dessa literatura esparsa produzida em nosso século relativas aos modos de se conceber a relação entre história e pedagogia da matemática, seria suficiente dizer que ela acumulou*

sobretudo um conjunto diversificado de argumentos reforçadores das potencialidades pedagógicas da história. Nesse sentido, o que esta literatura nos diz é que a história pode constituir-se em: fonte de motivação para o ensino-aprendizagem da matemática; fonte de objetivos e métodos para o ensino-aprendizagem; fonte de problemas práticos, curiosos e recreativos para serem tratados em sala de aula; instrumento de desmitificação da matemática; instrumento na formalização de conceitos; instrumento para a promoção de um pensamento independente e crítico; instrumento unificador dos vários campos da matemática; instrumento de promoção de atitudes e valores; instrumento de conscientização epistemológica; instrumento revelador da natureza da matemática; instrumento de promoção da aprendizagem significativa e compreensiva; instrumento que possibilita o resgate da identidade cultural.

Mas ainda que, para os positivistas do passado ou do presente, isso possa soar estranho ou paradoxal, não apenas faz sentido como também se constitui, no meu modo de entender, um dever perguntar-nos: que história pode isso tudo?

......Penso que uma mudança de atitude dessa natureza, que viesse a substituir a persistente crença positivista na possibilidade de se constituir o passado tal como ele foi de fato, por uma outra que afirmasse a possibilidade de, a cada momento, constituir o passado como ele poderia ter sido, poderia abrir de fato novas e mais promissoras perspectivas ao estudo das relações entre história e pedagogia da matemática."

Acreditamos que este modo internalista e indutivista de se abordar a História da Matemática em sala de aula não contribui para que os alunos entendam a Matemática como uma criação coletiva, que poderia ter seguido caminhos alternativos, ser tratada de diferentes maneiras em diferentes culturas e épocas. Desse modo, por reforçar a objetividade do conhecimento e a linearidade da evolução da ciência, a abordagem positivista restringiria uma investigação mais ampla e crítica dos temas em estudo, como as contradições encontradas no desenvolvimento da ciência, as crises dos modelos teóricos e as influências econômicas, sociais, políticas e culturais enfrentadas pelos cientistas.

1.2 - Piaget e a busca de conflitos cognitivos na História da Matemática

Jean Piaget (1896-1980), biólogo, psicólogo, pedagogo e filósofo suíço, também adotou o princípio genético em seus trabalhos e escreveu, juntamente com Rolando Garcia, o livro *Psicogênese e História das Ciências,* publicado em 1982, após o falecimento de Piaget. Nesse livro, os autores se posicionam contra uma recapitulação simplista da filogênese pela ontogênese e procuram investigar se os mecanismos de passagem de um período histórico da evolução do pensamento matemático-físico ao seguinte são análogos aos da passagem de um estado genético aos seus sucessores. Piaget & Garcia defendem a tese de que a construção do conhecimento se dá da mesma maneira nos planos psicogenéticos e filogenéticos, através de mecanismos que denominam *abstração reflexiva e generalização completiva.* Com tais mecanismos de passagem, o aprendiz adaptaria o saber constituído aos seus conhecimentos prévios para construir conhecimentos novos, usando os processos de assimilação, acomodação e equilibração para promover a passagem do nível intra-objetal, isto é, análise dos objetos, para o inter-objetal, ou seja, análise das relações ou transformações entre os objetos, e deste para o trans-objetal, semelhante à construção das estruturas.

Assim, para aprender Matemática o sujeito teria que reconstruir as mesmas operações cognitivas que marcaram a construção histórica dos objetos matemáticos, que abstraídos de suas situações concretas se tornariam exclusivamente objetos formais. O recurso à História da Matemática se apresentaria como uma opção para a busca de conflitos cognitivos que possibilitassem a passagem de uma etapa da construção do conhecimento para outra de nível superior. Desse modo, tanto na filogênese quanto na psicogênese, a construção do conhecimento matemático se daria por meio das etapas intra-operacionais, inter-operacionais e trans-operacionais:

> “*As etapas intra-operacionais caracterizam-se por ligações intra-operacionais que se apresentam sob formas isoláveis, comportando certamente, como o seu nome indica, articulações internas, mas não se compondo entre si e sem transformações de uma à outra que pressuponham a existências de invariantes.*

As etapas inter--operacionais são caracterizadas por correspondências e transformações entre as formas isoláveis da etapa anterior, ao que se acrescentam as invariantes exigidas por estas transformações.

As etapas trans-operacionais são caracterizadas pela construção de estruturas, cujas relações internas correspondem às transformações inter-operacionais

Esta surpreendente analogia das etapas do desenvolvimento (entre a geometria e a álgebra, por um lado, e entre a história da ciência e a psicogênenese, por outro) tem um significado profundo. Não se trata de uma simples classificação de etapas. Com efeito, as três noções (intra, inter e trans) constituem formas diferentes, mas solidárias de organização dos conhecimentos, e reconhecemos neles o mais importante e mais construtivo dos mecanismos que tivéssemos podido isolar na busca dos mecanismos comuns à história e à psicogênese" (Piaget & Garcia, 1987, p. 138).

Neste sentido, ao afirmarem que a construção individual do conhecimento se dá pela seleção, transformação, adaptação e incorporação de elementos fornecidos pelo meio externo, Piaget e Garcia rompem com a visão positivista de que o conhecimento é simplesmente cumulativo. Ao contrário, afirmam que a construção do conhecimento irá ocorrer por uma sucessão de etapas, sendo que em cada etapa acontece uma reorganização dos conhecimentos previamente adquiridos. Ao mesmo tempo, defendem que a sociedade pode modificar o modo como os objetos podem ser concebidos pelo sujeito, mas não os mecanismos para adquirir conhecimento:

"*Ao evoluir dos níveis pré-científicos para os níveis das ações é necessário não acreditar que seja preciso considerar unicamente o desenvolvimento do sujeito face aos objetos já 'dados', numa total independência do contexto social. Na interação dialética entre o sujeito e o objeto, este aparece imerso num sistema de relações.*

Depois de tudo o que dissemos, pode provocar surpresa encontrar, através de toda a história da ciência bem como através da psicogênese, a repetição de modelos semelhantes quando da aquisição do conhecimento a todos os níveis. Se a influência da sociedade é tão grande, como é possível que em todos os períodos da história da humanidade e em todas as crianças de qualquer grupo social e de qualquer país *encontremos em ação os mesmos processos cognitivos? A resposta não será difícil de encontrar uma vez que se tenham diferenciado os mecanismos de aquisição do conhecimento que, por um lado, um sujeito tem à sua disposição e, por outro lado, o modo como o objeto a assimilar é apresentado a um determinado sujeito. A sociedade pode modificar este último mas não o primeiro. O verdadeiro sentido atribuído ao objeto, no contexto das suas relações com outros objetos, pode depender, numa larga medida, do modo como a sociedade modifica as relações entre o objeto e o sujeito. Mas o modo como este sentido é adquirido depende dos mecanismos cognitivos e não daquilo com o que o grupo social pode contribuir*" (Piaget & Garcia, 1987, p. 244).

Ao interpretar o trabalho de Piaget & Garcia, Radford (2000, p. 145) aponta para um paradoxo: por um lado, o indivíduo é visto como quem seleciona, transforma, adapta e incorpora os elementos do mundo externo às suas próprias estruturas cognitivas; por outro lado, não há a possibilidade da assimilação dos objetos isolados de seu contexto, uma vez que os objetos sempre têm um significado social. A questão básica seria: dois contextos sociais diferentes poderiam originar dois desenvolvimentos psicogenéticos diferentes?

A solução encontrada por Piaget & Garcia foi colocar esse problema em termos de um "paradigma epistêmico". Os autores defendem que em cada sociedade e em cada momento histórico se constitui um quadro epistêmico que atua como uma ideologia condicionante do desenvolvimento posterior da ciência. Assim, acreditam que exista uma continuidade entre o pensamento científico e o pré-científico, pois os mecanismos do processo cognitivo são os mesmos, e uma descontinuidade, tanto na psicogênese quanto na ciência, por uma ruptura ligada a mudanças do quadro epistêmico. Afirmam, também, que suas interpretações possuem uma relação direta com a posição de Bachelard, que foi o primeiro a indicar a importância da "ruptura epistemológica" no desenvolvimento da ciência por meio da noção de "obstáculo epistemológico", distinguindo-se no ponto de vista de que para Bachelard existe uma ruptura total entre as concepções pré-científicas e as científicas, enquanto que para Piaget & Garcia somente nos momentos de crise e de revoluções científicas haveria uma ruptura e a constituição de um novo quadro epistêmico (Piaget & Garcia, 1987, p. 234).

Fica claro, então, que para Piaget & Garcia, a cultura não modifica os instrumentos de aquisição do conhecimento. Para esses autores, esses instrumentos fazem parte da esfera biológica do indivíduo e não dependem do meio histórico ou cultural (Radford, 2000, p. 146).

Em Miguel & Miorim, (2004, p. 94-95), encontramos uma visão geral das críticas feitas a este tipo de abordagem da História da Matemática: a crença na possibilidade de explicar a origem e a natureza do conhecimento matemático sem recorrer ao problema da validação das verdades matemáticas; a reconstrução histórica das ciências feita por Piaget e Garcia para responder a uma necessidade interna da epistemologia genética defendida por esses autores que não explica o porquê das descontinuidades no processo de produção e circulação das idéias e, principalmente: "*a crença na existência de um princípio trans-histórico regulador, legislador, disciplinador e direcionador da marcha supostamente evolutiva das idéias matemáticas*".

Desse modo, ao identificar as formas histórico-culturais com as etapas de desenvolvimento histórico dessa idéia, cria-se a mesma visão de evolução, previsibilidade, hierarquia e totalidade efetivada defendida pelos positivistas. Além disso, apesar de declarar não defender o argumento recapitulacionista, ao fazer a conexão entre a produção do conhecimento nos planos filogenéticos e ontogenéticos, Piaget está implicitamente adotando o "princípio genético" em seus trabalhos.

Sob esta perspectiva teórica, a produção cultural das idéias da Matemática é tratada de uma forma internalista e estruturada, desligada de qualquer contexto, da mesma forma que se desconsidera o condicionamento sócio-cultural no desenvolvimento cognitivo do indivíduo. Esta visão psicologizante também nega a importância das relações entre os sujeitos envolvidos nas relações de ensino-aprendizagem: o sujeito aluno e o sujeito professor, com seus papéis em torno de um saber.

1.3 - A epistemologia de Bachelard

A concepção positivista de constatação dos modelos e teorias científicos pelos dados objetivos e experimentais foi abalada com os novos modelos da micro-física e da teoria da relatividade do final do século XIX e início do século XX.

Nessa época, Gaston Bachelard (1884-1962) viveu como estudante, cientista, filósofo e professor. A partir das conclusões retiradas de sua vivência durante esse rico período da história da ciência, apresentou em seu livro *A formação do espírito científico*, de 1938, uma periodização da história das ciências que a divide em três estados: o estado concreto, o estado concreto-abstrato e o estado abstrato. O estado positivo de Comte seria correspondente ao estado concreto-abstrato de Bachelard, definido por este como o período em que aplicamos esquemas gerais aos fatos empíricos observados, partindo da experiência para a teoria que a explica. Para Bachelard, a filosofia positivista está ligada à ciência clássica, estando ultrapassada em relação às transformações que o saber científico sofreu. O estado abstrato afasta-se do empírico e busca na polemização da experiência esquemas racionais cada vez mais abstratos, que expressem o novo espírito científico de inventividade.

Na epistemologia de Bachelard, não basta descrever dados observados. Ao contrário, o objeto científico passa a ser o resultado de elaborações teóricas e empíricas. A evolução da ciência deixa de ocorrer pelo progresso contínuo e acumulativo previsto por Comte e passa a ocorrer através de um processo de ruptura e descontinuidade, em que a razão e seus princípios são variáveis e a ciência se torna efêmera pela dinâmica dos conhecimentos.

Para o filósofo, o conhecimento científico ocorre por meio da superação dos obstáculos epistemológicos, ou seja, obstáculos surgidos no ato de conhecer na forma de conflitos e lentidões que causam a estagnação e até a regressão no progresso da ciência: são conhecimentos antigos, que resistem às novas concepções para manter a estabilidade intelectual. Assim, Bachelard coloca em evidência a necessidade das rupturas que ocorrem no processo de construção da Ciência, sendo que um obstáculo de origem epistemológica é verdadeiramente constitutivo do conhecimento e pode ser encontrado na história do conceito.

Bachelard, antes de se dedicar à filosofia, havia sido professor de física e de química e propôs a idéia de “obstáculo epistemológico” também em termos da prática da educação. Assim, os professores deveriam derrubar os obstáculos já sedimentados pela vida cotidiana, cultura primeira, antes de fazer uma demonstração ou apresentar uma lição, que representam o conhecimento científico, cultura elaborada. Da mesma forma, deveriam entender o erro e a dificuldade de aceitação de um novo conceito como um pré-conhecimento do aluno sobre o assunto em questão, a ser superado através de uma problematização que intensifique os conflitos e propicie oportunidades de apreensão do conhecimento científico:

> “Assim, *toda cultura científica deve começar (...) por uma catarse intelectual e afetiva. Resta-nos, depois, a tarefa mais difícil: colocar a cultura científica em*

estado de mobilização permanente, substituir o saber fechado e estático por um conhecimento aberto e dinâmico, dialetizar todas as variáveis experimentais, dar, por último, à razão razões para evoluir" (Bachelard, s/d, p. 169).

Outra importante contribuição de Bachelard para a educação é a noção de *racionalismo aplicado*, que defende a complementaridade entre a razão e a experiência como dois pólos participantes do pensamento científico ao afirmar que toda análise teórica deve ser submetida ao crivo da experimentação e que toda experiência deve ser submetida a um controle racional. O racionalismo aplicado é uma referência importante para fundamentar a busca de conciliação entre as dimensões práticas e teóricas da didática (Pais, 2001, p.12).

Ainda de acordo com a noção de racionalismo aplicado, Bachelard apresentou uma posição ousada em relação à escrita da história das ciências, ao afirmar que ela não deveria ser factual e preocupada com o registro cronológico dos fatos. Ao contrário, a história das ciências deve ser crítica e emitir juízos de valor, submetida aos critérios de racionalidade próprios das teorias que são aceitas no presente. Desse modo, como a ciência é dinâmica e os valores da racionalidade se modificam, a história das ciências deve ser sempre refeita:

"*O ponto de vista moderno determina assim uma perspectiva nova sobre a história das ciências, perspectiva que coloca o problema da eficácia atual dessa história das ciências na cultura científica. Trata-se, com efeito, de mostrar a ação de uma história julgada, uma história que tem obrigação de distinguir o erro e a verdade, o inerte e o ativo, o prejudicial e o fecundo. De uma maneira geral, não se poderá afirmar que uma história compreendida já não é história pura? No domínio da história das ciências, é necessário, além de compreender, saber analisar, saber julgar.*

(….) Por outras palavras, o progresso é a própria dinâmica da cultura científica, e é essa dinâmica que a história das ciências deve descrever. Deve descrever julgando-a, valorizando-a, eliminando toda a possibilidade de um regresso a noções erradas. A história das ciências só pode insistir nos erros do passado a título de elemento de comparação. Reencontramos, assim, a dialética dos obstáculos epistemológicos e dos atos epistemológicos" (Bachelard, s/d, p. 205, 206).

A dinâmica da reconstrução das novas idéias é por sua vez o verdadeiro sentido do racionalismo aplicado, que trata a aquisição do conhecimento como um exercício constante de reflexão e diálogo, em um processo contínuo de retificação das idéias:

> "*Vê-se, então, a necessidade educativa de formular uma história recorrente, uma história que se esclarece pela finalidade do presente, uma história que parte das certezas do presente e descobre, no passado, as formações progressivas da verdade. É assim que o pensamento científico se fortalece na descrição dos seus progressos*" (Bachelard, s/d, p. 207).

Nesse sentido, Bachelard acredita que quanto mais o historiador das ciências conhecer a modernidade da ciência mais será capaz de perceber o desenrolar da história, as possibilidades mais sutis de historicidade iluminadas pelo presente. Especificamente em relação ao que chama de "desenvolvimento harmonioso da Matemática", esse autor acredita que o presente torna mais claras e mais bem coordenadas as verdades adotadas no passado (Bachelard, s/d, p. 209).

1.3.1 - A adoção do conceito de obstáculo epistemológico na didática da matemática

A noção de obstáculo epistemológico foi ampliada e introduzida na didática da Matemática por Guy Brousseau com a conferência "Os obstáculos epistemológicos e os problemas em Matemática", realizada no XXVIII encontro do CIEAEM em 1976 e publicada em 1983 no seu artigo de mesmo título. Em tal ampliação, ele caracteriza obstáculo epistemológico como um conhecimento utilizado pelo aluno para produzir respostas que se adaptam a certo contexto que o aluno encontra com freqüência, mas que usado fora desse contexto gera respostas incorretas. Como o aluno resiste às contradições produzidas pelo obstáculo epistemológico e ao estabelecimento de um conhecimento novo, é preciso identificar o obstáculo encontrado e incorporar a negação desse conhecimento anterior ao novo saber, sendo que mesmo depois de ter notado seu erro o aluno ainda pode manifestá-lo de forma esporádica (Brousseau, 1983, p. 175,176).

Para ajudar que os alunos superem tais obstáculos, Brousseau propõe o desenho de *situações didáticas* que façam os alunos perceberem a necessidade de mudarem suas concepções e possibilitem o desenvolvimento das competências e das habilidades associadas à Matemática. Na sua *Teoria das Situações Didáticas* são consideradas as relações criadas em uma situação didática entre o aluno, ou os alunos, o entorno e o professor por um problema estabelecido para a reconstrução de um conhecimento. Nesse sentido, a aprendizagem por adaptação ao meio implica rupturas cognitivas, acomodações e mudanças nos sistemas cognitivos, no uso da linguagem e nas concepções prévias. Apesar de adotar uma perspectiva piagetiana ao admitir a construção do conhecimento pela interação entre o sujeito e o objeto, a teoria da situação didática dá importância à gestão do professor da interação entre o subsistema aluno-saber e a situação-problema apresentada, o que acrescenta uma dimensão situacional ao processo de ensino-aprendizagem. A História da Matemática, nessa perspectiva, permitiria identificar os obstáculos epistemológicos superados na construção histórica de um conceito e os transformar em situações-problemas que permitissem a reconstrução do conhecimento matemático, ou seja, seria uma fonte de busca de problemas:

> "*A pesquisa dos indícios históricos correspondentes não é mais nesse caso aquela das dificuldades ou dos erros semelhantes do nosso ponto de vista de hoje, mas aquela dos fracassos característicos de um certo saber, em sua imersão dentro dos conhecimentos atuais, em poder prever o gênero de problemas que vão estar mal colocados ou mal resolvidos e chegar a busca dentro da história: a epistemologia tende a tornar-se sistemática e experimental. Os pontos de ruptura não são mais os das datas de descobertas mas das problemáticas e dos tipos de saber utilizados, que podem se reencontrar a partir de momentos diferentes dentro de domínios mais ou menos próximos"* (Brousseau, 1983, p. 191, 192).

Brousseau também descreveu as regras e as condições para o funcionamento escolar em sua concepção de *contrato didático.* Ao especificar formas de relacionamento específicas do contexto escolar, tal concepção reforça o distanciamento entre o mundo científico e o ensino formal, favorecendo a criação de atividades desvinculadas do cotidiano:

> "*Nas áreas das ciências naturais e da matemática, tal contrato sempre privilegiou as atividades mecânicas de resolução de exercícios padrões e memorização de conceitos e definições (...). Desvinculada do mundo cotidiano e por conseqüência também de qualquer realidade possível, o ensino científico foi aos*

poucos perdendo sua vitalidade até se transformar numa atividade essencialmente restrita à sala de aula e aos livros texto." (Pietrocola, 2005).

As transformações necessárias para adaptar o saber científico ao saber a ser ensinado foram analisadas por Yves Chevallard em seu livro *La Transposition Didactique – Du Savoir Savant au Savoir Enseigné*[1], de 1991.

De acordo com ele, cientistas, professores, especialistas, políticos, autores de livros e outros agentes interferem no processo educativo ao influenciarem na escolha dos conteúdos curriculares e uma das fontes de seleção do saber escolar é a própria história das ciências. Nessa concepção, o saber científico é a única forma de saber novo e transita para outras esferas, como para o saber escolar, quando então ocorre a transposição didática. Com o passar do tempo, o saber escolar aproxima-se do saber banalizado pela sociedade e o sistema de ensino precisa ser alterado para re-compatibilizar o saber a ser ensinado com os saberes científicos.

Outro didata francês influente na Educação Matemática é Gerard Vergnaud, que em 1996 busca resolver o problema do significado do saber escolar com a teoria dos *campos conceituais.* Vergnaud

"*propõe, entre outras questões fundamentais, a necessidade de distinguir entre dificuldades conceituais, erros didáticos e verdadeiros obstáculos epistemológicos. (...). Para ele, há um verdadeiro obstáculo, quando as novas concepções a formar contradizem as concepções e as competências bem assentadas do educando e,(....) para superá-lo é necessário fazer uma análise, já que há uma contradição entre as concepções anteriores a serem rejeitadas e as novas concepções a serem assimiladas. É, portanto, uma pequena revolução intelectual que devem operar os educandos"* (Trindade, 1996, p.78).

[1] *A Transposição Didática – Do Saber Sábio ao Saber Ensinado*

Dessa forma, a questão pedagógica da compreensão e da formação de conceitos matemáticos pelo aluno é o ponto de partida para a teoria de Vergnaud, na qual o estudo dos obstáculos epistemológicos e didáticos fornece possibilidades de se respeitar os passos de elaboração de um conceito na educação escolar, que não são concebidos como o conhecimento formal da Matemática. A teoria dos campos conceituais busca a construção de um saber escolar que extrapole a dimensão empírica do cotidiano e ao mesmo tempo alcance níveis satisfatórios de generalidade e abstração. A tarefa didática de partir do conhecimento do aluno e formar novos conceitos em Matemática proposta por Vergnaud amplia a proposta de Piaget por estudar cada classe de situações e propor a existência de espaços de situações problema que forneçam condições para uma aprendizagem significativa (Pais, 2001, p.52).

A *engenharia didática* foi apresentada por Artigue, em 1996. Compreende a construção de uma seqüência de aulas por um professor para realizar um projeto de aprendizagem com seus alunos, desde a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino. Contempla tanto a dimensão teórica quanto a dimensão prática da pesquisa em didática da matemática, articulando assim pesquisa e ação pedagógica. Assim, o processo experimental da engenharia didática é formado pelas análises preliminares, pela concepção e análise a priori das situações didáticas, pela experimentação e pela análise a posteriori e validação. A noção de "obstáculo epistemológico" é importante para as análises preliminares das dificuldades dos alunos, que irão embasar toda a concepção do projeto de ensino (Brousseau, 1990, p. 263-265).

1.3.2 - O caráter polêmico da noção de obstáculo epistemológico na didática da Matemática

Apesar de ter sido inicialmente desenvolvida para o exame da história da ciência, a noção de obstáculo epistemológico foi adotada pela didática da Matemática, criando uma polêmica ainda não conclusiva a respeito da validade de se aplicar para a Matemática, que apresenta uma certa regularidade em sua evolução histórica, as idéias de ruptura e descontinuidade apontadas por Bachelard (Pais, 2001, p. 12). Por outro lado, alguns pesquisadores em Educação Matemática relacionam os obstáculos epistemológicos ao contexto cultural de desenvolvimento e não os enxergam como verdadeiramente constitutivos do conhecimento, conforme a idéia de Bachelard (Igliori, 1999, p. 109).

Diversos trabalhos (Miguel& Miorim, 2004; Igliori, 1999; Radford, 1997; Trindade, 1996) apontam que essa controvertida questão teve origem com a ampliação das idéias de Bachelard feita por Brousseau. Brousseau fez uma distinção entre as origens para os obstáculos encontrados na Matemática: os de origem ontogenética, que se manifestariam em decorrência do desenvolvimento cognitivo do aluno; os de origem didática, decorrentes do modo de organização e transmissão do saber no âmbito da escola e os de origem propriamente epistemológica, que desempenharam um papel constitutivo na história do conhecimento visado (Brousseau, 1983, p. 177, 178).

Com base nesses pressupostos, faz um estudo epistemológico sobre números decimais. Na mesma época, Georges Glaeser, professor da Universidade Louis Pasteur em Estrasburgo, realizou uma epistemologia dos números relativos na qual lista as dificuldades de se trabalhar com números negativos enfrentadas por matemáticos clássicos (Diophante, Stevin, Descartes, Mclaurin, Euler, D'Alembert, Carnot, Laplace, Cauchy e Hankel) no decorrer da História. São elas: a inaptidão de manipular quantidades negativas isoladas; a dificuldade de atribuição de sentido às quantidades negativas isoladas; a dificuldade de unificar a reta numérica (relacionada às diferenças qualitativas entre os números negativos e os números positivos; à descrição da reta como uma justaposição de suas semi-retas opostas com símbolos heterogêneos e à consideração simultânea dos caracteres dinâmicos e estáticos dos números), à ambigüidade dos dois zeros (as concepções do zero-absoluto, que perdurou por séculos, e do zero-origem, que seria um marco arbitrário sobre um eixo orientado), à estagnação ao estado das operações concretas (dificuldades de se atribuir um senso 'concreto' aos números negativos) e ao desejo de um modelo unificante (anseio de encontrar um modelo aditivo que fosse também válido para o domínio multiplicativo). Glaeser conclui com seus estudos que as hesitações de matemáticos com relação ao uso dos números negativos eram devidas à incapacidade de compreender e de resolver certos problemas e não à produção de erros induzidos por conhecimentos anteriores (Glaeser, 1981, pp 303-346).

Novos questionamentos foram lançados em relação à noção de obstáculo epistemológico, aumentando cada vez mais os desentendimentos em relação a esse assunto.

Anna Sierpinska, do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade de Concórdia em Montreal, Canadá, realiza em 1985 um estudo sobre os obstáculos epistemológicos relativos à noção de limite e agrupa os entraves a esta construção da seguinte maneira: os advindos do horror ao infinito; os ligados à noção de função; os obstáculos 'geométricos'; os obstáculos 'lógicos'; e ainda o obstáculo do símbolo.

Entretanto, de acordo com Miguel & Miorim (2004, p. 114):

> *"ela não parece conceber os obstáculos como conhecimentos propriamente ditos, como o faz Brousseau, e sim como 'causas de lentidões e perturbações' na aquisição de determinado conhecimento."*

Além disso, esses autores caracterizam alguns dos entraves que ela cita como uma ausência de percepção do modo de funcionamento dos conceitos matemáticos, ou seja, uma ausência de conhecimento, o que se choca com a concepção bachelardiana de obstáculo epistemológico. De qualquer forma, Sierpinska (1985, p. 58) reafirma o papel da História da Matemática como fonte de situações problema para a superação das dificuldades encontradas pelos alunos:

> "*A manifestação conjunta de numerosos obstáculos epistemológicos reencontrados na história e nos alunos nos parece conduzir a colocar em evidência o curso de história do desenvolvimento das noções matemáticas para a formação dos docentes (tradução nossa).*"

Michéle Artigue, questiona, em 1990, a necessidade de se fornecer ao obstáculo epistemológico o atestado histórico das dificuldades análogas e defende a tese de que os processos ou mecanismos mentais produtores de conhecimentos-obstáculos tais como a generalização abusiva, a fixação sobre uma contextualização ou uma modelização familiares e o amálgama de noções sobre um suporte dado é que deveriam ser identificados tanto na história quanto no processo de ensino-aprendizagem (Miguel & Miorim, 2004, p. 113).

Sierpinska, em 1994, publica o livro *Understanding in Mathematics*,[1] no qual explicita suas novas teorias, apresentadas no Colóquio Internacional de Montreal, em 1988, na comunicação intitulada *Sur un programme de recherche lié à notion de obstacle épistémologique*[2]. Nesse livro, ela defende que na cultura matemática podemos distinguir três níveis de conhecimento diferentes: (1) um nível técnico, isto é, o nível do conhecimento racionalmente justificado, portanto aceito pela comunidade dos matemáticos; (2) um nível formal, isto é, o nível ao qual pertencem as crenças, as convicções e atitudes hegemônicas em relação à matemática as quais, por ser hegemônicas, são tidas como óbvias; (3) um nível informal, isto é, o nível do conhecimento tácito, dos cânones de rigor e convenções implícitas.

Para Miguel & Miorim (2004) além de voltar a conceber os obstáculos como conhecimentos, ao caracterizar o nível informal como aquele em que os elementos são em geral inconscientes, os conhecimentos tácitos, e os do nível formal como os conhecimentos ditos óbvios e conscientes, que são atitudes, crenças e convicções, Sierpinska criou uma diferenciação questionável: os processos mentais, normas e critérios institucionais, caracterizados como informais e inconscientes não podem também ser considerados óbvios e conscientes? Da mesma forma, os conhecimentos técnicos não são também óbvios e conscientes? Além disso, a autora afirma que apenas nos níveis formal e informal ocorre a manifestação dos obstáculos epistemológicos, contrariando as idéias de Brousseau, que via nos conhecimentos técnicos a fonte natural de obstáculos epistemológicos.

Com base nas teorias de Vigotsky e de E. T. Hall, Sierpinska procura as relações entre as raízes psicogenéticas e as raízes culturais do obstáculo epistemológico:

> "*Os obstáculos crescem no solo do pensamento complexo infantil – eles possuem raízes genéticas. Mas os fertilizantes (os desafios que os fazem crescer) vêm da cultura que os envolve, dos modos implícitos e explícitos nos quais a criança é socializada e educada em casa, na sociedade e na instituição escolar*" (Sierpinska, 1994, p. 159).

[1] *Compreensão em Matemática*

[2] *Sobre um programa de pesquisa ligado à noção de obstáculo epistemológico*

Entretanto, para Radford (1997) essa autora não aponta nenhum papel significativo das estruturas sociais na idéia de obstáculo epistemológico e não faz uma análise dos "fatores culturais" que acompanham o desenvolvimento dos conceitos científicos, o que o leva a afirmar que a teoria cultural de Sierpinska apresenta um cunho social-behaviorista.

Para Radford (1997, p. 30) muitas das dificuldades apresentadas na aprendizagem seriam mais um problema cultural do que propriamente devidos ao próprio conhecimento. Como exemplo, Radford explica que se compararmos as dificuldades dos alunos de hoje para trabalhar com números negativos com as dificuldades dos matemáticos ocidentais medievais, podemos pensar que os números positivos são realmente um obstáculo epistemológico para a emergência dos números negativos. Entretanto, se observarmos como a técnica dos matemáticos chineses de trabalhar a representação dos números negativos com bastões coloridos ajudou-os a superarem essas dificuldades, poderemos perceber que a dificuldade posta pelos números negativos não é intrínseca ao próprio conhecimento. Ao contrário, depende das idéias culturais e locais sobre os objetos e métodos da ciência e da matemática.

Ao defender a tese da diversidade de origens para os obstáculos epistemológicos, Brousseau ampliou a concepção subjetivista de Bachelard da atribuição dos erros no processo de construção do conhecimento exclusivamente aos sujeitos que o constroem e amenizou o pressuposto da existência do paralelismo ontofilogenético. Entretanto, ao preservar a tese do obstáculo epistemológico como algo que se manifesta tanto no processo de construção do conhecimento como no processo de ensino-aprendizagem, não chega a negar completamente o argumento recapitulacionista presente no "princípio genético"(Miguel & Miorim, 2004, p. 102).

Para Miguel & Miorim (2004, p. 123), muito embora não possamos negar algumas semelhanças entre as dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos em seus processos de aprendizagem e aqueles enfrentados na construção histórica da Matemática atual, é necessário analisarmos sob diferentes óticas tais dificuldades e obstáculos: os estudantes de hoje se deparam com um saber já elaborado, enquanto nossos antepassados não possuíam um sistema de referências para julgar as soluções por eles encontradas. Assim, para os matemáticos de antigamente, os obstáculos encontrados pelos nossos alunos eram inexistentes, pois:

> "*apenas quando saídas e propostas de soluções 'adequadas', isto é, aceitas como adequadas por uma comunidade científica, são alcançadas é que se pode rever as propostas antecedentes e 'enxergar' nelas desvios e mal-entendidos em relação à solução adequada negociada e 'obstáculos' que seus proponentes não teriam sabido superar adequadamente.*"

Com base em tal raciocínio, as dificuldades encontradas pelos estudantes da atualidade são muitas vezes condicionadas pela maneira com a qual o professor conduz o processo de ensino-aprendizagem e não implicam um direcionamento dos processos pedagógicos no sentido de superar as dificuldades encontradas pelos matemáticos do passado, ainda que os erros e fracassos apresentados sejam os mesmos.

Além disso, a concepção bachelardiana de obstáculo epistemológico é contestada com base na visão indutivista de História que ela representa. Tal concepção apresenta uma avaliação e um julgamento da História da Ciência com base no que ela se tornou hoje, como se não houvesse a possibilidade de que ela pudesse ter outro desenvolvimento. Nessa perspectiva, a noção de "obstáculo" na Educação Matemática passa a dizer respeito a tudo aquilo que impedisse a Matemática de ser como ela é hoje. A principal crítica que se faz à essa visão indutivista regressiva da História da Matemática é o fato de que ela produz uma história internalista e descontextualizada dos conceitos e idéias, ao desconsiderar os fatores sócio-culturais externos à sua produção (Miguel & Miorim, 2004, p. 125).

1.3.3 - Reflexos da imagem especular da História da Matemática na Educação Matemática

Nesse capítulo, procuramos associar as abordagens internalistas da História da Matemática à imagem especular desta História e buscamos os reflexos dessa imagem na Educação Matemática. Assim, apresentamos o ideário positivista para a apresentação da ciência pelo método histórico como forma de reconstruir os conceitos de forma paralela à ordem cronológica de seus surgimentos, com sua clara defesa do "princípio genético": a História da Matemática seria um espelho perfeito para a ordenação seqüencial e cumulativa dos conhecimentos a serem apresentados no ensino, visto como um processo de transmissão de conhecimentos ao aluno, que simplesmente acumularia os conteúdos em ordem crescente de complexidade.

A abordagem de Piaget & Garcia da psicogênese das ciências altera essa visão cumulativa e passiva: o aluno seria responsável pela construção dos seus conhecimentos através dos mecanismos de assimilação e acomodação já descritos, passando pelas etapas intra-objetal, inter-objetal e trans-objetal, que seriam comuns na ontogênese e na filogênese. A História da Matemática serviria como fonte de conflitos cognitivos que permitissem a passagem de um nível de construção do conhecimento para outro superior, por meio da seleção, transformação, adaptação e incorporação dos elementos do meio externo às estruturas cognitivas do aluno. A imagem especular da História da Matemática, nesse caso, estaria ligada à concepção defendida por Piaget & Garcia de que as três etapas de construção do conhecimento são sempre presentes e paralelas nos processos individuais e históricos. Apesar de não ser tão clara e plenamente reflexiva como a imagem positivista, essa abordagem também desconsidera as raízes culturais específicas da produção, circulação e transmissão dos conhecimentos.

Bachelard, teórico da ruptura, apesar de negar o recapitulacionismo em suas obras, de certa forma também preservou o "princípio genético" para a abordagem da História da Ciência: ao defender que os obstáculos epistemológicos são intrínsecos ao conhecimento e se repetem tanto na ontogênese quanto na filogênese, reafirma uma imagem especular da história: o passado se reflete no presente e o presente torna-se um reflexo do passado.

Ao se desconsiderar o conjunto cultural em que os matemáticos desenvolveram suas teorias, com suas crenças, concepções e hipóteses vinculadas ao momento político, filosófico e social de seus tempos e não discutir as problemáticas alternativas nas próprias comunidades de matemáticos da mesma época, a História da Matemática trabalhada por essas abordagens, a positivista, a de Piaget & Garcia e a de Bachelard, adquire um caráter internalista. Assim, reitera-se a idéia de que a Matemática seja uma ciência neutra, pronta e acabada, desenvolvida por matemáticos profissionais de acordo com uma evolução contínua em direção à perfeição e descontextualizada de uma compreensão social e histórica das negociações que levaram ao seu modelo de elaboração. Até mesmo Bachelard, o teórico da ruptura epistemológica na evolução dos conceitos, se refere à Matemática como um corpo harmonioso de conhecimentos. Não se discutem as possibilidades de que outros modos de desenvolver o corpo teórico da Matemática seriam possíveis e que se isso tivesse acontecido, hoje teríamos uma Matemática diferente da oficialmente consagrada como ciência universal.

Assim, acreditamos que o recurso à História da Matemática deveria ser baseado em um diálogo do passado com o presente e interpretado dentro das práticas sociais em que tal passado se achava envolvido. Desse modo, se deixaria de subordinar o presente ao passado e ao mesmo tempo de se fazer uma leitura da evolução dos conceitos da maneira que se acredita que eles tenham acontecido. A História da Matemática seria, então, tratada como um produto humano: carregada de valores, relativizada em relação aos pressupostos das condições sócio-culturais de sua produção, aceitação e divulgação. Nesses termos, ao enxergamos a Matemática como uma produção cultural, tacitamente assumiremos que a História da Matemática não é um reflexo imediato do que foi a realidade de uma época, a ser "usado" em sala de aula como uma forma de reproduzir a elaboração de um conceito ou de apresentá-lo. Ao contrário, vemos na História da Matemática a possibilidade de trabalhar a re-criação, ou a re-descoberta, de um conceito em sala de aula a partir da discussão sobre a objetividade e a validade universal da Matemática em relação à sua produção histórica social e culturalmente determinada, às negociações de significados envolvidas nos diversos contextos sociais e às mudanças conceituais ocorridas no decorrer do tempo.

Capítulo 2

A História da Matemática como uma pintura

> " *We will have to keep in mind, of course, that an ancient problem or an ancient mathematical situation will never again be the same. It seems that Heraclitus was right when, standing on the river bank and looking at the flow of water, he said that is not possible to step into the same river twice"*[1] *(Radford, 1997)*

Neste capítulo, procuraremos apresentar a influência da estrutura cultural extra-matemática e das características lingüísticas da matemática nas abordagens da História da Matemática que configuram uma "pintura" das situações históricas, uma busca de diálogo com os condicionamentos culturais de cada época. Essas abordagens têm origem comum na escola de pensamento vigotskyana, conhecida como sociocultural, para a qual o pensar humano é essencialmente social e dependente de fatores históricos e culturais. Dessa forma, nega-se o recapitulacionismo e percebe-se o aprendizado como a internalização de um processo interpessoal, que enfatiza o diálogo e as diversas funções da linguagem na instrução e no desenvolvimento cognitivo mediado. Assim, analogamente ao que fizemos no primeiro capítulo, no qual procuramos apresentar a filosofia positivista que embasava a visão da construção individual do conhecimento como um espelho da construção histórica, iniciaremos este capítulo mostrando como a ênfase dada por Vigotsky para as origens sociais da linguagem e do pensamento irá influenciar abordagens da História da Matemática que procuram fazer uma "pintura" dos fatores socioculturais envolvidos na produção, aceitação e circulação dos conhecimentos matemáticos.

[1] "*Precisaremos ter em mente, é claro, que um problema antigo ou uma situação matemática antiga nunca será novamente a mesma. Parece que Heráclito estava certo quando, de pé em um banco de rio e observando o fluxo da água, disse que não é possível entrar no mesmo rio duas vezes*" (Radford, 1997, tradução nossa).

Seguindo a referência Miguel & Miorim (2004), apresentaremos a perspectiva sociocultural de Radford e a perspectiva dos Jogos de Vozes e Ecos, que foram recentemente construídas e que, segundo esses autores, ainda estão em processo de elaboração.

Ainda dentro de uma abordagem histórico-cultural da apropriação do conhecimento, apresentaremos a influência das crenças na aprendizagem matemática e abordaremos as questões relativas às preocupações da etnomatemática com o respeito às diversas formas de geração, organização, apropriação e circulação de idéias matemáticas nas diferentes culturas em diferentes épocas. Como decorrência da importância de se considerar as diversas práticas que envolvem o conhecimento matemática, abriremos, na finalização do capítulo, uma discussão sobre a prática escolar da matemática.

2.1 - A adoção do referencial vigotskyano e o abandono do "princípio genético"

Apresentaremos a seguir duas perspectivas teóricas em construção no campo de investigação História na Educação Matemática: a *perspectiva sociocultural*, de autoria de

Luis Radford, da Université Laurentienne do Canadá e de Fulvia Furinghetti, professora da Universidade de Genova, na Itália e a *perspectiva dos jogos de vozes e ecos*, introduzida pelos investigadores italianos Paulo Boero, B. Pedemonte, E. Robotti e G. Chiappini. Essas perspectivas teóricas buscam uma participação da estrutura cultural extra-matemática e das características lingüísticas, discursiva e dialógica da linguagem matemática para propiciar ao estudante uma ampliação crítica de seus conhecimentos. Também defendem uma abordagem sociocultural que considere os significados em seus contextos específicos e rompem com todos os tipos de concepções construtivistas: tanto as radicais, que vêem o conhecimento como uma estrutura que vai do concreto ao abstrato, quanto as socioconstrutivistas, que enxergam os fatores sociais como fatores externos que não se podem evitar. Desse modo, enxergam a aprendizagem como a capacidade de internalizar as significações sócio-históricas ou culturais dos objetos matemáticos por meio de atividades pedagógicas adequadas.

Nessas duas perspectivas, os autores adotam o pensamento de Vigotsky de que é na interação social e por intermédio do uso de signos que se dá o desenvolvimento das funções psíquicas superiores. A fala adquire importância crucial no desenvolvimento do pensamento e diálogo torna-se veículo de mediação cultural.

Segundo Vigotsky:

> "*O momento de maior significado no curso do desenvolvimento intelectual, que dá origem às formas puramente humanas de inteligência prática e abstrata, acontece quando a fala e a atividade prática, então duas linhas completamente independentes de desenvolvimento, convergem*" (Vigotski, 2000, p.33).

A formação dos conceitos dependerá do modo de funcionamento psicológico condicionado pela cultura que envolve o indivíduo. Em Vygostsky (2000) temos uma negação do "princípio genético", referente à repetição das seqüências de estágios de desenvolvimento nos planos filogenéticos e ontogenéticos, que provoca um reducionismo de natureza sociológica ao identificar a cultura como algo externo, fonte de estímulos para desenvolvimentos conceituais e a cognição como algo interno, mero reflexo da cultura. No pósfacio de seu livro "*A Formação Social da Mente*", escrito por Vera John-Steiner e Ellen Souberman, encontramos de maneira clara e sucinta a seguinte afirmação:

"Vygotsky explora neste livro as diversas dimensões temporais da vida humana. Ele jamais identifica o desenvolvimento histórico da humanidade com os estágios do desenvolvimento individual, uma vez que se opõe à teoria biogenética da recapitulação. Na verdade, sua preocupação está voltada para as conseqüências da atividade humana na medida em que esta transforma tanto a natureza como a sociedade. Embora o trabalho dos homens e das mulheres no sentido de melhorar o seu mundo esteja vinculado às condições materiais de sua época, é também afetado pela capacidade humana de aprender com o passado, imaginar e planejar o futuro" (Vigotski, 2000, p. 172).

Para Vigotsky o aprendizado e o desenvolvimento da criança estão inter-relacionados: o aprendizado provoca processos internos de desenvolvimento que dependem da interação da criança com seu ambiente e da cooperação social. Desse modo, a atividade simbólica da linguagem tem função organizadora da atividade prática e produz novas formas de comportamento, sendo que quanto mais complexa é a ação exigida por uma situação, maior será a importância da fala. Assim, em relação à perspectiva sociocultural:

> "*Vê-se, portanto, que para os integrantes da perspectiva sociocultural, que tem suas raízes no referencial teórico neo-vygotskyano, a aprendizagem matemática é fundamentalmente vista como a capacidade pessoal de se apropriar, através da negociação interativa (sobretudo de natureza dialógica) dentro de um determinado contexto cultural, das significações semióticas sócio-historicamente produzidas aos objetos matemáticos no interior de uma atividade (atividade matemática no plano histórico e atividade pedagógica culturalmente contextualizada de apropriação e/ou produção de significações semióticas no presente)"* (Miguel & Miorim, 2004, p.129).

De acordo com Vigotsky, podemos distinguir duas linhas qualitativamente diferentes dentro do processo de desenvolvimento das funções psicológicas: de um lado os processos elementares, de origem biológica e de outro lado as funções psicológicas superiores, de origem sócio-cultural, sendo que a história do comportamento da criança nasce do entrelaçamento dessas duas linhas. Durante a infância se desenvolveriam o uso de instrumentos e a fala humana, duas formas fundamentais e culturais de comportamento. (Vigotsky, 2000, p. 61). Desse modo, em Vigotsky temos a ênfase no aprendizado socialmente elaborado e específico de cada criança, dependente que é das condições históricas de cada criança. Os instrumentos e símbolos construídos socialmente é que definiram como ocorrerá o funcionamento cerebral da criança, ou seja, a relação do homem com os objetos é mediada pelos sistemas simbólicos, que são as representações dos objetos e situações do mundo real no universo psicológico do indivíduo. Assim, cada cultura fornece ao indivíduo o seu conjunto de significados, isto é, representações da realidade.

A perspectiva dos Jogos de Vozes e Ecos também segue o referencial teórico de Vygotsky e procura trabalhar a linguagem como sistema simbólico fundamental na mediação entre o sujeito e o conhecimento matemático por meio da interação social, com o uso das vozes e dos ecos por ela produzidos, e do pensamento generalizante, com a abstração das características do conhecimento e formação de conceitos. Para Vigotsky, os conceitos adquiridos no decorrer da atividade prática da criança e das interações sociais imediatas são "conceitos cotidianos" ou "conceitos espontâneos", enquanto que os conceitos adquiridos por meio dos processos de instrução escolar são chamados de "conceitos científicos". Além disso, é necessário que os conceitos espontâneos tenham alcançado certo nível para que a criança possa absorver o conhecimento científico correlato. Mais uma vez, podemos verificar a importância da cultura para o funcionamento psicológico: diferentes grupos culturais fornecem diferentes instrumentais psicológicos em virtude da especificidade da organização das atividades práticas de cada grupo, diferentes vozes para a tradução de um significado. Trabalhar as diferentes vozes possibilitaria discutir as diversas interpretações de um conceito:

> "*A adequada denominação* Jogos de Vozes e Ecos *atribuída a essa perspectiva já ressalta, por si mesma, os dois construtos teóricos básicos sobre os quase ela se assenta: o construto Vozes, introduzido e desenvolvido por Bakhtin, no interior de sua teoria do discurso – em sua obra* Dostoievski, poética e estilística – *e o construto Jogos de Linguagem, introduzido por Ludwig Wittgenstein em seu* O livro Castanho. *Além desses, a perspectiva dos VEG assenta-se ainda, aceitando-o, no ponto de vista atualmente polêmico de Vygostsky acerca da distinção entre conceitos científicos – aqueles com que a escola lida – e conceitos práticos – aquele que são utilizados no cotidiano, aceitando também, por conseqüência, o pressuposto neovygotskyano igualmente polêmico de que a relação que subsistiria entre a matemática escolar e a matemática adquirida fora da escola seria da mesma natureza que a que subsistiria entre conceitos científicos e conceitos práticos"* (Miguel & Miorim, 2004, p. 139, grifos dos autores).

Assim, para as perspectivas em questão, o conhecimento é concebido como uma prática culturalmente mediada, resultante das atividades nas quais as pessoas se engajam, dentro da racionalidade de cada cultura em consideração. Coerentemente com tal visão, em nosso trabalho adotaremos a seguinte definição de cultura:

> "*Consideramos cultura como o conjunto de mitos, valores, normas de comportamento e estilos de conhecimento compartilhados por indivíduos vivendo num determinado tempo e espaço*" (D'Ambrósio, 2005, p.104).

Desse modo, não podemos mais enxergar o recurso pedagógico à História da Matemática de uma maneira linear e verticalizada em relação ao tempo. Ao contrário, passamos a perceber a abordagem da construção de um conceito de forma localizada em um determinado tempo e espaço, pertencentes a uma determinada cultura que não é uma imagem primitiva de nossa cultura e sim a realidade histórico-cultural de uma época.

As perspectivas sócio-cultural e a do jogos de vozes e ecos buscam, de maneiras diferentes, o diálogo necessário entre o passado e o presente sem que se subordine de maneira determinista o primeiro ao último. Nessas perspectivas, a natureza discursiva própria do conhecimento matemático e suas diversas representações semióticas são consideradas em seus contextos históricos e sociais, com seus significados próprios.

2.2 - A Perspectiva sócio-cultural

Para Radford (1997) o conhecimento não está restrito ao caráter técnico que assume quando é relacionado somente à resolução de problemas. Ao contrário, o conhecimento é concebido na perspectiva de Vigostsky, para quem a aprendizagem dos conceitos deveria ter origem na negociação de significados que resulta da atividade social do indivíduo e que é ligada ao seu meio cultural. O construtivismo piagetiano é abandonado e o conhecimento é entendido como parte da racionalidade da cultura em consideração, relacionado diretamente às características sociais, históricas, materiais e simbólicas que marcam as atividades dos indivíduos. O problema nunca é um objeto por si próprio, mas sim resolvido e validado dentro da racionalidade e das crenças da cultura ao qual se liga.

Como exemplo, Radford (1997, 30) cita a emergência da matemática dedutiva dos gregos, que é frequentemente relacionada à organização política das cidades-estado gregas, baseadas na lei, que encorajavam os cidadãos a argumentar e debater. Ele critica esta leitura causal, mecanicista e behaviorista da matemática grega, afirmando que o estilo grego de debater e argumentar não é o determinante para suas concepções matemáticas e sim manifestação de toda uma cultura, desenvolvida pelo compartilhamento de significados de todas as atividades vividas por uma sociedade e que se manifestam na matemática, na arte e em outras manifestações semióticas. Assim, para se estudar o conhecimento matemático precisamos levar em conta a estrutura cultural extra-matemática na qual ele se acha imerso, fazer uma análise histórico-epistemológica do conhecimento.

Na visão de Miguel & Miorim (2004) o uso por Radford da expressão híbrida *análise histórico-epistemológica* sugere que ele não distingue a análise histórica da análise epistemológica. Ao contrário, os autores acreditam que para Radford, o que caracterizaria uma história epistemológica:

> "*seria a defesa de um projeto de constituição histórica das idéias matemáticas com base em uma concepção sócio-cultural de cunho semiótico e, mais particularmente, de cunho linguístico-semântico do conhecimento matemático"* (Miguel & Miorim, 2004, p. 126-127).

Com isso, a análise histórico-epistemológica possibilitaria entender o papel das diferentes culturas que influenciaram no desenvolvimento dos conhecimentos, as transformações intracultural e intercultural dos significados produzidos com esse conhecimento e as negociações e confrontações entre diversos programas de pesquisa nos vários estágios de desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Assim, Radford e seu grupo assumem como pressupostos epistemológicos que o conhecimento é ligado a ações necessárias para resolver problemas e que os problemas são resolvidos dentro do contexto sócio-cultural do período considerado. Além disso, o conhecimento é socialmente construído e as instituições culturais e crenças de suas próprias culturas influenciam os alunos.

Nessa perspectiva, Radford e seu grupo criticam todos os tipos de argumentos que seguem o paralelismo ontofilogenético e rompem com as diferentes abordagens construtivistas da aprendizagem matemática, que separam a esfera do conhecimento das esferas culturais e educacionais. Também criticam o recapitulacionismo presente na noção de obstáculo epistemológico:

> "*Nenhum obstáculo epistemológico pode 'resistir' ao efeito da cultura pois, se nós estamos corretos, a cultura não é um inconveniente para o conhecimento e o conhecimento também não 'voa' sobre culturas: (...) o conhecimento é uma produção cultural indissoluvelmente submetida ao seu meio*" (Radford, 1997, 30, tradução nossa).

Para Radford, o significado real de um conceito do passado é inatingível, ele sempre será "filtrado" por nosso padrão de comportamento e por nossas modernas concepções sócio-culturais da história. Além disso, dado que qualquer investigação histórica coloca em contato dois horizontes diferentes e que o horizonte presente está sempre em movimento, a história de qualquer conceito ou de qualquer teoria matemática deverá sempre ser reescrita (Radford, 1997, 27). Assim, o conhecimento matemático é re-criado e co-criado pelo aluno através do uso de signos e do discurso, ou seja, o conhecimento matemático resulta da negociação social dos signos, é um processo lingüístico-semântico. A linguagem deixa de ser vista somente como modo de expressão do indivíduo sobre seu meio e passa a ser encarada como uma interação de duplo sentido, ao permitir que o indivíduo elabore suas próprias concepções de representação do mundo, sendo que na Matemática, em especial, a linguagem abrange tipos de representações semióticas, associada a diferentes níveis de abstração.

A História da Matemática torna-se inspiradora de seqüências didáticas para o ensino-aprendizagem ao possibilitar a constituição dos contextos e circunstâncias de produção dos conceitos, das significações produzidas e negociadas na produção, circulação, recepção e transformação desse conhecimento. Nessa abordagem sociocultural, a investigação dos textos matemáticos de outras culturas busca examinar as práticas culturais nas quais eles estavam envolvidos e, através do contraste com as notações e conceitos que são ensinados hoje, perceber os tipos de exigência intelectual exigidas dos estudantes. As categorias semióticas encontradas nos diversos momentos da constituição de um conceito são trabalhadas na reinvenção de fórmulas, aumentando os níveis de generalização requeridos no enfrentamento dos problemas apresentados nas seqüências de ensino (Radford, Boero & Vasco, 2000, p. 164).

O projeto de Radford não pode ser interpretado como recapitulacionista, pois não há nenhuma pressuposição de subordinação do presente ao passado. Ele investiga o papel da cultura na internalização do conhecimento escolar no presente e busca na história do desenvolvimento epistemológico de um conceito os condicionamentos culturais que lhe deram significação e permitiram sua produção e aceitação:

> "*....nós dissemos que a história da matemática pode nos dar uma nova perspectiva para ensinar. É claro, nós não estamos dizendo que nossos estudantes devem seguir os mesmos caminhos que os dos matemáticos antigos. Indo além, esta é uma questão de melhor entender a natureza do conhecimento matemático e encontrar, em sua estrutura histórica, novas possibilidades de ensinar. Um dos pontos concernem ao currículo, que pode ser incrementado com ligações entre álgebra e números negativos. Em meu conhecimento, esses dois assuntos são usualmente ensinados de forma independente. A História pode sugerir algumas novas ligações (por exemplo, integrar o conceito de números negativos em uma seqüência de ensino algébrico)"* (Radford, 1995, p.35, tradução nossa).

A História da Matemática serviria como um ponto de partida para o desenho de novas atividades para que os estudantes, de forma ativa, recriassem significados e conceitos e co-criassem outros novo, agindo e pensando por meio do arsenal de conceitos, significados e ferramentas de sua cultura. Na perspectiva sócio-cultural, a classe é considerada um micro-espaço dentro do espaço geral da cultura e desde que as transformações semióticas são contextualmente situadas e culturalmente sustentadas, não há como fazer uma releitura da História da Matemática com lentes recapitulacionistas. A compreensão que o estudante adquire não é meramente o resultado de um estágio unidirecional da tomada de consciência dos significados e sim o resultado do diálogo, da apropriação de conceitos e significados por meio das atividades desenvolvidas pelos alunos e pelo professor. Assim, as fontes de conhecimento de uma cultura, suas atividades e ferramentas, por serem histórica e pan-culturamente construídas, podem servir como um base para o entendimento de que a maior parte dos nossos conceitos correntes são mutações, adaptações ou transformações dos conceitos elaborados por matemáticos do passado em seus contextos específicos (Radford, Boero & Vasco, 2000, p. 165).

Radford (1997, p. 32) afirma que uma investigação histórico-epistemológica cultural também precisa demonstrar os modos de confrontação dos diferentes programas de pesquisa em certos momentos do desenvolvimento da matemática, não somente em relação aos aspectos cognitivos do programa vitorioso, mas também em relação aos valores e compromissos do contexto sociocultural desta confrontação.

2.3 - A Perspectiva dos Jogos de Vozes e Ecos:

Para Boero e seu grupo, idealizadores da perspectiva dos Jogos de Vozes e Ecos, a dificuldade de transmissão do conhecimento matemático na escola giraria em torno de problemas de ordem lingüística, discursiva e dialógica. Assim, os objetos da Matemática são também considerados objetos lingüísticos, em suas dimensões sintática, semântica, pragmática, discursiva, dialógica, etc. e como conseqüência, em seu aprendizado a linguagem desempenha papel central.

A perspectiva dos Jogos de Vozes e Ecos trabalhada adota o construto teórico de *Jogos de Linguagem* de Wittgenstein e o construto teórico *Vozes* de Bakhtin, que assumirão na perspectiva de Boero a significação de um ambiente dialógico de aprendizagem. Também aceitam a distinção de Vygotsky entre os conhecimentos científicos, trabalhados pela escola e os conceitos espontâneos, utilizados no cotidiano (Boero, Pedemonte, Robotti, p. 6, 1997).

Para Boero e seu grupo, a escola seria responsável pela transmissão das características próprias do conhecimento matemático que não são encontradas no cotidiano: a natureza teórica e sistemática; sua coerência interna; a natureza dos processos de validação desse conhecimento e a natureza específica da dimensão discursiva da linguagem matemática. A transmissão do conhecimento matemático se daria através de condições que permitissem aos estudantes a apropriação das características de natureza lingüística do conhecimento teórico matemático. Os Jogos de Vozes e Ecos seriam atividades mediadoras que permitiriam essa apropriação, por criarem um ambiente dialógico de aprendizagem.

A hipótese principal do grupo de Boero é a de que os Jogos de Vozes e Ecos podem permitir ao estudante alcançar um horizonte cultural difícil de construir na abordagem construtivista ao conhecimento teórico e também difícil de ser mediado através de abordagens tradicionais: concepções intuitivas, métodos experimentais distantes do horizonte cultural dos alunos e tipos de organização do discurso científico que não são partes naturais do discurso do estudante. Assim:

> "*Seu ponto de partida é o fato de que algumas expressões verbais e não-verbais (especialmente aquelas produzidas por cientistas do passado) representam de um denso modo importantes saltos na evolução da matemática e da ciência. Cada uma dessas expressões exprimem um conteúdo, uma organização de discurso e o horizonte cultural do salto histórico"* (Radford & Boero & Vasco, 2000, p. 165, tradução nossa).

Boero e seus colaboradores têm investigado a História na Educação Matemática para explicitar as características de um conteúdo matemático teórico e as condições histórico-culturais de sua emergência na busca de vozes, ou seja, dessas expressões verbais ou não que representam importantes saltos históricos na evolução da ciência e da Matemática. Essas vozes, se apropriadas e ressignificadas por outras pessoas, por meio de questões específicas como:

> "*'Como X interpretou o fato que Y?;' ou 'Através de quais experiências pode Z manter esta hipótese?'; ou ' Quais analogias e diferenças você pode encontrar entre o que seu colega de classe diz e o que você lê a respeito de W*?'" (Radford, Boero & Vasco, 2000, p. 165, tradução nossa).

produzem ecos, isto é, conexões estabelecidas entre diferentes vivências de pessoas de diferentes épocas e de diferentes culturas. Ao professor caberia mediar essas vozes históricas que permitiriam ao aluno internalizar, através do diálogo, as características do conhecimento teórico e científico e suas condições histórico-culturais de emergência.

De acordo com as tarefas e as reações dos alunos, os estudantes produzem "ecos" de diferentes tipos às diferentes vozes apresentadas: as vozes históricas e a voz mediadora do professor. Boero e seu grupo classificam estes ecos como *superficiais*, ou seja, que não demonstram o entendimento da voz; *mecânicos*, que somente reproduzem a voz e não ampliam seus efeitos para situações diferentes; *de assimilação,* quando os estudantes são capazes de transferir o conteúdo ou o método apresentado pela voz para outras situações-problema parcialmente semelhantes*; ressonantes,* que representam a situação mais interessante de todas e ocorrem quando o estudante ressignifica a voz com base em suas experiências pessoais e encontra exemplos e situações que atualizam e multiplicam a voz apropriadamente; e *dissonantes,* que representam conclusões contrárias ao esperado. Os ecos são multiplicados e aprofundados pela exploração em classe das vozes originais e dos ecos produzidos pelos alunos. Estes ecos renovam as vozes originais em termos de expressões e referências culturais, permitindo um debate científico durante a experiência de ensinar (Boero, Pedemonte, Robotti, p. 6, 1997).

Nessa perspectiva também se procura discutir as crenças e atitudes a respeito da natureza da matemática e de como ela é aprendida. Seus autores acreditam que quando elas são explicitadas ocorre uma ampliação de horizontes que favorece o desenvolvimento de habilidades metacognitivas (Radford, Boero & Vasco, 2000, p.290).

Do mesmo modo, acreditamos que entender a importância das crenças no processo de ensino e aprendizagem de matemática pode ser um dos caminhos para a integração da História da Matemática em Educação Matemática, como forma de ajudar a promover uma interlocução entre as diferentes culturas em diferentes épocas.

2.4 - A História da Matemática como possibilidade de trabalhar as crenças no processo de ensino e aprendizagem de Matemática

Para estudarmos como as pessoas aprendem, é necessário que percebamos a ligação entre cognição e afeto: as crenças, atitudes e emoções influenciam a maneira como as pessoas trabalham vários processos cognitivos e metacognitivos. Por exemplo, nos processos metacognitivos**,** as interferências emocionais podem indicar novas estratégias de resolução ou simplesmente causar a desistência em buscar soluções. Nos processos de armazenagem e de recuperação de informações é reconhecido o fato de que quando uma emoção é fortemente negativa, a pessoa entra em pânico e sua capacidade de processamento fica ligada somente na avaliação de seu estado emocional, bloqueando qualquer outro processo (Chacón, 2003).

Para pesquisar o afeto em Educação Matemática, Chacón (2003) definiu "domínio afetivo" a partir de três descritores: crenças, atitudes e emoções. Dentre eles, as emoções ganham maior relevo quando analisamos o fato de que são nas respostas emocionais às resoluções de problemas matemáticos que surgem a maioria dos fatores afetivos e de que o estado emocional possui várias dimensões que influenciam na aprendizagem: a extensão e a direção da emoção, a duração e o nível de consciência e controle do aluno sobre ela.

Chacón (2003) destaca que as pesquisas sobre a influência das crenças têm ocupado um papel de destaque nos estudos sobre aprendizagem matemática. Segundo ela, existe uma dificuldade de se estabelecer uma diferenciação entre crença, afeto e conhecimento, principalmente em relação ao de se situar as crenças no domínio cognitivo ou no domínio metacognitivo. Ao nosso ver, o modelo mais apropriado seria o modelo proposto por Chacón (2003, p. 62): os afetos e os conhecimentos seriam conjuntos disjuntos e as crenças um conjunto com interseções nos conjuntos de afetos e conhecimentos. Assim, quanto mais impregnado de afeto algo estiver, mais próximo estará de uma crença e, ao contrário, quanto menos afeto possuir, mais se aproximará de um conhecimento. Nesse contexto, é preciso também se levar em conta que os conhecimentos tácitos, ainda não objetivados, não se tratam de crenças e pertencem ao conjunto dos conhecimentos.

Para entender a importância da relação estabelecida entre afetos - emoções, atitudes, crenças – e aprendizagem matemática, basta verificar que:

> "*Ao aprender matemática, o estudante recebe estímulos contínuos associados a ela – problemas, atuações do professor, mensagens sociais, etc. – que geram nele uma certa tensão. Diante desse estímulos reage emocionalmente de forma positiva ou negativa. Essa reação está condicionada por suas crenças sobre si mesmo e sobre a matemática. Se o indivíduo depara-se com situações similares repetidamente, produzindo o mesmo tipo de reações afetivas, então a ativação da reação emocional (satisfação, frustração, etc.) pode ser automatizada e se "solidificar" em atitudes. Essas atitudes e emoções influem nas crenças e colaboram para sua formação*" (Chacón, 2003, p.23).

Esse caráter cíclico de ligação entre a aprendizagem e os afetos, ainda de acordo com Chacón (2003) deve ser entendido em seus vários aspectos, que envolvem tanto o professor quanto o aluno. A autora afirma que os conhecimentos subjetivos pertencentes às crenças dos professores se traduzem em sua maneira de ensinar, do mesmo modo que os pertencentes às crenças dos alunos se traduzem em bloqueios e resistências a alguns tipos de aprendizagem. Assim, observar as emoções, atitudes e crenças do aluno em relação à Matemática pode oferecer indícios das experiências que teve como estudante, da perspectiva profissional do professor e da sensibilidade social do contexto em que o ensino se desenvolve. O nível de consciência das próprias crenças e da influência do contexto social são fatores decisivos nas práticas de ensino e apontam caminhos para o modo de proceder do professor. Em relação ao aluno, as crenças sobre a aprendizagem matemática são influenciadas pelo que consideram como prioridades: dominar procedimentos básicos, memorizar algoritmos, consciência da utilidade da Matemática, valorização do aprendizado como habilidade para progredir na vida, obter confiança em si mesmo e reforçar sua imagem em relação ao grupo, etc.

Com isso, tomar consciência da atividade emocional durante a aprendizagem pode servir com um elemento de auto-regulação para o aprendiz: serve para aumentar a responsabilidade do aluno no planejamento, no controle da aprendizagem e na avaliação. As exigências afetivas para a aprendizagem devem ser tão estudadas quanto as exigências cognitivas, pois a imagem que os alunos e os professores têm da matemática podem servir como referência para novas estratégias de ensino e como crítica para certos métodos.

É no entrelaçar da cognição e do afeto que pretendemos focar nossa atenção. As crenças trazidas para o contexto da sala de aula irão interferir na atribuição de significados para as diferentes tarefas e colaborar ou não para a compreensão das atividades desenvolvidas. Também podemos verificar que as diferentes fases da resolução de uma tarefa mostram como a dimensão emocional interage com a cognição: as idas e vindas, as rotas alternativas de resolução e as alterações de ânimo encontradas nas diversas etapas do trabalho são alguns exemplos.

Dentro da perspectiva da psicologia cultural, consideramos esclarecedora a apresentação de Galvão (2003, p. 90):

> "*Em suma, a posição aqui exposta, acerca do que define um indivíduo como um ser cultural, é a de que a cultura provê um sistema simbólico para interpretação e organização da experiência, assim como para conferir significado à vida. O indivíduo, por ser ativo nessa interpretação e organização de sua experiência, se diferencia dos demais em vários aspectos de seu funcionamento psíquico, não sendo assim determinado pela cultura. Esta, por sua vez, como resultado de uma história de criação coletiva, não se reduz à soma das contribuições individuais.*"

Com isso, esperamos que fique clara a importância da "construção do contexto" para facilitar a compreensão dos conceitos em Matemática. Para Chacón (2003, p. 200), encontramos na sala de aula uma multiplicidade de culturas relacionada ao "*mundo invisível de valores e crenças*" do professor e dos alunos que interfere na qualidade da aprendizagem da matemática. Segundo essa autora, a perspectiva antropológica, ao propor a idéia de cultura como um conjunto de maneiras de pensar, sentir e agir compartilhadas por um grupo, possibilitaria uma intervenção no currículo que levasse em conta como a história pessoal e a história cultural do aluno afetam seu pensamento matemático e sua aprendizagem da matemática. Para tanto, é necessário que se perceba que a matemática não é um conhecimento acultural e que as aulas de matemática devem estar abertas para a identidade cultural do aprendiz:

> "*Se aceitarmos a matemática como uma ciência que surge da sociedade, e reconhecermos a parte que está modelada pelas raízes culturais e históricas dessa sociedade, os significados das idéias matemáticas podem ser ampliados. Este é um primeiro passo para aproveitar a diversidade cultural dos alunos como fonte de riqueza para a aprendizagem da matemática escolar*" (Chacón, 2003, p. 198).

Desse modo, o conhecimento matemático que o aluno traz de sua vivência torna-se o ponto de partida para o trabalho em sala de aula e deixa de ser visto como algo a ser substituído pelo conhecimento escolar. Ao contrário, as formas de conhecer associadas à prática saber passam a ser consideradas como um complemento do conhecimento matemático escolar (Chacón, 2003, p. 198).

Nesse mesmo sentido, Paulus Gerdes, um historiador holandês naturalizado moçambicano, propõe estratégias históricas para estimular a autoconfiança do povo moçambicano em sua capacidade de produzir Matemática e modificar as crenças inculcadas pelos colonizadores sobre a incapacidade que esse povo teria para aprender a matemática dos dominadores.

Para Gerdes, a imagem da Matemática criada e capaz de ser compreendida somente pelos homens brancos faz parte de uma política de dominação cultural que nega as tradições dos povos colonizados e reduz a capacidade matemática desses povos a uma memorização mecânica. Este processo seria causado pelos bloqueios psicológicos e culturais provocados pelo modelo de educação colonial, que reduziu a cultura local aos hábitos e costumes pitorescos, forçando o povo a se sentir envergonhado de sua cultura e dependente do estrangeiro. A reversão de tais crenças se daria através de um renascimento cultural:

> “*Neste renascimento cultural, neste combate ao preconceito racial e colonial, uma reafirmação-matemático-cultural desempenha um papel: é necessário encorajar a compreensão de que os povos Africanos foram capazes de desenvolver matemática no passado, e portanto – reganhando confiança cultural – serão capazes de assimilar e desenvolver a matemática de que necessitam.”* (Gerdes, 1991, 62)

A estratégia cultural teria como objetivos mostrar a capacidade que cada povo tem de desenvolver matemática e seria desenvolvida através de atividades relacionadas à história cultural da Matemática de Moçambique, como por exemplo:

> *“Nas zonas litorais de Moçambique, seca-se o peixe para ser vendido no interior. Como secar o peixe? Através de sua experiência, os pescadores descobriram que é necessário colocar todo o peixe à mesma distância do fogo. Eles descobriram um conceito de circunferência na areia, utilizando uma corda e dois paus. Esse exemplo mostra, mais uma vez, que conceitos matemáticos importantes refletem relações importantes no mundo objetivo*” (Gerdes, apud Miguel, 2004, p.27).

Como estratégia social, Gerdes sugere que a escola incorpore nos currículos de matemática a “matemática escondida” nas práticas populares e que os professores se conscientizem a respeito do *valor cultural, educacional e científico da redescoberta e exploração da matemática escondida* (Gerdes, 1991, 63). Dessa forma, as dificuldades com o aprendizado da matemática surgidas pela “transplantação curricular” das nações dominantes para o Terceiro Mundo poderiam ser diminuídas pela atribuição de sentido cultural ao que é estudado na escola. A preocupação central de Gerdes nesse sentido é a de que a matemática tem servido como uma barreira ao acesso social: as crianças vindas das camadas socioeconômicas inferiores da população têm aversão à matemática e a educação matemática é estruturada em função de uma elite social que freqüentará os cursos superiores – o que faz com que a matemática torne-se um filtro educacional e reforce a estrutura de poder vigente. O autor acredita que sabendo que seus antepassados eram capazes de desenvolver a sua matemática, os alunos das classes culturalmente dominadas perceberão a sua própria capacidade de se apropriarem e de desenvolverem Matemática.

Como podemos perceber, todo o questionamento gerado em torno das relações sociais, históricas e políticas através das estratégias propostas por Gerdes tem como objetivo a modificação das crenças em relação à aprendizagem matemática, pela valorização dos conhecimentos matemáticos dos povos dominados culturalmente. Tais evidências levam à preocupação com a valorização de outras formas do pensar matemático, traduzido na capacidade dos povos de organizar, classificar, contar, medir e inferir, preocupação essa que, em sua forma mais ampla, tem suas raízes ligadas ao movimento do multiculturalismo. Nessa perspectiva, impor a Matemática ocidentalizada a todos os povos do planeta é uma agressão às culturas próprias da diversidade étnicas e culturais, não justificada quando se avalia como principal importância da educação a formação de cidadãos e não de matemáticos profissionais. Ao mesmo tempo, trabalhar as produções multiculturais no currículo exige o cuidado de não as apresentar como atividades triviais e marginais à abordagem dos conteúdos, o que reforçaria a imagem de inferioridade de outras sociedades em relação à cultura eurocêntrica. A educação para uma sociedade multicultural exige o respeito pelos conhecimentos prévios dos alunos, o uso de imagens e representações adequadas ao seu meio e a não imposição de modos de pensar e agir estranhos a suas origens, e procura posturas educacionais que permitam preservar a diversidade e eliminar a desigualdade.

Analisando essa mesma questão, veremos que o respeito às diferentes culturas pode mostrar como muitas das dificuldades de aprendizagem são devidas às crenças próprias de um grupo social. Um interessante exemplo é encontrado no estudo do ICMI – 6 sobre multiculturalismo na História da Matemática:

> "*Ao introduzirmos variáveis ou equações falamos sobre x como incógnita. Muitas crenças tradicionais dos nativos das ilhas do Pacífico associam incógnitas com magia, espíritos do mal e coisas a serem evitadas. Assim, nos estágios iniciais da álgebra os estudantes dessas ilhas irão achar* $\_\_ + 3 = 7$ *com mais facilidade que* $x + 3 = 7$*. De modo similar, consideremos esta questão: 'Se metade de todas as crianças nascidas são meninos e o sexo da criança é independente de sua data de nascimento, qual é a probabilidade da quarta criança de uma família ser menino se as três primeiras são meninas?' Perguntar isso em alguns grupos culturais pode muito bem ter como retorno a resposta que a suposição não é válida, pois o sexo da criança depende de Deus e não do acaso"* (Grugnetti & Roger et al, 2000, pg. 49, tradução nossa).

A compreensão da necessidade de se trabalhar as crenças, os conhecimentos prévios e a diversidade cultural dos alunos é um dos focos da etnomatemática. O trabalho de Gerdes na África do Sul é uma das abordagens possíveis da etnomatemática.

2.5 - A abordagem sociocultural da História da Matemática pela etnomatemática

No Brasil, Ubiratan D'Ambrósio coordena um programa de pesquisa sobre geração, organização intelectual e social e difusão de conhecimento interculturais. No desenvolvimento de sua crítica da imposição da cultura do dominador aos povos indígenas, afro-americanos, não-europeus, trabalhadores oprimidos e classes marginalizadas, surgiu o termo etnomatemática:

> "*... para significar que há várias maneiras, técnicas, habilidades (ticas) de explicar, de entender, de lidar e de conviver com (matema) distintos contextos naturais e socioeconômicos da realidade (etnos)*" (D'Ambrósio, 2005, p. 114).

Partindo dessa definição, ele diz que a disciplina que denominamos "matemática" seria na realidade uma etnomatemática, ou seja, a desenvolvida na Europa mediterrânea, com influências das civilizações indiana e islâmica e que adquiriu sua forma atual e seu caráter de universalidade a partir dos século XVI e XVII, com o desenvolvimento das ciências e tecnologias do modernismo. Assim, as características de precisão, rigor e exatidão teriam origens na Antiguidade grega e nos países centrais da Europa, principalmente Inglaterra, França, Itália e Alemanha, na Idade Moderna. Desse modo, para esse autor, encontramos a preocupação com a contextualização da matemática em qualquer programa de educação e a verificação de que o momento social está na origem do conhecimento:

> "*Contextualizar a matemática é essencial para todos. Afinal, como deixar de relacionar os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia Antiga? Ou a aquisição da numeração indo-arábica com o florescimento do mercantilismo europeu nos séculos XIV e XV? E não se pode entender Newton descontextualizado (..)"* (D'Ambrósio, 2005, p. 115).

Contra a imposição da matemática eurocêntrica a alunos com raízes culturais diferenciadas, D'Ambrósio (2005) cita o ensino do sistema decimal a populações indígenas que sempre resolveram seus problemas com seus sistemas numéricos específicos. Também contesta a tentativa de afirmar que a "etnomatemática do branco" é mais eficiente que a "etnomatemática do índio", afirmando que, ao removermos as questões do contexto de atuação de determinada etnomatemática elas se tornam falsas questões. O domínio de duas etnomatemáticas, conforme a concepção de D'Ambrósio, ofereceria novas possibilidades de enfrentamento de questões em seus contextos específicos: o índio ao aprender a matemática do branco poderia negociar em melhores condições, por exemplo. Entretanto, note-se que não há a adoção da matemática do branco e sim uma nova aprendizagem sobre atuação em novos contextos, preservando e valorizando a cultura indígena.

Uma importante crítica feita à etnomatemática nesse sentido é a de que não podemos nos preocupar somente com os conhecimentos próprios de cada cultura e sim em caminhar em direção ao conhecimento universalmente aceito, que garantirá a inserção social dos indivíduos. Assim, embora a etnomatemática possa considerar a matemática acadêmica como "hostil" às características culturais de determinados grupos, tal fato não justifica que a matemática formal não lhes deva ser apresentada:

> "*Quando discutimos a performance dos estudantes na escola, nós não devemos olhar (apenas) para seu passado, mas para seu futuro. O futuro dá razões e sonhos, ou os destrói. Ações, e seu desenvolvimento epistêmico posterior, são também orientados pela percepção pessoal atual do futuro. (...) A percepção dos estudantes sobre um assunto é parcialmente determinada por suas percepções de suas oportunidades na sociedade. Se os estudantes não vêem nenhuma possibilidade de carreira possível na qual a competência matemática tenha um papel significante, então torna-se difícil para os estudantes decidirem entrar nesse assunto. (...) As oportunidades feitas possíveis na escola/vida são essenciais para o modo como a criança concebe as situações de aprendizagem"* (Vithal & Skovsmose, 1997, p. 146, tradução nossa).

Assim, a matemática acadêmica não poderia ser ignorada no contexto escolar. Concordamos com Rosa & Orey (2005, p. 133) quando esses autores afirmam que se a etnomatemática mantiver um direcionamento somente antropológico e etnográfico, levará pesquisadores e educadores a associarem-na a uma perspectiva folclorista e "primitivista".

Para esses autores, além de evidenciar o caráter cultural da matemática, a etnomatemática também deve proporcionar aos alunos uma ação pedagógica que conecte as diferentes práticas matemáticas com as práticas próprias da matemática acadêmica. A ação pedagógica da etnomatemática utilizaria a noção de cultura matemática como ferramenta e teria como objetivo estudar como outras matemáticas influenciaram a construção da matemática acadêmica, valorizar e conectar a cultura matemática de diferentes grupos à prática acadêmica da matemática.

D'Ambrósio (2005) propõe que se compatibilize cognição, história e sociologia do conhecimento com a epistemologia social para se fazer um enfoque multicultural do conhecimento e garantir relações interculturais democráticas. Assim, para ele as práticas de poder implícitas na adoção de conteúdos e metodologias teriam que ser flexibilizadas para garantir as heranças culturais dos diferentes povos e respeitar a diversidade cultural do planeta:

> "*A alternativa é reconhecer que o indivíduo é um todo integral e integrado, e que suas práticas cognitivas e organizativas não são desvinculadas do contexto histórico no qual o processo se dá, contexto esse em permanente evolução*" (D'Ambrósio, 2005, p. 118).

Nesse sentido, D'Ambrósio (2005, p. 102) afirma que a etnomatemática se apresenta como um programa que pesquisa a história e a filosofia da matemática, com reflexos na educação.

Desse modo, como a etnomatemática busca compreender as várias dimensões do conhecimento matemático, não tem uma caracterização única, uma definição que abarque todos os seus significados. Nesse sentido, tem havido uma preocupação de buscar os caminhos possíveis da ação pedagógica da etnomatemática:

> "*A etnomatemática pode ser interpretada como uma reação ao imperialismo cultural que é construído na teoria da modernização. A principal preocupação para a etnomatemática é vir a identificar as competências matemáticas culturalmente situadas e, ao invés de pensar em um currículo importado, pensar em termos de auto-desenvolvimento. O currículo deve ser relacionado com as já existentes competências em matemática. (...) A etnomatemática se refere a um grupo de idéias envolvidas com*

história da matemática, as raízes culturais da matemática, a matemática implícita nas atividades diárias e a educação matemática. (...) Entretanto, a etnomatemática não se refere apenas à perspectiva da educação matemática, mas também à matemática implícita de um grupo social, como quando falamos da matemática implícita na carpintaria como etnomatemática dos carpinteiros. Assim, 'etnomatemática' pode se referir a certa prática como também ao estudo dessa prática. No que segue que nós usamos 'etnomatemática' em ambos os sentidos, embora pensemos primariamente em etnomatemática como incluindo certas idéias educacionais e uma perspectiva de pesquisa" (Vithal & Skovsmose, 1997, 133, tradução nossa).

Procurando construir uma definição, Barton (2004, p.53) não se refere a prática educacional alguma e diz que:

"*Etnomatemática é um programa de pesquisa do modo como grupos culturais entendem, articulam e usam os conceitos e práticas que nós descrevemos como matemáticos, tendo ou não o grupo cultural o conceito de matemática."*

Segundo Barton (2004, p. 59) podemos categorizar os estudos etnomatemáticos em três dimensões: tempo, cultura e matemática. Classificando a etnomatemática pela categoria tempo, podemos abordar as concepções de um grupo cultural antigo ou contemporâneo. A dimensão cultural pode se referir a um grupo étnico específico, por exemplo, um modelo de tecelagem de uma certa tribo, ou a um grupo social ou vocacional, como a matemática dos carpinteiros. Finalmente, a dimensão matemática da etnomatemática refere-se ao relacionamento das idéias matemáticas com a matemática em si. Podemos compreender melhor esta concepção em Barton (2004, p. 55):

"*A etnomatemática não consiste nas idéias matemáticas de outras culturas, nem é a representação dessas idéias pela matemática. Esses construtos podem ser parte da etnomatemática, mas não são sua essência. A etnomatemática é uma tentativa de descrever e entender as formas pelas quais idéias, chamadas pelo etnomatemáticos de matemáticas, são compreendidas, articuladas e utilizadas por outras pessoas que não compartilham da mesma concepção de 'matemática'. Ela tenta descrever o mundo matemático do etnomatemático na perspectiva do outro. Assim, como na antropologia, uma das dificuldades da etnomatemática é descrever o mundo do outro com os seus próprios códigos, linguagem e conceitos.*

> *Neste sentido, a etnomatemática está mais para a história da matemática do que para a matemática. Uma história da matemática deverá conter muita matemática, mas trata em primeiro lugar da forma como as idéias originaram-se e desenvolveram-se dentro da matemática, não das idéias matemáticas em si mesmas. A história da matemática e a etnomatemática se sobrepõem. Contudo, a etnomatemática tenta desvelar como essas idéias eram percebidas no seu tempo e como as atividades matemáticas culturais do presente foram derivadas das do passado; a história da matemática tenta desvelar como essas idéias desenvolveram-se e como evoluíram até a matemática."*

Para Barton (2004, p. 56) a etnomatemática seria uma tentativa de entender como as diferentes concepções matemáticas desafiam a natureza universal da matemática: o etnomatemático usa os conceitos da matemática para interpretar a maneira pela qual outra cultura reconhece práticas e conceitos particulares, provocando um diálogo entre as idéias de outra cultura e os conceitos convencionais da matemática capaz de criar uma nova matemática pela adaptação a novas idéias. Por outro lado, quando o etnomatemático estuda uma cultura contemporânea pode encontrar pessoas que se interessem pela matemática do etnomatemático e influenciar na construção social do conhecimento em um nível cultural, com o reexame de seus conceitos na perspectiva de outra cultura.

Assim, enquanto a matemática evolui internamente, pela construção de uma idéia que incorpora outras idéias, a etnomatemática evolui com formas novas substituindo formas velhas, pelo resultado de mudanças sociais: a etnomatemática, em íntima relação com a sociedade, apresenta um aspecto psico-emocional que a diferencia da matemática: a etnomatemática é validada pelas visões de mundo do indivíduo e a matemática é racional e validada por uma hierarquia de autoridade (Barton, 2004, p. 49). Desse modo, podemos dizer que a etnomatemática apresenta um caráter de relativismo matemático: novas idéias podem criar concepções matemáticas novas, não subordinadas às já existentes ou alguma nova generalização mais abrangente. O etnomatemático estará sempre procurando superar as convenções e os símbolos que os matemáticos usam para expressar os fenômenos matemáticos e poderá criar ferramentas matemáticas novas durante este processo. Entretanto, encontramos na etnomatemática também a presença do sentido universal da matemática: o etnomatemático só identifica os aspectos matemáticos de uma cultura por possuir uma cultura matemática e, ao reconhecer uma categoria matemática, faz referência à categoria convencional desse conhecimento. Assim:

> "*Para esclarecer a dicotomia universal/relativo, pode ser útil a distinção entre relatividade histórica e relatividade contemporânea. Se nós nos perguntarmos se existem, verdadeiramente, outras matemáticas com poder equivalente ao que comumente entendemos com matemática, então a resposta é não. Por outro lado, se nós nos perguntarmos se a matemática poderia ter sido diferente, então a resposta é sim.*
>
> *Historicamente, a linha do progresso da matemática poderia ter sido outra. Não há maneira de sabermos que teoria da matemática nós poderíamos ter agora, nem se esta teoria hipotética seria mais compreensível, mais sofisticada, mais aplicável (ou 'melhor' de acordo com algum critério de progresso). A evidência de que a história poderia ter sido diferente é necessariamente circunstancial. Isto requer um pensamento experimental do tipo 'e se', e isto é o porquê de termos a forte ilusão de que existe uma única matemática. É tarefa da sociologia da matemática identificar os lugares onde idéias divergentes poderiam ter mudado o curso da história, e rastrear aqueles caminhos da maior distância possível"* (Barton, 2004:59).

Desse modo, a sociologia da matemática também pode participar das problematizações feitas à História da Matemática: contrapondo-se à ideologia do individualismo, a sociologia integra os grupos, as diferentes práticas sociais e o conhecimento com uma abordagem crítica e qualificadora.

As preocupações recentes com a diversidade cultural implicam uma Educação Matemática que traga à tona os conhecimentos matemáticos fora da matemática escolar e os saberes matemáticos não formais e que transforme a sala de aula em um espaço para diálogo entre as diferentes formas de se fazer matemática, para a análise dos discursos da matemática acadêmica e da matemática escolar.

Nesse sentido, Miguel (2005) defende um programa de pesquisa que investigue o modo como os campos da história, da filosofia e da sociologia da educação matemática poderiam fazer parte, de forma crítica e qualificadora, da formação inicial e continuada de professores de matemática. Esses campos de investigação deveriam ter como objeto a educação matemática escolar:

> "*Mesmo que falar em educação matemática escolar em vez de matemática escolar seja uma opção, essa opção não constitui, a nosso ver, uma mera escolha terminológica sem maiores conseqüências. Ela nos remete, antes de mais nada, ao controvertido problema de se saber em que medida e de que formas as práticas sociais de caráter educativo – escolares ou não – participariam, de forma ativa e criativa, da produção de cultura matemática ou de cultura de um modo geral*" (Miguel, 2005, p. 143).

Além disso, Miguel (2005, p. 144) afirma que embora a prática social da educação matemática não seja percebida como tão importante quanto a prática social da produção matemática, a educação matemática é absolutamente necessária para que essa produção se realize, sobreviva e cumpra os seus propósitos sociais. Continuando, lembra que foi por meio da atividade de ensinar matemática que a própria atividade matemática se profissionalizou na Europa, no final do século XIX, criando a identidade profissional do matemático. Ao percebermos a escola como espaço de produção cultural, estaríamos diante de um problema simultaneamente histórico, sociológico e filosófico que nos levaria a questionar o fato de se pensar a educação matemática escolar como "*uma mera correia de transmissão acrítica de uma cultura matemática considerada pura, universal, formal, autônoma, absolutista, não-controvertida, certa e neutra*" (Miguel, 2005, p. 147).

Assim, esse autor defende a realização de esforços para que as fronteiras entre os campos de investigação da história, da filosofia e da sociologia da educação matemática escolar se tornem cada vez indistintas, como uma forma de possibilitar a pesquisa sobre como os diversos fatores interferem na prática social da educação matemática escolar.

Considerando então a importância da atuação do professor para alcançar em sala de aula um olhar que contemple as multifacetadas visões de uma pintura externalista da História da Matemática, com sua complexidade discursiva própria e suas amplas possibilidades de trabalho, apresentaremos no próximo capítulo alguns tópicos relacionados à integração da História da Matemática na escola.

Capítulo 3

Os múltiplos olhares da escola na integração da História na Educação Matemática

Neste capítulo procuraremos fazer uma descentralização de foco que permita enxergar a integração da História da Matemática em Educação Matemática com múltiplos olhares. Olhares para a atuação do professor; para as possibilidades de atribuição de significado ao texto matemático pela História da Matemática; para as relações entre a escola e o conhecimento matemático; para a formação de professores; para o uso de fontes originais; para as abordagens direta e indireta da História da Matemática no ensino e para a proposta de Miguel & Miorim (2004) sobre "histórias pedagogicamente vetorizadas". Olhares atentos, curiosos e investigativos, comprometidos com as crenças e convicções dos seres humanos que são contemplados, mas que também contemplam, que recebem olhares e os retornam. Olhares que ao focarem a escola a vêem refletida em si mesmos, que ao levarem a visão constituída da Matemática trazem o fazer da escola como prática social da matemática. Olhares que ao apresentarem a dialogicidade da investigação matemática embutida no trabalho com História da Matemática retornam com o crescimento profissional do professor e o enriquecimento cognitivo, afetivo e emocional do aluno. Olhares que falam e escutam.

3.1 – O papel do professor na integração da História na Educação Matemática

Ao analisar as experiências acumuladas sobre o uso da história na educação matemática, Furinghetti (1997) apresenta algumas questões básicas: o grande entusiasmo dos professores envolvidos na integração da História da Matemática à Educação Matemática e sua confiança na utilização da história; a não homogeneidade da formação e treinamento dos professores em história da matemática, com conseqüente diferenciação nas fontes de pesquisa que eles utilizam; as opiniões favoráveis ao uso da história em sala de aula baseadas em impressões subjetivas e não em estudos sistemáticos e regulares sobre os retornos do curso; cada experiência é um "micro-mundo": não existe uma rede organizada de classes e professores com experimentos análogos, o que torna difícil comparar resultados e estabelecer caminhos para a pesquisa; a necessidade de um maior intercâmbio de informações entre os pesquisadores de história da matemática e os pesquisadores em educação matemática.

Para Furinghetti (1997) é importante analisarmos o papel do professor no processo de interação entre a história da matemática e a educação matemática. Segundo ela, por um lado o professor age como um filtro das sugestões apresentadas pelos que desenvolvem os currículos e pelos historiadores da matemática; por outro lado, os professores fornecem os retornos, 'outputs', dados pelos alunos que permitem a avaliação das experiências.

Para nós, um dos pontos essenciais para a integração da História da Matemática na Educação Matemática está centrado no papel do professor: os valores que influenciam na sua visão da História da Matemática; suas preocupações com os fatores emocionais, sociais e culturais nos processos de aprendizagem; o grau de conhecimento histórico e matemático que ele possui; sua formação inicial e continuada e suas possibilidades de acesso à bibliografia especializada entre outros aspectos.

Após fazer uma pesquisa com professores sobre a relevância da disciplina História da Matemática na formação de professores, Silva (2001, p. 158) elenca as seguintes funções:

> "*função diretamente relacionada ao conhecimento da História da Matemática; função metodológica e epistemológica; função utilitária visando ao uso da História da Matemática em sala de aula; função diretamente ligada ao conhecimento da história da Educação Matemática.*"

Silva (2001) relaciona as funções da História da Matemática na formação de professores com as diferentes concepções de matemática. Para aqueles que vêem a Matemática como uma ciência pronta e acabada e o ensino como uma relação de dominação, a História da Matemática encontra pouco espaço no processo de ensino-aprendizagem. Em contrapartida, estudar a História da Matemática como uma das múltiplas manifestações culturais da humanidade torna o conhecimento matemático significativo e facilita o entendimento das relações entre este conhecimento e o homem, em um dado contexto cultural.

Furinghetti (1997) considera que para discutirmos o uso da história da matemática em educação matemática precisamos notar que existem duas correntes principais de intervenção da história no ensino de matemática: a primeira objetiva promover a matemática, a outra refletir sobre matemática. Enquanto a primeira corrente está ligada ao aspecto social da disciplina e a sua imagem, a segunda liga-se aos aspectos interiores à disciplina, como o seu desenvolvimento e seu entendimento. Para essa autora, as intervenções da história na educação matemática que buscam refletir sobre a matemática são as mais complexas. Elas podem se referir a intervenções locais, quando introduzem um conceito e/ou um procedimento que são específicos de um único caso, ou se reportarem a intervenções globais, nos casos em que o uso da história abrange um modo próprio de trabalhar com diferentes tópicos e situações. Deste modo, as abordagens ingênuas que buscam transpor passagens históricas diretamente para a sala de aula permanecem em um nível superficial e não alcançam as situações didáticas que são significativas para a aprendizagem. Por esta razão, muitos autores preferem a expressão "integração da história" ao invés da expressão "uso da história". A palavra "integração" pressupõe um uso da história no ensino de matemática que se desenvolve de acordo com os seguintes passos: escolha dos objetivos no ensino de matemática e da história da matemática; desenvolvimento destes objetivos, de acordo com as especificidades dos dois campos envolvidos e análise dos resultados cognitivos obtidos por pesquisas educacionais e epistemológicas (Furinghetti, 1997, p. 61).

Como a integração da história pressupõe um trabalho com a linguagem específica da Matemática, consideramos oportuno nesse momento fazermos uma breve apresentação sobre a constituição dos discursos sintáticos e semânticos da Matemática. Assim, poderemos perceber como a História da Matemática pode contribuir para que o professor reconheça a gênese dos textos matemáticos formais, desvinculados dos problemas e intuições que serviram de base para sua produção e adquira um meta-saber sobre o discurso matemático que lhe permita avançar em sua prática profissional.

3.2 - As possibilidades de atribuição de significado ao texto matemático pela História da Matemática

Para construir o raciocínio formal próprio da matemática, a escola precisa colocar os indivíduos em contato com o discurso e com a linguagem próprios ao desenvolvimento deste tipo de raciocínio científico.

A especificidade do ensino da matemática reside principalmente na necessidade de se reestruturar significados intuitivos ligados ao cotidiano para a linguagem matemática, que é regida por regras precisas, pelo simbolismo e pela abstração. A formalização da matemática garante a criação da própria matemática, pois permite inferências e deduções e o papel do professor se dá em sentido contrário, ao ter que ajudar o aluno a aplicar o simbolismo matemático em situações cotidianas, fazendo a relação entre os algoritmos aprendidos na escola e os conhecimentos matemáticos que o aluno traz de seu contexto social.

Podemos perceber dois aspectos distintos de se tratar a linguagem matemática: o aspecto semântico, que privilegia a conceituação, e o aspecto sintático, que privilegia a manipulação de símbolos e fórmulas, sem se deter na significação dos mesmos. Para Gómez-Granell (2002, p. 29), a explicação mais generalizada para a dificuldade dos alunos em dominar a linguagem matemática é

> "*o caráter mais sintático que semântico, mais baseado na aplicação de regras que na compreensão do significado"*

atribuído ao ensino de matemática. Entretanto, para ela, mais do que na falta de compreensão conceitual, a dificuldade encontra-se na aprendizagem de uma linguagem específica de características muito diferentes da linguagem comum e no ensino excessivamente formalista, que causa uma aplicação cega dos procedimentos, sem saber o seu significado.

Nesse sentido,

> "*por um lado, a linguagem natural desempenha uma função primordial na criação de novos símbolos matemáticos, garantindo o vínculo com o objeto de referência e impedindo a perda de significado provocado por todo processo de abstração; por outro, é essencial para devolver aos símbolos matemáticos um significado referencial, possibilitando assim uma das funções essenciais da matemática: penetrar nas ciências do mundo externo – física, química, biologia, economia, sociologia, psicologia – e na vida cotidiana*" (Gómez-Granell, 2002, p. 35).

A aprendizagem significativa da matemática irá depender do uso da linguagem natural para dar sentido à linguagem simbólica. Ao mesmo tempo, o aluno também deve dominar os procedimentos formais necessários para fazer as inferências e abstrações próprias do saber matemático, independentes de situações problema. Aprender a linguagem matemática não pode se tornar a mecanização de uma série de regras e para tanto, o professor precisa ser criativo para conseguir associar os aspectos sintáticos e semânticos no ensino.

As sugestões de Gómez-Granell (2002) para um ensino que garanta o uso adequado da linguagem matemática baseiam-se principalmente em um ensino contextualizado dos conceitos e procedimentos matemáticos, através da resolução de problemas; da aceitação dos procedimentos próprios, intuitivos ou não formais, tidos como instrumentos para explorar o significado dos conceitos e procedimentos matemáticos; do uso de modelos concretos que permitam entender a semântica da operação ou transformação (manipulativos, verbais, gráficos ou até de caráter simbólico, como os modelos aritméticos para as regras algébricas); do uso de linguagens diferenciadas (linguagem materna, esquemas, desenhos, símbolos, etc.) para expressar as transformações matemáticas; de se estimular a abstração progressivamente e de se trabalhar os mesmos conceitos e procedimentos em diferentes contextos.

Assim, a atuação do professor está constantemente sendo requisitada para fazer as conexões entre o que se pretende ensinar, os conhecimentos prévios dos alunos, as ampliações de significação e de sintaxe esperadas, as necessidades de contextualização do conteúdo, o trabalho com valores e as possibilidades de conseguir que o aluno recrie o conhecimento matemático a partir da cultura local de sua comunidade em direção à cultura conceitual e abstrata das disciplinas escolares. Nesse sentido, a História na Educação Matemática pode proporcionar as condições para o diálogo necessário à uma apropriação significativa e crítica do conhecimento matemático, por meio de abordagens que considerem as características discursivas e extra-matemáticas da história das idéias matemáticas.

Desse modo, novas regiões de inquérito se apresentam à constituição de uma História da Matemática em Educação Matemática que contemple a história de hoje e do que se faz em sala de aula na constituição dos saberes pedagógicos. Como característica marcante das novas investigações, temos a constatação da importância de se distinguir a linguagem da Matemática no contexto científico e no contexto pedagógico.

Em Bicudo & Garnica (2003) temos uma longa discussão sobre os discursos da Matemática e os textos que lhe são próprios. A manifestação do discurso "científico" da Matemática é ligada principalmente à pesquisa e ao trabalho dos matemáticos profissionais, em seus grupos de discussão, aceitação e divulgação por meio de textos especializados que admitem a complementação e a circulação de idéias necessárias à produção continuada e cumulativa do conhecimento. O texto científico escrito é formal e precisa ser complementado na apresentação ao grupo de especialistas que o valida com explicações orais sobre sua gênese, não incluída no texto escrito, por meio do uso da língua materna. Já o discurso pedagógico é rico em formas de apresentação, nas quais interagem posturas, metodologias, didáticas, textos escritos e falados para a comunicação do conhecimento já solidificado, disponível e reproduzido, em um modo quase-formal. Para a compreensão dos discursos matemáticos precisamos de uma interpretação dos textos que lhe são próprios, que provoque a meta-compreensão dos conteúdos em seu cenário contextual e suas decorrências. Com isso, as práticas científicas e pedagógicas da Matemática são significadas social e historicamente na sala de aula nas interpretações dos discursos trabalhados. Assim,

> *"O texto matemático tem um estilo que o diferencia de qualquer outro texto. Construído a partir de uma gramática própria, a Lógica Matemática, e explicitado com os recursos da linguagem artificial, no sentido de ser constituída por símbolos que pretensamente dispensam semântica, o texto matemático é apresentacional no sentido de ocultar os caminhos de elaboração das argumentações nele expostas. Re-traçar essa trajetória de construções é um dos papéis que alunos e professores têm à frente"* (Bicudo & Garnica, 2003, p. 55).

Na produção de significados dos textos do discurso pedagógico da Matemática ocorre uma reconstrução de conhecimentos já disponíveis, em ambientes heterogêneos que exigem o uso de aproximações possíveis entre termos matemáticos e termos da língua materna, o apoio de metáforas ilícitas que sejam formas de aproximação ao que o texto diz e até o apoio de erros conceituais. Assim, é por meio do reconhecimento das teias de produção do texto matemático, dos jogos e negociações que fazem dele o que é, das articulações com sua gênese extra-textual que o professor pode assumir uma postura crítica frente ao texto matemático.

Com essa visão filosófica de interpretação do texto matemático em Educação Matemática, justificamos dois pontos importantes de nossa pesquisa: em primeiro lugar, buscar abordagens da História da Matemática que dêem o contexto de produção dos conhecimentos matemáticos que permitam significá-los e em segundo lugar entender a reprodução do conhecimento matemático na escola como uma instância de produção de novos significados para os conhecimentos matemáticos. Pelo modelo da tranposição didática de Chevallard, o conhecimento adquirido na escola não é o conhecimento cotidiano e também não é o conhecimento científico: as adaptações, simplificações e outras transformações que ocorrem na transmissão do conhecimento científico produziriam um "conhecimento escolar":

> "*os conhecimentos são apresentados como algo acabado, despersonalizado, socialmente neutro, resultado da aplicação de um rigoroso método dedutivo do qual não participaram a intuição, a dúvida, a controvérsia ou o erro. O conhecimento científico aparece como um conhecimento definitivo e fundamentado logicamente, completamente diferente do pensamento cotidiano*" (Gómez-Granell, 2002, p. 20).

Em sentido contrário, os historiadores da ciência têm percebido na prática da sala de aula de matemática uma instância de desenvolvimento de práticas matemáticas ligadas à circulação de conhecimentos matemáticos que permite, entre outras coisas, que a própria matemática se renove em relação a outras práticas sociais.

3.3 - As relações entre a escola e o conhecimento matemático

As discussões sobre as relações entre os saberes escolares (os produzidos no interior da instituição escola) e os saberes científicos (os produzidos pelos cientistas) têm sido reelaboradas pelos historiadores da ciência que vêem a dinâmica das ciências apoiada na circulação de objetos e de saber-fazer. Essa visão indica um caminho para se considerar o saber escolar como uma forma de saber científico, uma vez que o saber escolar é um dos modos segundo os quais as práticas científicas podem ser expressas e contesta o modelo da transposição didática de Chevallard (Valente, 2001, p. 212-216).

Em Valente (2001, p. 216) encontramos uma referência ao exemplo dado por Bruno Belhoste, pesquisador da história dos saberes junto ao INRP – *Institute National de Recherche Pédagogique* de Paris em uma conferência apresentada nesse mesmo instituto em janeiro de 1995: a geometria descritiva seguiu o caminho contrário sugerido pelo modelo que vê na escola uma instância de transmissão e vulgarização do conhecimento matemático: criada no século XVIII nas escolas de engenharia da França foi repassada para a comunidade de matemáticos da época. Assim, não existiria uma esfera autônoma de produção teórica, ao contrário, as várias atividades intelectuais relacionadas às diferentes práticas que envolvem a matemática em diferentes contextos seriam partes integrantes da produção/invenção do saber matemático:

> "*Considerando, então, que a produção científica está sempre envolvida em contextos específicos, responsáveis por seu desenvolvimento, é parte integrante dessa produção, a sua reprodução. Assim, o ensino caracteriza-se como uma dessas modalidades. A análise dessa modalidade de reprodução revela não somente o caráter importante da transmissão do saber, mas também o papel que o ensino tem, na própria constituição da Matemática enquanto ciência*" (Valente, 2001, p. 217).

Dessa forma, as relações entre os saberes tradicionalmente aceitas, que vêem a comunicação e a transmissão do conhecimento matemático como atividades secundárias em relação à sua produção caem por terra: o historiador não teria como separar a produção matemática de sua reprodução. Ao contrário, focaria seus estudos na circulação dos textos e das práticas que trabalham o conhecimento matemático:

> *"A redefinição do entendimento do que são práticas científicas, operada pela Nova História das Ciências, nos dá a possibilidade de perceber os saberes escolares, e em particular a Matemática Escolar, como uma das formas de apropriação e reelaboração da prática matemática. Fica, desse modo, posta em xeque a escrita tradicional da História da Matemática. Evidencia-se uma Nova História da Matemática. Uma nova escrita para a história da matemática que rejeita o texto cronológico, recheada de biografias de matemáticos ilustres e suas histórias desencarnadas dos contextos históricos e sociais. Inserida no movimento maior de reescrita da história das práticas científicas, uma nova história para a matemática busca evidenciar, dentre outras coisas, o significado de* ***prática teórica****, qual seja, o da dimensão de saber-fazer inerente ao trabalho matemático-teórico, que repousa sobre um conjunto de procedimentos selecionados, que é sempre material e culturalmente situado (Pestre, 1996, p.29)*" (Valente, 2001, p. 216).

Assim, a reescrita da História da Matemática deveria abordar o contexto cultural da produção e da circulação dos conhecimentos matemáticos, incluindo a Matemática Escolar como uma das formas de apropriação e reelaboração da prática matemática. Com esses argumentos, Valente (2001, p. 218) apresenta suas considerações no sentido de se rejeitar, no âmbito da história cultural da matemática, a separação da escrita da história da matemática e de sua forma escolar. Para este autor, teríamos a possibilidade de entendermos com maior nitidez as práticas do fazer matemático por meio de um estudo histórico da profissionalização do meio matemático, da análise da estruturação didática que orienta o campo intelectual da produção matemática e da contribuição das atividades didático-pedagógicas ao desenvolvimento das práticas matemáticas.

Miguel (2005, p. 143) também aborda essa temática. Para ele, falar em *educação matemática escolar* em vez de *matemática escolar* nos remete a uma análise da importância do questionamento sobre as diferentes formas e diferentes medidas em que as práticas sociais de caráter educativo participaram da produção da cultura matemática ou da cultura de um modo geral. Assim, a atividade matemática não se manifestaria somente na prática social dos indivíduos que se propõe a produzir cultura matemática:

> "*Isto implica que os chamados matemáticos profissionais – pelo fato de serem também professores, mas não exclusivamente por essa razão – realizam uma atividade educacional, bem como produzem cultura educacional – ainda que não seja essa a dimensão intencional, consciente e predominante de sua atividade. Mas implica que outras comunidades de prática – nela incluída, é claro, a comunidade de educadores matemáticos – também realizam atividade matemática e também produzem cultura matemática – ainda que não seja essa a dimensão intencional, consciente e predominante de sua atividade*".

Miguel (2005, p. 148) acredita que investigações comparativas desenvolvidas nos campos da história, filosofia e sociologia da educação matemática poderiam revelar o jogo de relações assimétricas de poder em que a educação matemática escolar se acha envolvida:

> *"Tais saberes poderiam subsidiar uma avaliação qualitativa mais profunda daquilo que atualmente ocorre nas salas de aula, tais como: as resistências dos estudantes ao processo de apropriação da cultura matemática; as dificuldades apresentadas pelos professores no processo de recepção, ressignificação e transmissão da cultura matemática; a artificialidade das práticas escolares que envolvem a matemática; a natureza algorítmica e pouco significativa da educação matemática escolar, etc."*

Como exemplo, Miguel (2005, p. 148) mostra que não basta investigar apenas a natureza das práticas educativas atuais que envolvem a trigonometria: é preciso também investigar como e porque essas práticas escolares se constituíram e se transformaram e que influências elas podem ter recebido de outras práticas sociais, como topografia, navegação, astrologia, astronomia etc.

Para Schubring (1998) um dos grupos sociais que agem como sujeitos de produção e de transformação do saber matemático é a escola, e a elementarização do conhecimento matemático na transformação de saber matemático para o saber escolar é ainda um campo aberto de pesquisa sobre a forma de influência dos grupos sociais na produção e transformação do saber. Assim, ele contesta a forma unilinear de concepção do trânsito dos conhecimentos matemáticos, presente na teoria da *transposição didática* de Chevallard. Ele cita o exemplo da Prússia do século XIX, época em que os professores de ginásio formaram um grupo mantenedor de saberes que ao mesmo tempo produziam saberes matemáticos, reafirmando a função produtiva do ensino para o desenvolvimento da Matemática.

Nesse mesmo sentido, Schubring (1998) faz uma descrição, normalmente não discutida na História da Matemática, das diferentes formas de aceitação das quantidades negativas como legítimos conhecimentos matemáticos na França, na Inglaterra e na Alemanha, os três países com maiores comunidades de matemáticos na segunda metade do século XVIII. Enquanto na Inglaterra havia uma rejeição quase absoluta dos números negativos, na França havia um posicionamento ambivalente e na Alemanha ocorria uma clara aceitação, principalmente em decorrência dos posicionamentos filosóficos diferentes em cada país.

Como conseqüência, na Inglaterra a subtração só era possível quando o subtraendo não fosse maior que o minuendo e negava-se que existissem duas raízes quadradas de um mesmo número e duas raízes para uma equação do segundo grau. Na Alemanha, com a aceitação da “teoria das grandezas opostas”, que abria a possibilidade das grandezas serem opostas e anularem-se mutuamente, a subtração era sempre possível e, antes de 1800, já se chamava a atenção para a diferença entre o sinal da operação e o sinal que precede o número e entre o conceito de grandeza e o conceito puro de número. Na França, encontramos na Enciclopédia dois artigos com posições opostas: enquanto o artigo de d’Alembert rejeitava os números negativos como solução de um problema, um outro artigo admite os números negativos como equivalentes aos positivos e designados como “menores que nada”. Depois de 1800, com a negação feita por Carnot de que a álgebra tivesse uma função autônoma e a afirmação de que ela apenas traduzisse conceitos e asserções geométricas, houve um rompimento com a relativa aceitação dos números negativos. A partir dessa não-aceitação, houve na França uma separação radical entre álgebra e aritmética: a aritmética ocupava-se somente dos números positivos e os números negativos foram introduzidos na álgebra somente a partir da segunda metade do século XIX.

Dessa forma, o ambiente cultural formado por uma comunidade de matemáticos se apresenta como um sujeito social na História da Matemática que estabelece os significados dos conceitos e validam a imposição de teorias e epistemologias. Assim, existe

> "*uma especificidade nacional e cultural do rigor matemático, segundo a qual asserções e teorias que são reconhecidas como parte do saber matemático no interior de uma cultura, numa cultura estranha são rejeitadas como não-matemáticas*" (Schubring, 1998, p. 25).

Ao discutirmos o ensino de matemática, não há como deixar de perceber a forma como a matemática tornou-se o que é devido ao contexto eurocêntrico de sua produção, aceitação, divulgação e reprodução e de que o modo de escrever a História da Matemática pode reforçar a imagem da matemática aceita como ciência como única forma "correta" de matemática existente. Do mesmo modo, ao pensarmos na multiplicidade de abordagens possíveis na História da Matemática em termos de diferentes culturas, diferentes práticas sociais e diferentes relações de poder, percebemos que a História da Matemática escrita em termos de genialidade de alguns matemáticos brilhantes, de nações dominantes política e economicamente ou de raças específicas se torna mais um instrumento de mitificação da Matemática. W. S. Anglin, professor do departamento de Matemática e Estatística da Universidade McGill, em Montreal, no Canadá, é contundente em suas afirmações:

> "*Não há razão pela qual não se possa escrever uma história da matemática de um ponto de vista exclusivamente comunitário. Ao invés de selecionar um único indivíduo para o teorema, o historiador poderia assinalar as capacidades tecnológicas ou as necessidades sociais que foram responsáveis pelo fato. Ao invés de glorificar a pessoa de sorte que conseguiu ser a primeira a realizar a descoberta, o historiador poderia exaltar as idéias éticas da comunidade que a conduziram a*

educar as pessoas de modo que chegassem, inevitavelmente, a essa descoberta" (Anglin, 2001, p. 14).

Para Anglin, as conquistas da Matemática transcendem os limites políticos e genéticos e a pesquisa típica em Matemática é um dos melhores exemplos em termos de cooperação internacional, sendo que a produção cultural de uma sociedade depende do esforço e da criatividade de toda população, que constrói os quadros históricos. Do mesmo modo, ele critica a prática de se contar a História em termos cronológicos, que pode induzir o estudante a construir uma visão estereotipada das sociedades, como a de que os gregos foram os primeiros verdadeiros matemáticos, que na Idade Média não houve produção matemática e que os modernos são simplesmente perfeitos. (Anglin, 2001, p. 17).

Em uma perspectiva semelhante, um interessante trabalho é apresentado em Cury & Vianna (2001), desenvolvido com alunos de Licenciatura em Matemática. A partir da comparação entre diferentes definições encontradas nos livros didáticos sobre ângulos, os autores mostram as conclusões da análise feita pelos alunos sobre as versões apresentadas. Nessa análise, os futuros professores percebem que a decisão sobre a correção ou não de uma definição não é simples e objetiva. Ao contrário, envolve a aceitação dos matemáticos, obediência a critérios aceitos pela comunidade científica e a avaliação do contexto em que a definição será usada. Em relação ao ensino, os futuros professores chegam à conclusão de que a clareza e a concisão de uma definição dependerão das características cognitivas dos alunos e do contexto da disciplina. Os autores citam o exemplo das diferenças de definições nos livros destinados a cursos de Cálculo Diferencial e Integral para estudantes de licenciatura e para estudantes do bacharelado. Por fim, os autores concluem que se o professor tem a crença de que a Matemática pode ser expandida e modificada, sendo uma ciência falível e corrigível como as outras ciências, ele também terá a possibilidade de escolher uma definição que melhor se adapte às necessidades de seus alunos. Desse modo, os autores constroem com seus alunos/futuros professores, num processo de aproximações sucessivas e sínteses provisórias, uma história de práticas pedagógicas do que está acontecendo em sala de aula e que possibilita a mudança de crenças no pensar do professor sobre o rigor matemático, a escrita da Matemática e as maneiras de se abordar os conteúdos na escola.

Por outro lado, entendemos que ao pretendermos uma outra análise da História da Matemática, com uma maior visão dos processos de evolução dos conceitos em seus contextos culturais próprios, podemos, mesmo em relação à História da Matemática tradicional, traduzir as situações de uma forma diferente das normalmente veiculadas nos livros didáticos, que ilustram os tópicos abordados com biografias de matemáticos ilustres, exemplos históricos descontextualizados e pouco significantes para o aluno.

Mesmo em relação ao estudo das biografias de grandes matemáticos, acreditamos que outras leituras podem ser feitas e revelar aspectos unificadores em uma leitura transversal das diversas histórias de vida. Podemos, por exemplo, discutir a questão da afetividade e da capacidade do professor de influenciar positivamente o interesse dos seus alunos pela Matemática, como fizeram Fourier, Monge, Weierstrass, Poincaré e Kronecker, entre outros tantos matemáticos que tiveram um grande número de matemáticos criativos entre seus alunos e mantiveram com eles um constante diálogo humano, caloroso e aberto. Tal discussão abordaria a questão da "dádiva", da necessária doação pessoal, emocional e afetiva que acompanha o trabalho do professor: independentemente do caráter profissional dado à docência, sempre existe o envolvimento pessoal e a influência positiva dos laços sociais é constatável nas biografias de muitos matemáticos por meio de relatos registrados, do prosseguimento pelos alunos das pesquisas iniciadas por seus professores etc.

A questão dos registros dos processos de criação em matemática também pode ser abordada. Gauss, por exemplo, apesar de toda sua força criativa, nunca apreciou lecionar e só guardou as versões finais e corrigidas de seus trabalhos, impedindo um maior entendimento de seus processos criativos pelos que analisaram suas obras. Monge e Cauchy, por sua vez, foram matemáticos-professores que produziram grande quantidade de material didático e também influenciaram seus alunos nesse sentido.

Outra questão importante a ser trabalhada é a qualidade das criações que alguns matemáticos, como por exemplo, Galois e Hermite, alcançaram em Matemática avançada, embora tivessem enfrentado grande dificuldade com a matemática elementar, cheia de regras a serem memorizadas. Uma biografia com essas características serviria como um exemplo para que o aluno não enxergasse como uma limitação sua o não entendimento de alguma parte da Matemática e continuasse investindo esforços para aprender outros conteúdos matemáticos aos quais se identificasse melhor.

Também podemos apontar a importância da formação filosófica de Euler, Cauchy, Jacobi, Kummer, Kronecker e Poincaré para suas produções em matemática e em suas pesquisas e publicações científicas. Com essas releituras, o conhecimento desenvolvido pelos matemáticos criativos adquire uma conotação menos "endeusadora" da convencionalmente apresentada e pode ser discutido em aspectos mais abrangentes e formadores do que quando é posto na forma de uma capacidade extraordinária de pessoas geniais.

Assim, acreditamos que um conhecimento mais amplo da História da Matemática, envolvendo os aspectos sociais, filosóficos e psicológicos da produção, aceitação e divulgação do conhecimento matemático contribuiria para a construção de narrativas que dessem novos sentidos para o ensino da Matemática. Nas palavras de Garnica (2005, p.48):

> *"A Historiografia, no mundo contemporâneo, dilui-se (sem perder sua identidade como historiografia, segundo alguns) numa série de relatos, narrativas, cuja análise não está nas mãos de um único agente estavelmente radicado numa ou noutra região de inquérito. No mundo contemporâneo, numa sociedade facilmente caracterizada como refém da imagem e do consumo, essa massa de gêneros historiográficos tem acolhido como analistas sociólogos, antropólogos, artistas e investigadores culturais das mais diversas procedências num contínuo, necessário e, segundo avalio, produtivo diálogo. As fronteiras inter-áreas tornam-se fluidas, e já são mais negociadas e negociáveis as proibições quanto a cruzá-las. E não se poderia pensar a Historiografia fora desse panorama atual de interlocuções, pois é nesse presente que surgem as questões do historiador (ou àqueles que têm os historiadores como interlocutores mais próximos). A História é – e parece não haver mais embate algum acerca dessas disposições de Marc Bloch – o estudo dos homens no tempo, vivendo em comunidade. É uma história-problema que elege temas presentes que podem ser analisados a partir de um olhar retroativo, uma busca ao passado (próximo, ou remoto). Uma história que também permite ser história do agora. Uma história que, segundo Souza, nos alerta que o passado comportava inúmeros futuros além daquele que se processa no presente. Uma história que visa informar o presente e nos ajuda a compreender (não justificar) nossa própria experiência como seres sociais."*

Entretanto, para que o professor trabalhe com um ensino voltado para a compreensão da realidade natural e social de forma a permitir que os conceitos estudados tornem-se instrumentos para uma análise ativa das situações, acreditamos que a História da Matemática a ser problematizada precisa estar necessariamente ligada à cultura que a produziu e apresentar as construções humanas ligadas aos seus significados compartilhados.

Mais uma vez percebemos que procurar um diálogo com as formas de produção de um conceito pode mostrar ao estudante e ao professor que a Matemática, como as demais ciências, não está definitivamente construída, que teorias aceitas em determinadas épocas foram superadas, que a produção da Matemática não se assenta em indivíduos superdotados e distantes do homem comum e que o pensamento científico se modifica nos diversos meios culturais. Desse modo, a História da Matemática se faz também no tempo presente da escola, através de uma análise crítica das práticas, dos livros didáticos, da escolha de conteúdos, dos modos de se trabalhar esses conteúdos, etc., que transformam e reproduzem os conhecimentos matemáticos, gerando novos conhecimentos:

> *"Assim, a reprodução, isto é, as operações através das quais o sentido é localmente produzido, é parte integrante da atividade de produção/invenção do saber matemático"* (Valente, 2001,p. 217).

Desse modo, acreditamos ser de importância fundamental a preparação do professor para uma compreensão mais profunda de sua própria prática. Nesse sentido, encontramos nos estudos sobre a presença da História da Matemática na formação de professores a constatação de que essa disciplina não tem recebido a atenção que julgamos necessária, frente ao que até agora apresentamos.

3.4- A História da Matemática na formação de professores no Brasil

Apesar da recomendação pelos próprios documentos oficiais de educação em relação à utilização didática da História da Matemática, nos diversos congressos, encontros e seminários sobre Educação Matemática, História da Matemática, História na Educação Matemática e afins, muito se discute sobre as dificuldades da integração da História da Matemática em Educação Matemática: poucos são os cursos superiores de licenciatura que trabalham essa disciplina, o material produzido sobre História da Matemática não é suficiente e, além de tudo, falta o reconhecimento da escola como instância produtora de conhecimento matemático.

Segundo Silva (2001, p. 144), a disciplina de História da Matemática só foi tornada obrigatória no Instituto de Matemática da USP em 1968, apesar de estar prevista no currículo desde 1934, data de criação do curso de Matemática. A oferta desta disciplina passou por sérias dificuldades, como a ausência de bibliografia em língua portuguesa e a falta de professores preparados para a ministrar. Em 1985, membros da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC) prepararam um documento sugerindo um currículo mínimo para a licenciatura em Matemática que, apesar de não incluir a disciplina de História da Matemática, indicava que ela fosse oferecida pelas instituições conforme a disponibilidade e o interesse dos professores capacitados. Para Silva, o prestígio da SBM entre os professores de Matemática serviu para que várias universidades seguissem esta sugestão e incluíssem a disciplina História da Matemática em seus currículos, no elenco das obrigatórias ou das opcionais.

Entretanto, ainda de acordo com Silva (2001, p. 147), os cursos que oferecem essa disciplina diferem significativamente em relação aos conteúdos de suas ementas, à bibliografia adotada, à carga horária e aos pré-requisitos estabelecidos. Além disso, embora no Brasil a maior parte das Instituições de Ensino Superior seja privada, a disciplina de História da Matemática é mais frequentemente oferecida nas universidades públicas e, mesmo que já exista um número razoável de obras sobre História da Matemática publicadas em português e espanhol, muitas estão esgotadas e o leitor em geral tem dificuldades de acesso à bibliografia especializada. Por outro lado, embora temas específicos sobre História da Matemática estejam incluídos na avaliação nacional dos cursos de graduação do país, o provão, e existam recomendações nos atuais Parâmetros Curriculares Nacionais do MEC para que os professores apresentem os conceitos em uma visão histórica, contraditoriamente a História da Matemática não está incluída nos conteúdos mínimos exigidos pelo MEC para os currículos de Matemática.

Como sugestões para a formação inicial ou continuada de professores em História da Matemática, Silva (2001, p. 160) sugere o trabalho cooperativo entre o professor de Matemática e o de História ou Filosofia para superar as dificuldades metodológicas no trabalho com fontes primárias, análise de dados, tratamento de informações etc.; a realização de seminários e pesquisas com fontes primárias; a vivência de atividades aplicáveis na prática de sala de aula; a apresentação de referências bibliográficas para o estudo da História da Matemática e a discussão sobre estratégias para a utilização de fontes primárias.

Percebemos que o trabalho com fontes originais pode propiciar uma amplo trabalho com a História da Matemática em sala de aula: a construção de significados, a contextualização, a interdisciplinaridade, a construção dos conceitos etc. Passaremos então a um estudo sobre esse tema, esperando contribuir para uma maior visão sobre as possibilidades desse trabalho em sala.

3.5 - O uso de fontes originais na sala de aula de matemática

Furinghetti (1997) apresenta um estudo de caso com quatro experiências do uso de fontes originais em sala de aula, que ela classifica de acordo com as diferentes visões que o professor tem da história da matemática:

A experiência do professor A procurava trabalhar a imagem da matemática construída pelos alunos: usando textos clássicos da história da matemática e enciclopédias, os alunos eram apresentados a problemas históricos e epistemológicos da matemática, participavam de debates guiados pelo professor e engajavam-se em pesquisas pessoais sobre história da matemática em textos clássicos e enciclopédias. Os alunos eram estudantes de um liceu de artes que não possuíam uma imagem favorável da matemática. Após as pesquisas, os estudantes foram convidados a fazer cartazes, pôsteres e desenhos sobre assuntos relacionados à matemática, que deveriam ser acompanhados de notas explicando suas idéias. Ao final do projeto, pode-se verificar que a história da matemática foi um bom meio para trabalhar com as crenças e concepções prévias dos alunos e construir uma imagem positiva da matemática.

A professora B via a história como uma fonte de problemas e usava textos do século XVI para extrair problemas aritméticos que permitissem o estudo da passagem da aritmética para a álgebra. A professora responsável por esta experiência era uma pesquisadora de livros aritméticos do século XVI e seu profundo conhecimento na área ajudou-a a escolher problemas adequados ao seu trabalho: os estudantes trabalharam com fotocópias dos originais holandeses e foram encorajados a descobrirem analogias entre os problemas antigos e os modernos e compararem os velhos métodos de resolução com os seus próprios métodos. Para a professora B, os problemas históricos dão aos alunos novas visões históricas e novas visões matemáticas; podem servir como exercícios extras no final do processo de aprendizagem ou como aplicação de um novo tópico matemático aprendido; ou estimular os estudantes a desenvolver suas próprias estratégias de resolução no início de um processo de aprendizagem.

O Professor C trabalhou a história como uma atividade opcional para estudantes voluntários de um liceu científico italiano. O trabalho que Furinghetti (1997) descreve será pormenorizado mais adiante, quando apresentarmos o *ICMI Study* sobre fontes originais. Trata-se da experiência com fontes originais para o estudo das cônicas. O principal objetivo declarado pelo professor para o uso da história era treinar os estudantes para pesquisar fontes históricas, baseado em sua convicção pedagógica de que isto poderia criar um modo de pensar que aumentasse o entusiasmo pela descoberta e fortalecesse o processo de compreensão e de discussão das idéias.

A professora D via a história como um método diferente para abordar conceitos. Ela descreve seu trabalho com estudantes do liceu científico relativo ao cálculo diferencial e integral e à prova como método de demonstração em Matemática. No cálculo diferencial e integral, ela reelabora um texto de Isaac Barrow, de 1674, para trabalhar os conceitos de área e de integral. Sobre demonstrações matemáticas, ela apresenta aos alunos exemplos de provas realizadas pelo método de análise e síntese, usado no passado para pesquisa e ensino. Ela considera que os livros atuais apresentam apenas um dos modos e que as provas dos teoremas estudados em classe foram desenvolvidas pelo duplo método de análise e síntese. Assim, um dos valores da apresentação histórica seria a capacidade de fazer as regras serem explicitadas, que normalmente é frustrada no ensino usual. A professora observou que os estudantes apresentados a este método de prova conseguiram aplicá-lo livre e facilmente a diferentes situações, mesmo quando não solicitados pelo professor a fazê-lo.

No “New ICMI Study Series” volume seis sobre História na Educação Matemática, encontramos no capítulo nove os estudos de um grupo de trabalho sobre o uso de fontes originais como uma das várias possibilidades geradas pela integração da História da Matemática no ensino da Matemática (Jahnke et al., 2000, p. 291-398). Tanto na formação de professores quanto na prática em sala de aula, o uso de fontes originais representaria um projeto que, apesar de demorado e trabalhoso, resultaria em um entendimento aprofundado dos significados matemáticos em questão. A seguir, apresentaremos algumas das idéias discutidas neste estudo:

Para trabalhar com fontes originais precisamos fazer uma análise do contexto em que aquelas idéias surgiram e criar um paralelo entre a linguagem matemática atual e a usada na época. Deste modo, ler as fontes primárias auxilia entender as idéias trazidas pelos materiais secundários, descobrir novas ligações entre as idéias, discernir os cursos da história de um tópico, muitas vezes omitido nas fontes secundárias, e colocar em perspectiva algumas interpretações, julgamentos de valor e até falsas apresentações encontradas na literatura. A leitura das fontes originais deve levar em consideração que o autor escrevia para o público de sua época, não podendo ser analisada unicamente do ponto de vista de nosso conhecimento atual.

Embora a leitura dos textos históricos em classe introduza a História da Matemática em sala de aula de um modo explícito, ela deve estar sempre integrada ao conteúdo trabalhado e não ser vista como uma atividade extra. Isto pressupõe que o professor tenha um conhecimento da história e dos conteúdos matemáticos tratados, o que envolve uma preparação adequada para o trabalho com fontes originais.

A crença comum de que a matemática tem uma natureza estática, ou seja, de que os conceitos uma vez definidos não são alterados, pode ser trabalhada pelo entendimento da evolução das idéias matemáticas. Mesmo os professores e estudantes que não compartilham esta crença, muitas vezes não tiveram experiências que mostrassem esta evolução e o trabalho com fontes originais pode oferecer oportunidades para um contato não mediado com o modo com que as idéias eram definidas em uma determinada época. Além disto, as fontes primárias apresentam os diferentes sistemas de representação usados no passado e podem contribuir para que o estudante perceba que nosso sistema corrente de representações é apenas um dos possíveis para fazer operações, tratar e comunicar conceitos. Pela comparação e contraste entre nossas representações e aquelas que aparecem nas fontes originais, os estudantes podem perceber o papel essencial das representações na concepção e evolução das idéias. Como exemplo, os autores do estudo citam a descrição de uma atividade feita com um extrato do Papiro de Rhind, de decifrar as operações aritméticas envolvidas com a ajuda de um ‘dicionário’ dado pelo professor, explicar como estas operações funcionam e aplicá-las a outros exemplos. A partir destas atividades, o professor discute com a classe as vantagens e desvantagens do sistema de numeração egípcio e as compara com o sistema decimal. Os estudantes encaram a atividade como um grande quebra-cabeça: primeiro por ter que entender o que o texto diz e depois por ter que atribuir o significado e o modo de operar próprios ao período estudado. Ao fazer as comparações entre o que eles trabalharam na fonte original e as representações da escola, os estudantes redescobrem propriedades perdidas no "automatismo" do ensino.

Além disso, o estudo das fontes originais também possibilita que o estudante perceba a relatividade da idéia de verdade. O caráter usual de representação da atividade matemática é a de que ela independe do tempo e do lugar, é uma produção de claras e corretas respostas a problemas. Uma documentação da atividade matemática genuína mostra os percalços encontrados pelos matemáticos e dá ao estudante uma visão mais legítima e humana da evolução das idéias. Como exemplo, os autores do estudo apresentam as dúvidas dos matemáticos nos séculos XVI e XVII sobre a natureza dos números irracionais e a influência que a representação com infinitos dígitos de um irracional teve para o seu reconhecimento como número. A verificação da importância da representação de um conceito para a sua conceitualização, questionamento e aceitação ou rejeição torna-se mais um motivo para a reflexão dos alunos. Assim, ler uma fonte pode ser um caminho para se dialogar com as idéias expressas e relacionar a matemática com o mundo real, com a filosofia prevalecente na época e com outras áreas do conhecimento.

Outra razão para se usar as fontes primárias seria o estilo didático e claro dado às primeiras explanações sobre um assunto, antes que ele seja elaborado de forma mais aprofundada. Durante o século XX, muitos textos adotaram justificações formais para as leis formais da matemática, o que deixou muitos estudantes alienados. As leis básicas da matemática expostas nas fontes primárias são mais ligadas à linguagem diária e ao senso comum, podendo enriquecer o repertório didático dos professores. As fontes primárias também podem oferecer ao professor uma visão dos tópicos centrais ensinados na escola no passado e a evolução dos currículos. Como exemplo, podemos verificar que nos livros-texto antigos de aritmética, a ênfase era dada à exatidão dos cálculos, com sessões inteiras dedicadas à conferência dos valores obtidos, como 'a prova dos noves'; enquanto nos livros de hoje, com a utilização franqueada das calculadoras, a ênfase dada à aritmética se relaciona às estimativas, às respostas aproximadas e aos signos de literacia matemática.

A interpretação das fontes primárias envolve um processo hermenêutico, isto é, de interpretação entre o significado do texto na visão de quem o escreveu e o significado que ele adquire para um leitor moderno. Assim, sempre há um caráter hipotético e intuitivo na interpretação: ela tem um processo circular de formular hipóteses e verificar se estão de acordo com o texto. Em relação ao texto científico esta circularidade é dupla: em um primeiro círculo, os sujeitos científicos estavam envolvidos no processo hermenêutico de criar teorias e checá-las em relação aos fenômenos que eles queriam explicar ou aos objetivos que queriam alcançar; no segundo círculo o leitor moderno tenta entender o que aconteceu. Deste modo, temos uma complexa teia de relações entre nossa interpretação de uma teoria ou de um conceito e a interpretação do autor original, que deve ser entendida pelo professor para possibilitar aos alunos um clima de geração de hipóteses a respeito de um texto. De fato, o cerne da filosofia educacional do uso de fontes primárias é o pensar como outras pessoas que viveram em outros tempos: é colocar-se no círculo primário da produção de um conceito ou de uma teoria e perguntar-se sobre as suposições teóricas que a pessoa tinha em mente. O estudante é estimulado a refletir a respeito de seus próprios pontos de vista sobre um problema subjetivo e esta reflexão se torna objetiva pelo texto que ele está estudando: as idéias do aluno são pré-requisitos para o processo hermenêutico.

Mesmo quando as fontes originais estão escritas na língua materna, o estudante precisa de competência lingüística para poder entendê-las. Para a leitura das fontes originais, temos no mínimo três linguagens diferentes: a linguagem matemática das lições usuais, a linguagem da fonte original e o modo pessoal do aluno de falar sobre matemática. Assim, a integração da História da Matemática em sala de aula pelo uso de fontes originais contribui para o desenvolvimento da habilidade de comunicar e traduzir idéias e fatos em linguagem matemática. Tal habilidade pode ser desenvolvida pelo professor pedindo aos alunos que escrevam seus próprios textos e falem sobre matemática.

Os autores do *ICMI Study* em questão defendem a idéia de que a leitura das fontes originais deve ser parte obrigatória da educação matemática de professores de todos os níveis, não só como contribuição para as suas competências matemáticas, mas também como condição necessária para que eles incluam componentes históricos em suas aulas de matemática. Apresentam a seguir exemplos de integração de fontes originais na formação inicial de professores e na sala de aula da escola.

Para a formação de professores são apresentadas experiências vivenciadas no Marrocos, com relação às medidas egípcias de ângulos descritas no Papiro de Rhind e na Noruega, pelo estudo de fontes originais para compreender os números complexos na geometria e na álgebra.

O primeiro exemplo de integração das fontes originais na sala de aula descreve uma experiência na Alemanha e é relativo à história da construção de um túnel na Ilha de Samos, pelo engenheiro Eupalinos por volta de 530 A.C. A perfuração do túnel foi feita simultaneamente pelas duas extremidades e as duas partes se encontraram sob a montanha. Os estudantes discutiram os métodos possíveis para se conseguir determinar a direção correta para a perfuração e escreveram suas hipóteses em um pequeno ensaio, demonstrando que mais de dois terços da classe foram capazes de entender o problema e expressá-lo em sua própria linguagem.

O segundo exemplo vem da Itália, com uma atividade planejada e desenvolvida por um professor secundário, como uma atividade extra-curricular com alunos voluntários, por meio do uso de um texto francês antigo que fazia uma revisão didática sobre trabalhos clássicos de óptica. Os alunos fizeram a tradução do texto com ajuda indireta do professor e os símbolos do texto original foram mantidos. Na avaliação da experiência os alunos mostram-se colaborativos e apreciaram positivamente os resultados. Em suas respostas fizeram afirmações como: foi prazeroso fazer matemática; foi fácil perceber a evolução da matemática e certificar-se de que existem diferentes pontos de vista para solucionar um problema; o método de trabalho permitiu que se verificasse como se dá a construção de um teorema; o estudo de textos originais permite a participação mais ativa no trabalho; foi mais difícil entender a linguagem do que o espírito do trabalho; trabalhar diretamente com o texto requer uma reflexão mais cuidadosa sobre os problemas e um melhor entendimento do seu significado: um aparentemente simples problema revela aspectos inesperados; torna possível ir além dos teoremas e chegar às raízes da matemática; a experiência mudou a imagem da matemática escolar; o trabalho permitiu uma evolução passo a passo do modo de pensar e permitiram um aprendizado pelo próprio esforço etc.

Os autores do ICMI Study, apesar de listarem uma série de aspectos positivos das experiências descritas, descrevem as razões pelas quais acreditam ser difícil generalizar as conclusões: trata-se de atividades extra-curriculares, com alunos voluntários; a fonte original é de um autor desconhecido; lida com uma linguagem não dominada pelos estudantes; o texto foi concebido como um texto didático; os professores envolvidos possuiam uma notável competência em história da matemática e familiaridade com o uso de fontes originais. Acrescentam o fato de que a literatura sobre as experiências com o uso de fontes originais apresenta trabalhos feitos com alunos de nível universitário ou, em caso de estudantes de nível médio, em cursos opcionais. Outros exemplos apresentam uma atividade limitada, como por exemplo, o uso de problemas aritméticos medievais em sala de aula. Além disso, citam o problema do tempo gasto com tais atividades e enfatizam o papel do professor em uma série de aspectos: ele precisa realmente acreditar na importância das fontes originais para o ensino, tem que ter competência para procurar e prover materiais adequados às necessidades da classe e precisa planejar cuidadosamente sua mediação. Como se trata de atividades a serem adaptadas à rotina da classe, os autores também citam a dificuldade de se transmitir as boas experiências com uso de fontes originais de um professor para outro.

3.6 - Estratégias didáticas para a integração de fontes originais:

O *ICMI Study* aponta a importância da escolha das fontes originais para o trabalho com a história da matemática: os conteúdos escolhidos devem estar de acordo com os interesses dos estudantes, serem disponíveis na língua materna ou em outra língua que o professor ou os alunos dominem e estarem de acordo com os objetivos traçados pelo professor. Além disto, o professor também precisa se preocupar em levar os estudantes a conhecerem o contexto em que se deu a produção da fonte original, as características do autor, por exemplo, se era um teórico ou um prático, sua biografia, etc. Embora não seja necessário o rigor e o formalismo de um historiador, esta contextualização faz parte da atividade hermenêutica envolvida na leitura das fontes históricas, que pressupõe a tríade texto, contexto e leitor.

Embora apresente que não se tem até o momento uma abordagem elaborada e aceita de modo geral para a leitura de fontes originais em sala de aula, o *ICMI Study* mostra algumas estratégias que podem ser apropriadas pelos professores interessados de acordo com suas necessidades em sala de aula:

- introdução de uma fonte: de modo direto, isto é, apresentando o texto sem qualquer preparação prévia, para provocar questões a serem debatidas, ou indireto, consultando a fonte após algumas atividades prévias. Como atividades prévias para introduzir um texto original, o professor pode: apresentar problemas não rotineiros que exijam um estudo mais aprofundado ou selecionar alguns nomes de matemáticos, mostrar como eles estavam ligados ao contexto de sua época e, após despertar o interesse do aluno, apresentar um extrato de fonte original para ser analisado. Outro ponto de partida pode ser o livro didático: o professor seleciona um tema do livro texto e apresenta um tratamento diferente para este tema em um texto antigo, para que os alunos comparem e percebam as diferenças. Para a educação de adultos, os autores do *ICMI Study* sugerem a presença de um tutor que facilite a ligação entre diferentes textos e apresente uma síntese dos assuntos tratados.
- Análise de uma fonte e debates cognitivos: a análise de textos históricos é uma atividade difícil e poderá ser direcionada por questões feitas pelo professor ou pelos próprios alunos, conforme o que melhor se adequar à situação. Algumas vezes o professor precisará adaptar o texto ao contexto do que ele pretende apresentar, mas deve se manter o mais fiel possível ao pensamento original do autor. Ao mesmo tempo, deve ter um cuidado especial para selecionar os textos e as controvérsias que poderão surgir do debate sobre as idéias da fonte e os diferentes pontos de vista por elas gerados: em algumas situações, o professor pode pedir aos alunos que se coloquem em grupos a favor ou contra determinada argumentação. Esta atitude pode favorecer um olhar mais aprofundado sobre razões históricas que à primeira vista pareciam ingênuas ou errôneas.
- Construção de instrumentos de medidas: a pesquisa histórica pode revelar diferentes concepções de medidas e as idéias encontradas nos estudos históricos podem servir de base para a construção de instrumentos de medida e até de engenhos para desenhos de curvas.
- Verbalização: fazer os alunos verbalizarem o raciocínio original dos matemáticos é um exercício para que os estudantes aprendam a distinguir entre o que estava no texto original e o que eles interpretaram do texto em questão. Esta atividade também colabora para que os estudantes percebam as dificuldades de trabalhar o raciocínio matemático sem o suporte de um sistema formal.

- Tradução: podem-se distinguir no mínimo dois tipos de traduções diferentes em relação aos textos originais: a tradução para a linguagem matemática moderna e a tradução de uma língua para outra. A tradução permite que o estudante entre em contato com o pensamento e a concepção dos matemáticos.
- Validação de raciocínios: ao solicitar que os estudantes façam a validação de um raciocínio apresentado na fonte original, o professor propicia uma oportunidade para que eles percebam a fundamentação dos métodos usados na história e mudem suas concepções a respeito dos métodos usados no presente.
- Comparação: a comparação entre textos de mesma época ou de diferentes épocas permite aos estudantes perceber a evolução dos símbolos e das notações matemática, manter o foco no essencial dos escritos matemáticos históricos e, no caso específico da formação de professores, a comparação dos textos matemáticos também permite abordar a história do ensino.
- Síntese: as atividades de síntese podem ser apresentadas como trabalho extra-classe, com o uso das estratégias já mencionadas.

Assim, baseados em relatos de experiências e propostas de trabalhos, os autores do *ICMI Study* apresentam uma avaliação, questões de pesquisa e suas preocupações sobre o uso de fontes originais. Para eles as atividades de trabalho com fontes originais demandam muito tempo e por esta razão o esforço que elas demandam em educação matemática deve ser bem avaliado. A leitura de um texto original difere da leitura de um texto normal de matemática: ela precisa de uma contextualização histórica para que seja feita dentro do momento intelectual, social e cultural de sua produção. Esta dependência contextual acarreta a necessidade de se investigar as estratégias de leitura e de interpretação, assim como outras dificuldades encontradas pelos estudantes com textos originais.

Os processos de compreensão matemática que acontecem com o uso das fontes originais também precisam ser pesquisados para saber se, além de servir de motivação e inspiração para pensar de novas maneiras sobre um tópico matemático, tal uso traria novas formas de entendimento matemático. A idade dos alunos, sob este aspecto, seria um importante fator para avaliar o grau de desenvolvimento metacognitivo e reflexivo atingido.

Outros problemas de ordem prática que se apresentam são a identificação e edição de material adequado para o trabalho com fontes originais.

Os autores concluem o estudo afirmando que estamos apenas no início de um processo no qual a história da matemática torne-se parte orgânica do ensino de matemática e que, para atingir este objetivo, ainda precisamos resolver uma série de problemas.

3.7 - Um trabalho de Etnomatemática com fontes primárias

Um trabalho interessante desenvolvido a partir dos problemas 24 até 34 do Papiro Matemático de Ahmes, é descrito em: "*Construindo pontes entre o passado e o presente: etnomatemática, o papiro matemático de ahmes e estudantes urbanos.*", de Arthur B. Powell, que trabalhou com alunos do primeiro ano universitário, e Oshon L. Temple, que trabalhou com alunos das séries finais do ensino fundamental. Neste artigo, os autores descrevem seus trabalhos com alunos de duas áreas urbanas dos Estados Unidos que, apesar de serem os melhores de suas instituições de origem, encontram dificuldades para trabalharem com o rigor matemático do currículo das escolas que freqüentam atualmente, apresentando baixo desempenho e baixa autoconfiança em sua capacidade de aprender matemática. A grande maioria dos alunos é composta por afro-americanos e latinos, originários de famílias de baixa renda da classe trabalhadora, que duvidam de seu potencial para prosseguir seus estudos em matemática e em disciplinas correlatas.

De acordo com Powell & Temple (2004), os problemas 24 a 34 do Papiro Matemático de Ahmes tratam dos métodos de se resolver equações do primeiro grau e ilustram três idéias matemáticas: o conceito de incógnita ou quantidades variáveis; operações inversas e problemas do tipo "pense num número". Ao trabalhar com as operações inversas necessárias para se chegar ao número imaginado, os alunos fazem representações alternativas para a resolução das equações pela expressão verbal do problema, pela equação gráfica com círculos que representam as operações sucessivas indicadas no problema e pela notação simbólica padrão. Deste modo, percebem as relações necessárias para construir o significado da resolução de equações mais facilmente do que nas introduções convencionais e compreendem que as equações mais complexas não são conceitualmente mais difíceis de resolver e sim mais trabalhosas, necessitando apenas de mais tempo para serem resolvidas. Segundo os autores, esta conscientização capacita seus alunos a resolverem equações que estudantes de matemática de séries mais adiantadas consideram "*desconcertantes*", induzindo-os a uma nova disposição para buscarem um desempenho matemático "*além das meras exigências institucionais"* (Powell & Temple, 2004, p. 274).

Os autores destacam a importância de se apresentar a perspectiva matemática antes da perspectiva histórica por duas razões básicas: em primeiro lugar como uma forma de obedecer ao contrato social da escolarização, em que os alunos chegam à aula de matemática com a expectativa de aprender matemática, e em segundo lugar porque se o curso fosse iniciado com a perspectiva histórico-matemática os alunos poderiam interpretar esta introdução como uma forma reafirmar suas incapacidades de aprender matemática. Ao levar os alunos a valorizarem as realizações matemáticas de seus antecessores, a maioria é afro-descendente, e as diversas manifestações culturais de idéias matemáticas, os autores buscam fazer uma ponte entre o passado e o presente para valorizar as diversas contribuições do antigo Egito à matemática mundial. Argumentam que:

> "*Essencialmente, longe da trivialização ou folclorização da África ou de suas contribuições matemáticas, a inclusão de conceitos algébricos africanos ajuda os estudantes a desenvolver idéias e habilidades matemáticas mais complexas*." (Powell & Temple, 2004, p. 274).

O Papiro Matemático de Ahmes é mais conhecido como Papiro Matemático Rhind. Entretanto, os autores, a exemplo de alguns historiadores, preferem atribuir ao documento o nome de Papiro Matemático de Ahmes (PMA), por razões históricas e políticas. Ahmes foi o escriba egípcio que redigiu o papiro, por volta de 1650 AC e Rhind o comprador de antiguidades que adquiriu o papiro, encontrado em 1858 nas ruínas próximas ao templo mortuário de Ramassés II em Tebas. Após a morte de Rhind, o Museu Britânico comprou o papiro em 1865, que foi nomeado Papiro Matemático de Rhind.

Assim, procuram discutir com os alunos o preconceito intelectual e cultural presente em obras de historiadores e matemáticos notáveis, apresentando citações que demonstram um desconhecimento da cultura egípcia que, por sua vez, impedem uma maior compreensão da matemática egípcia. Além disto, apresentam o fato de que não se sabe se o PMA era um trabalho grande ou secundário, um trabalho acadêmico ou um manual para escolares, razão por si só suficiente para impedir qualquer análise sobre a qualidade e a sofisticação da matemática egípcia da época com base no PMA. Os autores também questionam a presença de um preconceito racista na historiografia da matemática, que não menciona a negritude dos egípcios e tem a disposição de glorificar a matemática grega em relação à abstração e à destreza intelectual. Por fim, apresentam suas esperanças de que a incorporação da etnomatemática acadêmica nas escolas possa encorajar os estudantes a se aprofundarem na matemática acadêmica, na discussão da política do conhecimento e na visão do conhecimento matemático como direito do ser humano.

Consideramos esse trabalho interessante pelas inúmeras temáticas que ele considera a partir das fontes originais. De certa forma, percebemos que os autores constroem em sua abordagem de fontes primárias uma situação adequada para os diversos tipos de conscientização que eles pretendem provocar em seus alunos. Com isso, fazem uma abordagem direta da História da Matemática em sala de aula.

3.8 - As abordagens direta e indireta da História da Matemática no ensino

Segundo Schubring (1997, p. 157) existem duas formas principais de abordar a História da Matemática em sala de aula: a abordagem direta e a abordagem indireta.

A abordagem direta ocorre quando introduzimos elementos históricos na sala de aula por meio dos textos originais ou de biografias de matemáticos ilustres. Nela a descoberta dos conceitos é apresentada em toda a sua extensão e a legitimação para seu uso é baseada nas possibilidades de aumentar o interesse dos alunos e motivá-los para o estudo da Matemática. Schubring (1997, 157) posiciona-se com ceticismo em relação a esse tipo de abordagem:

> "*Nas culturas das sociedades mais desenvolvidas economicamente parecem não predominar mais os valores do historicismo e da burguesia como no século XIX e na primeira metade do século XX. Duvido, por isso, que as questões históricas ofereçam aos alunos de hoje qualquer referência similar, independentemente do fato de os professores terem uma formação e atitude histórica*."

Entretanto, Schubring coloca em nota de rodapé da mesma página a seguinte observação:

"Não quero excluir que nas outras culturas e sociedades a história pode ser introduzida mais diretamente nas salas de aula (ver o exemplo de Moçambique)."

O exemplo de Moçambique a que Schubring se refere é o relativo ao trabalho de Gerdes com a etnomatemática, do qual já fizemos uma breve apresentação nessa nossa dissertação. Para Gerdes, retomar a história do povo moçambicano é um ponto fundamental para garantir a aprendizagem da Matemática e sua abordagem histórica da etnomatemática usa o método direto.

A abordagem indireta acontece quando, ao invés de se apresentar todas as etapas da descoberta do conceito, se apresenta uma análise da gênese dos problemas, dos fatos e das demonstrações envolvidos no momento decisivo dessa gênese. Ainda de acordo com Schubring (1997, p. 58), a abordagem indireta na formação de professores favorece a constituição de um meta-saber capaz de contribuir para uma melhor orientação dos processos pedagógicos. Além disso, pode servir como base para a compreensão do desenvolvimento da matemática não como uma concepção continuísta e cumulativa, mas com fases alternadas de continuidade e rupturas. Esse meta-saber também contribui para a visão das diferenças epistemológicas e conceituais do desenvolvimento da matemática nas diferentes culturas e sociedades e para se reconsiderar o papel dos erros como reveladores de todos os fatores já mencionados: a limitação dos valores dominantes em uma comunidade matemática, a indicação de rupturas, de desenvolvimentos não contínuos e da importância de concepções epistemológicas.

Acreditamos que esse modo de integrar a História da Matemática em sala de aula se aproxima da proposta de constituição do meta-saber do professor de Miguel & Miorim (2004), por meio das "histórias pedagogicamente vetorizadas".

3.9 – A "História Pedagogicamente Vetorizada"

Encontramos em Miguel & Miorim, 2004, considerações a respeito da constituição de histórias pedagogicamente vetorizadas:

> "*pensamos ser necessário que histórias da cultura matemática passem, cada vez mais, a ser escritas sob o ponto de vista do educador matemático ou, em outras palavras, que* histórias pedagogicamente vetorizadas *passem a ser, cada vez mais constituídas*." (Miguel & Miorim, 2004, p. 156, grifo dos autores).

Em seqüência ao raciocínio desenvolvido, os autores afirmam que uma história pedagogicamente vetorizada não é uma história simplificada, adaptada ou elementarizada da História da Matemática para uma utilização na escola. Em direção oposta, é uma história que parte dos problemas da cultura matemática da escola, do modo como as idéias matemáticas se constituíram e se transformaram no interior das práticas escolares em conexão com as outras práticas sociais em outros contextos institucionais, contrapondo uma tendência tecnicista e neutra da abordagem da cultura matemática a uma discussão dos problemas de natureza ética envolvidos nas diversas práticas sociais da Matemática.

Nessa concepção, as problematizações lançadas na formação dos professores partem de práticas pedagógicas do presente e são feitas pensando nos estudantes de licenciatura e nos futuros alunos desses estudantes, não se preocupando em acrescentar à abordagem lógica uma abordagem histórica de natureza factual. Ao contrário, a historiografia é vista como uma fonte de diálogo que estabeleça novas relações, respostas múltiplas e possibilidades para as respostas que procuramos no presente, mostrando as relações de poder nas diversas práticas sociais envolvidas na constituição, apropriação, ressignificação e transmissão do tema ou problema em estudo. Os autores justificam a importância de um trabalho com essas preocupações como uma forma de através do ato educativo, inclusive do futuro professor, preparar os sujeitos sociais para a inserção na vida social pública como representantes e atores de diferentes comunidades que participam do processo de constituição da Matemática e da Educação Matemática. Esse mesmo destaque já era dado por Miguel (1997a, p. 151-152) por ocasião do II Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática:

> "*Quando falo em passado, não como ele foi de fato, mas como poderia ter sido, não estou com isso querendo estimular ou reforçar a proliferação de falsas histórias, de histórias fictícias, especulativas ou de histórias-anedotário; estou apenas querendo destacar, por um lado,*
>
> *- o escasso valor pedagógico de histórias da matemática meramente factuais, das chamadas histórias-compilação ou histórias-crônica;*

- o escasso valor pedagógico das chamadas histórias evolutivas das idéias matemáticas, isto é, de histórias descontextualizadas em que o homem e os problemas propriamente humanos não se fazem presentes; e, por outro lado, destacar também,

- o imenso valor pedagógico de histórias-problema que valorizem, explorem e invistam na dimensão inevitavelmente conjectural da ciência histórica;

- o imenso valor pedagógico de histórias que, constituindo-se a partir de problemas pedagógicos do presente, interroguem ativamente o passado de modo a buscar nele não somente o que, de certo modo, é apenas o primeiro momento do trabalho do historiador, isto é, a coleta dos tais fatos documentados, 'reais', 'verdadeiros', mas buscar também aquilo que é realmente complexo, desafiador e fascinante, aquilo que significa e dá sentido simultaneamente ao trabalho do historiador e à ação pedagógica do professor, isto é, a tentativa de interpretação da intencionalidade humana por trás dos projetos e empreendimentos genuinamente humanos. Essa é, a meu ver, senão a interseção possível, pelo menos a interseção desejável entre história e pedagogia."

Entretanto, todas as discussões sobre se interpretarem os significados e sentidos dos conceitos em suas interações sociais esbarram na questão de como manter a objetividade atribuída à matemática dentro do relativismo social. Para Schubring (1998, p. 25 e 26):

"Do contexto das observações históricas apresentadas, surge a tese de que esta objetividade não existe e que também na matemática, enquanto ciência, os significados dos conceitos são estabelecidos socialmente e que a imposição de teorias e epistemologias ocorre, inicialmente, no ordenamento de um contexto cultural. Ou seja, existe um sujeito social na história da matemática: a comunidade social dos matemáticos, à qual, por exemplo, é comum uma epistemologia marcada por um determinado ambiente cultural (até certo ponto)."

Assim, com os mais diversos argumentos e apresentando as mais diversa razões para justificá-los, estudiosos das relações entre História da Matemática e Educação Matemática têm defendido problematizações que aproximem a Matemática, a História da Matemática e a História da Educação Matemática na formação de professores, com influências no ensino-aprendizagem em todos os níveis. Também podemos perceber a constante presença da atitude dialógica em todas essas problematizações, procurando abarcar todas as possibilidades de mediação dos sujeitos sociais envolvidos nos diversos processos de produção, aceitação, e divulgação dos conceitos matemáticos. Com isso, entendemos que não há mais espaço na escola para uma visão especular da História da Matemática e para abordagens que ignorem os contextos sócio-culturais que forneceram os problemas e as condições de desenvolvimento da matemática.

Conclusões

Em nossa dissertação procuramos traçar um breve panorama das discussões que têm sido concretizadas sobre a integração da História na Educação Matemática. Mais que apontar um caminho para uma ou outra das diferentes perspectivas estudadas, nossa intenção com esse trabalho foi apresentar as diversas justificativas e seus referenciais teóricos de apoio para o trabalho com História da Matemática em sala de aula. Ao mesmo tempo, reconhecemos as dificuldades de se fazer uma abordagem histórica extensiva, cronológica e hierarquizada de conhecimentos matemáticos no ensino básico. Desse modo, acreditamos que ao apresentarmos nossa opinião sobre as vantagens de se proceder, no ensino fundamental e médio, ao estudo da evolução de um conceito específico, com o seu devido recorte histórico emoldurado pelas suas características sócio-culturais, não estamos desconsiderando as demais formas de se abordar a História da Matemática em sala de aula. Ao contrário, nos sentimos expostos a críticas pertinentes sobre a profundidade da compreensão matemática que esse tipo de escolha pode oferecer, sobre a relativização do conhecimento matemático nela embutido, pela possível falta de coerência nas idéias abordadas de forma tão particular e compartimentada, etc.

Em relação à formação de professores, acreditamos ser de fundamental importância nos cursos de licenciatura que não se apresente aos futuros docentes somente uma história internalista e descontextualizada da Matemática, mas também os fatores externos de sua produção, aceitação e transmissão, de maneira crítica e articulada com os conteúdos que esses professores irão trabalhar em suas salas de aula. Assim, acreditamos que não basta apenas apresentar o desenvolvimento histórico da Matemática; seria importante também desenvolver o conteúdo matemático do ensino superior dentro de uma perspectiva histórica, se não em todas as disciplinas, pelo menos naquelas em que o professor se disponha a servir de referência para os professores em formação. Entendemos que se o futuro professor tiver em sua formação um modelo de trabalho com abordagem histórica, poderá, a partir de suas próprias convicções, refletir sobre essa prática, ajustá-la ao seu estilo característico de trabalhar e desenvolver mais facilmente seus próprios métodos de integração da História da Matemática em sala de aula. Do mesmo modo, também acreditamos que o trabalho conjunto entre a universidade e a escola deva fazer parte da formação de alunos/futuros professores, por meio da instituição de grupos de estudo que agreguem representantes docentes e discentes de diferentes instituições de ensino com interesse no desenvolvimento de teorias e práticas de integração da História na Educação Matemática.

Em nossa concepção, a História apresenta toda a produção cultural da humanidade e, portanto, da escola. As interfaces entre História, Educação Matemática e História da Educação são muitas e também devem ser discutidas na formação dos professores. Entender os diversos movimentos que estiveram envolvidos na elaboração dos currículos, na escolha dos saberes a serem reproduzidos, na constituição das diversas disciplinas escolares e na atribuição diferenciada de importância a uma ou outra dessas disciplinas pode ajudar o professor a dar um novo valor às demandas sociais da educação e perceber a característica de “filtro social” que a Matemática tem. É bastante comum para nós, professores de matemática, ouvirmos de vários de nossos alunos que eles “não prestam para a Matemática”. Além disso, também se tornou banal a constatação de que “os alunos não têm os pré-requisitos necessários” para o desenvolvimento dos trabalhos em sala de aula. Ora, se somos professores de matemática, imbuídos da “vontade” de ensinar matemática (a despeito de toda conotação negativa que o verbo ensinar possa conter, ainda assim é o que melhor traduz a situação que esperamos elucidar) e percebemos a educação como possibilidade de transformação social, o que implica necessariamente a democratização ao acesso ao saber, não podemos mais aceitar que tal situação se mantenha. Assim, faz parte de nosso trabalho como professores não só desenvolver conteúdos específicos aos vários níveis de ensino, mas também trabalhar as concepções que nossos alunos têm a respeito de si próprios e a respeito da matemática. Como já apresentamos em nossa dissertação, acreditamos que abordagens históricas da Matemática possam ajudar a modificar essas crenças: ao recriarem um conceito matemático por meio de uma abordagem histórica, os alunos poderiam se sentir capazes de produzirem matemática, de entendê-la, de a ligarem aos problemas originais que lhe davam significado e consistência. Os professores, por sua vez, ao optarem pela abordagem histórica da construção de um conceito poderiam em algumas situações prescindir dos pré-requisitos, iniciando a reconstrução de um conceito de seu nível mais elementar, com uma linguagem mais próxima daquilo que o aluno é capaz de entender.

Acreditamos que a Matemática revela novos modos de pensar que enriquecem o intelecto humano. Mais que uma disciplina de estudo, ela é um patrimônio da humanidade, o resultado do esforço coletivo dos homens e mulheres que de alguma maneira lhe deram forma, a transmitiram e a enriqueceram. Partilhar esse conhecimento é, além de função da educação, um dos sentidos da vida em sociedade: é participar da distribuição dos vários tipos de bens comuns, construídos na busca da sublimação, da evolução, de aperfeiçoamento. Uma concepção de educação que valorize as dimensões emocionais, psicológicas, cognitivas e sociais do aluno deve se ligar às possibilidades que a Matemática pode oferecer ao homem de expandir sua compreensão sobre o mundo que o rodeia, sobre sua capacidade de lidar com os conhecimentos matemáticos, sobre as conexões da Matemática com as outras ciências e, principalmente, sobre seu direito de conhecer Matemática independentemente de suas opções profissionais ou estudantis.

Portanto, mesmo entendendo a capacidade de abstração em Matemática como essencial para a constituição de novos conhecimentos e de sua relativa independência de contexto para se desenvolver (muitas vezes o desenvolvimento teórico da Matemática ocorre de forma independente de um problema: a própria abstração matemática produz conseqüências de suas teorias que se transformam em novas teorias), vemos na História da Matemática a possibilidade de atribuir significados referenciais aos conhecimentos matemáticos e dessa forma permitir uma maior compreensão da Matemática.

Nas diversas experiências a que tivemos acesso para a elaboração dessa dissertação não pudemos perceber uma conclusão sobre as efetivas diferenças verificadas na aprendizagem quando a História da Matemática foi integrada ao conteúdo trabalhado. Apesar de não acreditarmos em uma “medição” quantitativa dos resultados obtidos, entendemos que as avaliações que os alunos e professores fazem das situações experimentadas são importantes para a tomada de decisões no planejamento de atividades e que podem fornecer indícios importantes para a prática escolar. Desse modo, defendemos a ampliação dos espaços de apresentação de atividades desenvolvidas com a História da Matemática em sala de aula, a troca de experiências, a discussão dos objetivos e das prioridades encontrados nos desenhos de projetos de ensino de Matemática que integrem a História e a avaliação de resultados obtidos. Mais do que discutir teorias, julgamos necessário se ampliar a discussão das práticas, das ações pedagógicas efetivamente constituídas, das possibilidades e dos resultados obtidos, da reflexão sobre as práticas, sobre a construção dos conhecimentos pedagógicos na escola, a criatividade do professor, suas expectativas e esperanças.

Do mesmo modo, em relação à ação pedagógica da etnomatemática também consideramos importante que os trabalhos em sala de aula sejam descritos e discutidos, especialmente em direção a rebater as críticas sobre a necessária superação da realidade do aluno em relação aos seus conhecimentos prévios e ao alcance de conhecimentos que lhe permitam uma melhor inserção na sociedade. De acordo com a valorização que damos à abordagem sociocultural da etnomatemática, acreditamos que é muito importante procurar não associar a etnomatemática somente a conhecimentos primitivos, a uma “proto-matemática” ou a conhecimentos próprios de determinados grupos ou classes sociais e sim ao tipo de educação intercultural da Matemática que ela defende, ampliando as perspectivas de trabalho em Educação Matemática.

Por outro lado, tanto a etnomatemática como a História da Matemática são fontes de problematizações que podem ser trabalhadas de forma interdisciplinar, pelas informações culturais e sociológicas que abordam. Logo, podem ser ponto de partida para atividades que mobilizem toda a escola em relação a uma determinada temática e constituírem projetos de ensino que possibilitem um amplo estudo sobre uma época, uma cultura ou uma determinada sociedade. Dessa forma, a Matemática seria interligada a outras disciplinas escolares, quebrando o seu isolamento característico.

Desse modo, acreditamos que não cabe mais o estudo de uma história estática, factual. Ao contrário, em nosso trabalho pudemos concluir pela pertinência de se contextualizar o conhecimento matemático, de procurar percorrer o eixo de tempo da História de maneiras diversas das abordagens tradicionais que ligam o passado ao presente de forma determinista, como se não houvesse outras formas de desenvolvimento possível da Matemática. Por conseguinte, apresentamos as propostas que contemplam olhares horizontais no eixo tempo e apresentam o modo como diferentes grupos sociais em uma mesma época trabalham os conceitos matemáticos de modo diferente, muitas vezes em função da aprovação ou não da comunidade de matemáticos que se constitui e é aceita nesse período. Podemos também considerar a possibilidade de um caminho inverso: partir da matemática pronta e acabada de hoje e buscar em suas origens as intuições, os problemas e os conceitos que se imbricaram em sua constituição histórica para ampliar a significação dos estudantes e pesquisadores de matemática. Com isso, "quebramos o espelho", ou seja, negamos que a abordagem histórica tenha que ser obrigatoriamente um reflexo do que foi a História da Matemática que a historiografia positivista nos herdou: seqüencial, linear, determinista e indutivista.

Concluímos nossa apresentação com a reafirmação de nossa constatação de que há um campo enorme de pesquisas sobre a integração da História na Educação Matemática e de que esta integração abre inúmeras possibilidades para se dialogar sobre Matemática em sala de aula, podendo contribuir para uma melhor aprendizagem da Matemática em todos os níveis de ensino. Como sempre enfatizamos em nosso trabalho a importância da atuação do professor em sala de aula para um efetivo diálogo entre a Educação Matemática e a História da Matemática, não poderíamos deixar de oferecer nossa pesquisa aos docentes que se interessam por esse tema. Esperamos que o panorama geral que buscamos delinear se configure como um subsídio a mais para a reflexão mais ampla e geral que se faz necessária em relação à Educação Matemática e, mais especificamente, em relação à presença da Matemática na formação das pessoas não só como um conhecimento conceitual, mas principalmente como uma linguagem de interpretação da realidade, de inserção social e de desenvolvimento de competências. Nesse sentido, caberia a cada professor, diante da realidade de sua sala de aula e de suas condições de trabalho, elaborar suas próprias conclusões e construir suas próprias práticas, no que esperamos poder contribuir com nosso trabalho.

Referências Bibliográficas:

ANGLIN, W.S. *Matemática e História*. Tradução: Carlos Roberto Vianna. Revisão: Maria Laura M. Gomes. In: História & Educação Matemática, v. 1 , nº 1, p. 12-21, 2001- Revista da Sociedade Brasileira de História da Matemática.

ARANHA, M.L.A.; *História da Educação*. 2ª. Ed. São Paulo: Moderna, 1996.

BACHELARD, G. "*A epistemologia"* – tradução Fátima Lourenço Godinho e Mário Cármino Oliveira – Lisboa: Edições 70, 19-?

BARTON, B. *Dando sentido à etnomatemática: etnomatemática fazendo sentido*. In: RIBEIRO, J. P. M.; DOMITE, M. C. S.; FERREIRA, R. (Orgs.) Etnomatemática: papel, valor e significado. São Paulo: Zouk, 2004.

BELL, E. T. *Los Grandes Matemáticos*. Buenos Aires: Editorial Losada S.A., 1948.

BICUDO, M. A. V., GARNICA, A. V. M.: *Filosofia da Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

BOERO, P., PEDEMONTE, B., ROBOTTI, E. (1997) *Approaching theorical knowledge through voices and echoes: a Vygotskian perspective.* In: http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Boero/Boero97.html , acesso em 07/09/2005.

BOYER, C. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BROLEZZI, A. C. *A Arte de Contar: Uma introdução ao estudo do valor didático da História da Matemática.* Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 1991.

BROLEZZI, A. C. *Mudanças na Matemática da Escola Básica para o ensino superior: reflexo no uso de História da Matemática.* Anais do VII EPEM – Encontro Paulista de Educação Matemática. Junho de 2004. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/grupos_trabalho/gdt08-Brolezzi2.doc

BROLEZZI, A. C. *História às avessas do número e: Uma proposta de ensino usando computadores e projetos.* Sociedade Brasileira de História da Matemática (ed.), Coleção História da Matemática para professores, março, 2005.

BROUSSEAU, G. *Les obstacles épistémologiques et les problèmes em mathématiques.* Recherches en Didatiques des Mathématiques, v. 4.2, p. 164-168, 1983.

BROUSSEAU, G. *¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas?* In: Enseñanza de las Ciências, 8 (3), p. 259-267, 1990.

BROUSSEAU, G. *Os diferentes papéis do professor*. In: PARRA,C. & SAIZ, I. (ORGS.) Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas. Trad. Juan A. Llorens. Porto Alegre, Artes Médicas, 2001.

COMTE, Auguste. *Discurso sobre o espírito positivo: ordem e progresso*. Trad: Renato B. R. Pereira, revista por Ivan Lins. Porto Alegre, Globo; São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1976.

CHACÓN, Inês Ma. Gómez. *Matemática Emocional: Os Afetos na Aprendizagem Matemática.* Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2003.

CURY, H.N., VIANNA, C. R. *Ângulos: Uma "História" Escolar.* In: História & Educação Matemática, v. 1 , nº 1, p. 12-21, 2001- Revista da Sociedade Brasileira de História da Matemática.

D'AMBRÓSIO, U. *Sociedade, cultura, matemática e seu ensino*. In: Educação e Pesquisa – Revista da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120. jan/abr 2005.

FERREIRA, Ana Cristina. *Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de Matemática: uma experiência de trabalho colaborativo*. (Tese de doutorado, UNICAMP, 2003).

FURINGHETTI, F. *History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Case Studies in Linking Different Domains*. For the Learning of Mathematics 17, 1, p. 55-61, february ,1997.

FURINGHETTI, F. *History and Mathematics Education: a look around the world with particular reference to Italy.* In: http://www.icme_organisers.dk/tsg17/Furinghetti_text.pdf acesso em 07/09/20005.

GALVÃO. Izabel. *Expressividade e emoções segundo a perspectiva de Wallon.* In: ARANTES, Valéria Amorim (org.). *Afetividade na Escola*: alternativas teóricas e práticas.São Paulo: Summus Editorial, 2003.

GARNICA, A.V.M. *História e Educação Matemática: possibilidades de diálogos*. In: BROLEZZI, A.C. (Ed.) 1º Seminário Paulista de História e Educação Matemática. Resumos. São Paulo: IME-USP, 2005.

GERDES, P. *Etnomatemática: cultura, matemática, educação*. Maputo: Instiotuto Superior Pedagógico, 1991.

GLAESER, G. *Epistémologie des nombres relatifs.* Recherches en Didatiques des Mathématiques, v. 2, n. 3, p. 303-346, 1981.

GÓMEZ-GRANELL, Carmen. *Rumo a uma epistemologia do conhecimento escolar: o caso da educação matemática. In*: ARNAY, J. e RODRIGO, M.J.(org) Domínios do Conhecimento, prática educativa e formação de professores. Trad.: Claúdia Schilling. São Paulo: Editora Ática, 2002.

GRUGNETTI & ROGER et al. Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. In: FAUVEL, J. MAANEN, J. (Eds.) *History in mathematics education: the ICMI study.* Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

IGLIORI, S. "*A noção de obstáculo epistemológico e a educação matemática*." In: Educação Matemática – uma introdução. Machado, S. (org.). São Paulo: Ed. PUC-SP, 1999.

JAHNKE, H. N. et al. The use of original sources in the mathematics classroom. In: FAUVEL, J. MAANEN, J. (Eds.) *History in mathematics education: the ICMI study.* Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

KLEIN, F. *Matemática elemental desde um punto de vista superior.* Madrid: s/e, Coleção Biblioteca Matemática, 2v., s/d.

MACHADO, Nílson José. *Epistemologia e Didática. As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente* -5º ed. - São Paulo: Cortez, 2002.

MARÍAS, Julián. *História de la Filosofía.* - 22ª ed.- Madrid: Editorial Revista de Occidente, 1970.

MIGUEL, A. *Relações entre História e Pedagogia da Matemática*. *In*: NOBRE, S. (Ed) Anais do Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática e Seminário Nacional de História da Matemática, p. 149-152. Águas de São Pedro – São Paulo – Brasil, 1997a.

MIGUEL, A. *As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. In*: ZETETIKÉ – CEMPEM – FE/UNICAMP, v. 5, n. 8, p. 73-105, jul/dez. de 1997.

MIGUEL, A., MIORIM, M. A. *História na Educação Matemática – Propostas e desafios.* Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MIGUEL, A. *História, filosofia e sociologia da educação matemática na formação do professor: um programa de pesquisa. In*: Educação e Pesquisa – Revista da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120. jan/abr 2005.

MIORIM, Ma. Ângela. *Introdução à História da Educação Matemática*. São Paulo: Atual Editora, 1998.

MORAL-SANTAELLA, C. *Formación para la profesión docente: nuevas metáforas para la formación del profesorado*. Granada: FORCE, 1998.

PAIS, L. C. "*Didática da Matemática – Uma análise da influência francesa*."- 2ª ed. - Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PIAGET, J.; GARCIA, R. *Psicogênese e História das Ciências.* Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.

PIETROCOLA, M. *Construção e realidade: o realismo científico de Mário Bunge e o ensino de ciências através de modelos.* In: Investigações em ensino de ciências. http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol4/n3/v4_n3_a3, 10/10/2003.

PIRES, RUTE C., *A Geometria dos Positivistas Brasileiros*. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 1998.

POWELL, A.B., TEMPLE, O.L. *Construindo pontes entre passado e presente: etnomatemática,* o papiro matemático de ahmes *e estudantes urbanos*. In: RIBEIRO, J. P. M.; DOMITE, M. C. S.; FERREIRA, R. (Orgs.) Etnomatemática: papel, valor e significado. São Paulo: Zouk, 2004.

RADFORD, L. *Before the Other Unknowns were Invented: Didatic Inquiries on the Methods and Problems of Mediaeval Italian Álgebra.* For the Learning of Mathematics 15, 3, p. 28-38, november, 1995.

RADFORD, L. *On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: towards a Sócio-Cultural History of Mathematics*. For the Learning of Mathematics 17, 1, p. 26-33, february, 1997.

RADFORD, L. et al. *Historical formation and student understanding of mathematics*. In: FAUVEL, J. MAANEN, J. (Eds.) History in mathematics education: the ICMI study. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

RADFORD, L., BOERO, P.; VASCO, C. *Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics.* In: FAUVEL, J. MAANEN, J. (Eds.) History in mathematics education: the ICMI study. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

ROSA, M., OREY, D. C. *Tendências atuais da etnomatemática como um programa: rumo à ação pedagógica. In*: ZETETIKÉ – CEMPEM – FE/UNICAMP, v. 13, n. 23, p. 121-136, jan/jun, 2005.

SIERPINSKA, A. *Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite*. Recherches em Didatiques des Mathématiques, v. 6.1, p. 5-67, 1985.

SIERPINSKA, A. *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press, 1994.

SCHUBRING, G. *Relações entre a História e o Ensino da Matemática. In*: NOBRE, S. (Ed.) Anais do Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática e Seminário Nacional de História da Matemática, p. 157-163. Águas de São Pedro – São Paulo – Brasil, 1997.

SCHUBRING, G. *Desenvolvimento histórico do conceito e do processo de aprendizagem, a partir de recentes concepções matemático-didáticas (erro, obstáculos, transposição)* In: *Zetetiké,* - CEMPEM – FE/UNICAMP*,* vol. 6, nº 10, julho/dezembro de 1998, p. 9-34.

SILVA, Circe Mary Silva da. *A Matemática Positivista e sua difusão no Brasil*. Vitória: EDUFES, 1999.

SILVA, Circe Mary Silva da. *A história da matemática e os cursos de formação de professores.* In Cury, Helena Noronha (org.). Formação de professores de matemática: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001, p. 129-165.

TAMBARA, Elomar, *Educação e positivismo no Brasil*. In: STEPHANOU, Maria e BASTOS, Maria H.C., Histórias e Memórias da Educação no Brasil. Vol. II – Século XIX. Petrópolis, RJ: Vozes, 2005.

TRIADAFILLIDIS, T. A., *Dominant Epistemologies in Mathematics Education*. For the Learning of Mathematics 18, 2, p. 21-27, june, 1998.

TRINDADE, J. A. "*Os Obstáculos Epistemológicos e a Educação*." Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, 1996.

TRIVIÑOS, Augusto N. S., *Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais: A Pesquisa Qualitativa em Educação.* São Paulo: Atlas, 1987.

VALENTE, W. R. Uma História da Matemática Escolar no Brasil, 1730-1930. São Paulo, Annablume/FAPESP, 1999.

VALENTE, Wagner R., *Positivismo e Matemática Escolar nos Livros Didáticos no Advento da República.* In: Cadernos de Pesquisa – Fundação Carlos Chagas, Campinas: Editora Autores Associados Ltda, n. 109, março de 2000.

VALENTE, W. R. *História da Matemática Escolar no Brasil*. In: Anais do IV Seminário Nacional de História da Matemática, p. 207-219. Natal – RN. Editora da SBHMat, Rio Claro, 2001.

VITHAL, R. & SKOVSMOSE, O. *The end of innocence: a critique of 'ethnomathematics'*. In: Educational Studies in Mathematics 34, n. 2, p. 131-157, november, 1997.

VIGOTSKI, L. S., *A Formação Social da Mente: O Desenvolvimento dos Processos Psicológicos Superiores*. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

WALDEGG, G. Histoire, Épistémologie et Méthodologie dans la Recherche em Didactique. *For the Learning of Mathematics* 17, 1, p. 43-46, february, 1997.

ZÚÑIGA, A. R. *Polemicas de método em la historia de la ciência y las matemáticas*. In: Memórias Tercer Congreso Nacional de Matemáticas, p 423-431. San Jose, Costa Rica, 1990.